Banque d'épreuves E3A 2020

Épreuve de mathématiques, PSI, quatre heures

Corrigé

Exercice 1

1. Montrons que pour tout $x \in [1, +\infty[$, la série $\sum_{n \geqslant 0} f_n(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ converge.

   Soit $x \in [1, +\infty[$. Comme $f_n(x) \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ est manifestement alternée. Or la suite $\left(\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}\right|\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante car $n \mapsto 1 + nx$ et la fonction racine carrée sont croissantes, et elle converge vers 0. Donc, d'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ converge : d'où le résultat.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $|f_n| : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+nx}}$ décroît sur $[1, +\infty[$, est égale à $\frac{1}{\sqrt{1+n}}$ en 1 et tend vers 0 en l'infini. Par conséquent :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{1+n}}.$$

   Or : $\frac{1}{\sqrt{1+n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, et la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car son exposant est $\frac{1}{2} \leqslant 1$. Donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \|f_n\|_\infty$ diverge : d'où le résultat.

3. On a démontré dans la première question que pour tout $x \in [1, +\infty[$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ vérifie le théorème spécial des séries alternées. Par conséquent son reste d'indice N (noté $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$) est majoré en valeur absolue par son premier terme :

   $$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [1, +\infty[, \quad |R_N(x)| \leqslant |f_{N+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+(N+1)x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2+N}}.$$

   Cette majoration est indépendante de x. Donc, par propriété de la borne supérieure :

   $$\forall N \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|R_N\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{2+N}} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{N \to +\infty} \|R_N\|_\infty = 0$. Ainsi le reste de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$ vers la fonction nulle, ce qui équivaut au fait que la série $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$: d'où le résultat.

4. La série $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$, et on a :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \ \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1, \end{cases}$$

donc, d'après le théorème de la double limite :

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 1,$$

ce qu'il fallait obtenir.

5. 5.1. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ vérifie clairement les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, que nous avons rappelées dans la première question ; donc elle converge.

   5.2. Soit x au voisinage de l'infini. On a :

$$\varphi(x) - \left(1+\frac{a}{\sqrt{x}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}}-\frac{1}{\sqrt{nx}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{nx}-\sqrt{1+nx}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}}$$

En multipliant au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\varphi(x) - \left(1+\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}\left(\sqrt{nx}+\sqrt{1+nx}\right)}\right| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}\left(\sqrt{nx}+\sqrt{1+nx}\right)} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{nx}\left(\sqrt{nx}+\sqrt{nx}\right)} \\ &= \frac{1}{2x\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}},\end{aligned}$$

sachant que ces majorations ne posent pas de problème parce que la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge (son exposant est $\frac{3}{2}>1$). En posant $M = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$, nous avons l'existence d'une constante réelle $M>0$ telle que pour tout x au voisinage de l'infini, on ait :

$$\left|\varphi(x) - \left(1+\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right| \leqslant \frac{M}{x\sqrt{x}}.$$

Ceci montre bien que : $\varphi(x) - \left(1+\frac{a}{\sqrt{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$, c'est-à-dire :

$$\varphi(x) = 1 + \frac{a}{\sqrt{x}} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 2

1. Par exemple $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$ sont à diagonale propre (comme un calcul direct de polynôme caractéristique le démontre) mais ne sont pas diagonales.

2. Notons d'abord que M est à diagonale propre si et seulement si son polynôme caractéristique est $\chi_M = (X-0)^3 = X^3$. Or un calcul rapide démontre qu'on a :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\alpha \\ 0 & \lambda & -\beta \\ -\alpha & -\beta & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -\beta \\ -\beta & \lambda \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} 0 & -\alpha \\ \lambda & -\beta \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2-\beta^2) - \alpha^2\lambda,$$
donc : $\chi_M = X(X^2-(\alpha^2+\beta^2)) = X(X-\sqrt{\alpha^2+\beta^2})(X+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})$. Ainsi M est à diagonale propre si et seulement si $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 0$, si et seulement si $\alpha = \beta = 0$ (puisqu'une somme de réels positifs est nulle seulement si chaque terme de la somme est nul). Mais dans ce cas M est la matrice nulle.

   On a donc montré que M est à diagonale propre si et seulement si $M = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})}$.

3. 3.1. Par hypothèse X_1 suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$, donc $X_1(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{P}(X_1 = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}.$$
Nous savons de plus que dans ce cas, X_1 admet une espérance et une variance, et qu'on a : $E(X_1) = 3$, $V(X_1) = 9-3 = 6$.

   3.2. On a :
$$(X_1 = X_2) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X_1 = n, X_2 = n).$$

   3.3. Pour abréger, notons E l'évènement : « B est à diagonale propre ». C'est bien un évènement, puisqu'il s'écrit comme union et intersection (dénombrables) d'évènements, comme nous allons le voir.

   D'après la deuxième question de cet exercice, B est à diagonale propre si et seulement si $X_1 - X_2 = 0$ et $X_2 - X_3 = 0$, si et seulement si $X_1 = X_2 = X_3$. Autrement dit :
$$E = (X_1 = X_2 = X_3) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X_1 = n, X_2 = n, X_3 = n).$$
Calculons donc la probabilité que cet évènement se réalise. Puisqu'il s'agit d'une union d'évènements incompatibles, on a par σ-additivité :
$$\mathbb{P}(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = n, X_3 = n).$$
Les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont supposées mutuellement indépendantes, donc :
$$\mathbb{P}(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n)\mathbb{P}(X_2 = n)\mathbb{P}(X_3 = n) = \frac{1}{3^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{3(n-1)} = \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}.$$
Après simplifications :
$$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{19}.$$

4. 4.1. On rappelle que $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent $\mathrm{tr}({}^tAA)$ désigne la norme au carré de A, pour la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. On en déduit :
$$\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

4.2. La matrice A est ici supposée symétrique réelle. Donc, d'après le théorème spectral, il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. Par conséquent $A^2 = PD^2P^{-1}$, donc A^2 et D^2 sont semblables et en particulier elles ont même trace. On en déduit :

$$\operatorname{tr}({}^tAA) = \operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(D^2)$$

et les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A comptées avec multiplicités. On obtient donc bien :

$$\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

4.3. Soit A une matrice symétrique réelle qui soit à diagonale propre. Dans ce cas on a, avec les notations ci-dessus :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,i} = \lambda_i.$$

En comparant les deux expressions de la trace données dans les questions précédentes, on a de plus :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \iff \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} a_{i,j}^2 + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{i,i}^2}_{=\lambda_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \iff \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} a_{i,j}^2 = 0.$$

Or une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul. On a donc, pour tous indices i et j DISTINCTS de $[\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = 0$. Autrement dit, A est une matrice diagonale.

Réciproquement, toute matrice diagonale est à diagonale propre, comme un calcul immédiat de polynôme caractéristique le démontre.

En conclusion : une matrice symétrique réelle est à diagonale propre si et seulement si elle est diagonale.

Exercice 3

1. 1.1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et t au voisinage de $+\infty$. On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{1+t^2} = 0$. Donc, en composant le développement limité $\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \underset{u\to0}{o}(u^3)$, on obtient :

$$\lambda - f(t) = (\lambda-1) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2 + \underset{t\to+\infty}{o}\left(\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^3\right) = (\lambda-1) + \frac{1}{2}\frac{t^2}{(1+t^2)^2} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

On en déduit que si $\lambda = 1$, alors :

$$1 - f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{t^2}{(1+t^2)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2t^2},$$

tandis que si $\lambda \neq 1$, alors :

$$\lambda - f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \lambda - 1.$$

1.2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto \frac{\lambda - f(t)}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc aussi sur $[a, +\infty[$ car $a > 0$.

Supposons d'abord $\lambda \neq 1$. D'après la question précédente on a :

$$\frac{\lambda - f(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda - 1}{t} \neq 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\mathrm{d}t$ diverge (si $\lambda - 1 < 0$ alors l'intégrande n'est pas positif, mais ce n'est pas grave : il suffit de considérer la nature de l'intégrale opposée dans ce cas).

Supposons à présent $\lambda = 1$. D'après la question précédente on a :

$$\frac{1 - f(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2t^3} > 0.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ converge parce que son exposant est $3 > 1$ donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

En conclusion, $I(\lambda)$ existe si et seulement si $\lambda = 1$.

1.3. Soit x au voisinage de $+\infty$. On a :

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_a^x \frac{f(t) - 1}{t}\mathrm{d}t + \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t}\mathrm{d}t = \int_a^x \frac{f(t) - 1}{t}\mathrm{d}t + \ln(x) - \ln(a).$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t) - 1}{t}\mathrm{d}t = -I(1)$ converge d'après la question précédente, donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{f(t) - 1}{t}\mathrm{d}t = -I(1)$. Comme le logarithme a une limite infinie en l'infini, on en déduit :

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x).$$

2. Si $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ convergent, alors leur différence converge également. Or :

$$I(\lambda) - I(\mu) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - \mu}{t}\mathrm{d}t,$$

et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge. Donc la seule possibilité pour que $I(\lambda) - I(\mu)$ soit une intégrale convergente est que $\lambda - \mu = 0$, c'est-à-dire : $\lambda = \mu$. D'où le résultat.

3. 3.1. L'application $t \mapsto \lambda - f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse l'application $H_\lambda : x \mapsto \displaystyle\int_a^x (\lambda - f(t))\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_\lambda'(x) = \lambda - f(x).$$

3.2. Supposons que H_λ soit bornée sur $\mathbb{R}$ en valeur absolue par une constante M. Nous allons en même temps montrer la convergence de $I(\lambda)$, et obtenir l'égalité $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\mathrm{d}t$, *via* une intégration par parties. On remarque en effet que sous réserve d'existence :

$$I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda'(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Ceci incite à intégrer par parties :

— en dérivant $t \mapsto \dfrac{1}{t}$, qui est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$, et de dérivée $t \mapsto -\dfrac{1}{t^2}$;

— en intégrant H'_λ, qui est continue sur $[a,+\infty[$, et dont une primitive est H_λ.

Puisqu'il s'agit d'une intégrale impropre, nous devons préalablement vérifier l'existence du terme $\left[\dfrac{H_\lambda(t)}{t}\right]_a^{+\infty}$; la valeur en a ne pose pas de problème (on a par ailleurs $H_\lambda(a)=0$), et pour la limite en $+\infty$ il suffit d'écrire :

$$0 \leqslant \left|\frac{H_\lambda(t)}{t}\right| \leqslant \frac{M}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc, d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t} = 0$.

Toutes les hypothèses étant vérifiées, d'après le théorème de l'intégration par parties les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{H'_\lambda(t)}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} -\frac{H_\lambda(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ sont de même nature. Or cette dernière intégrale converge (absolument), du fait que :

$$\forall t \in [a,+\infty[, \quad \left|-\frac{H_\lambda(t)}{t^2}\right| = \frac{|H_\lambda(t)|}{t^2} \leqslant \frac{M}{t^2},$$

sachant que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (son exposant est $2>1$). Par conséquent l'intégrale $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{H'_\lambda(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge aussi, et on a :

$$I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{H'_\lambda(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{H_\lambda(t)}{t}\right]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\mathrm{d}t,$$

d'où le résultat.

4. 4.1. Si F est une primitive de f (qui existe car f est continue), alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = F(x+T) - F(x).$$

Par conséquent φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de deux fonctions de classe C^1, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0,$$

car f est supposée T-périodique. Par conséquent φ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$: d'où le résultat.

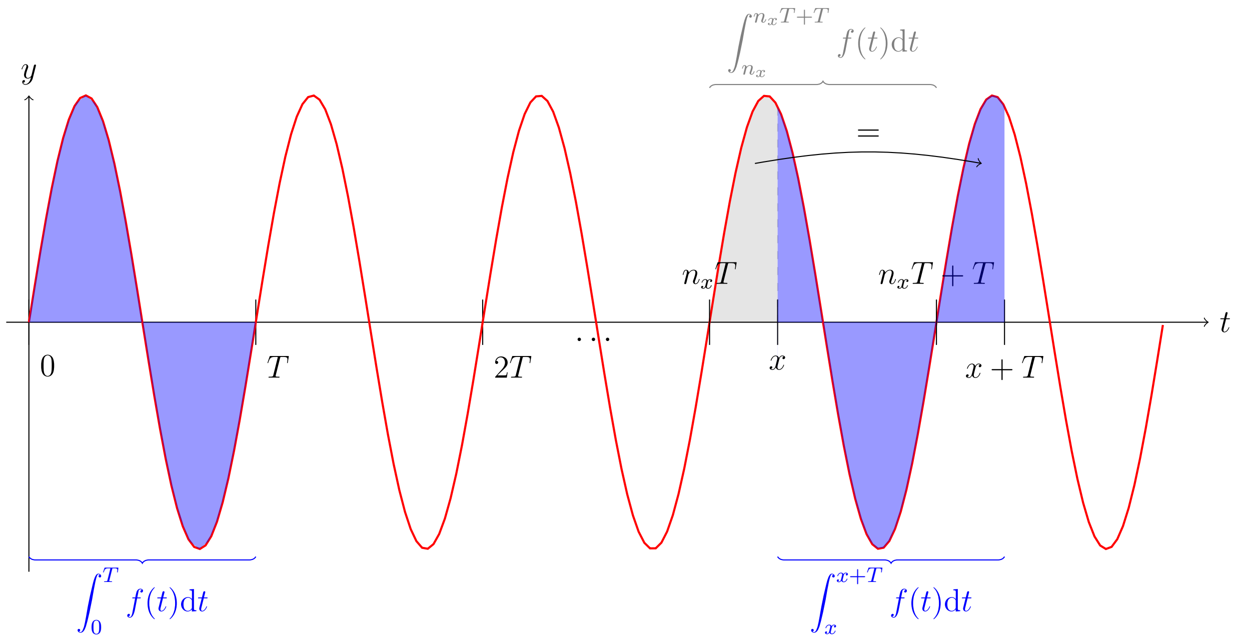
En particulier, $\varphi(x) = \varphi(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t. \tag{1}$$

On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) &= \int_x^{x+T} (\lambda - f(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_x^{x+T} \mathrm{d}t - \int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t \\ &\overset{(1)}{=} \lambda T - \int_0^T f(t)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

d'où le résultat.



Remarque. On peut aussi démontrer géométriquement l'égalité (1), avec la relation de Chasles et un changement de variable adéquat. Pour comprendre le choix des bornes dans la relation de Chasles, il est bon d'avoir la figure ci-dessus sous les yeux (ici n_x est le grand entier tel que $n_xT \leqslant x$, c'est-à-dire $n_x = E\left(\frac{x}{T}\right)$, mais peu importe sa valeur exacte).

Si l'on fait le changement de variable $u = t + n_xT$ (licite car de classe C^1), on obtient donc :

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_{n_xT}^{n_xT+T} f(u - n_xT)\mathrm{d}u = \int_{n_xT}^{n_xT+T} f(u)\mathrm{d}u,$$

par T-périodicité de f, et avec la relation de Chasles on a :

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_{n_xT}^{x} f(u)\mathrm{d}u + \int_x^{n_xT+T} f(u)\mathrm{d}u.$$

Le changement de variable $v = u + T$ dans la première intégrale donne finalement (on utilise encore la périodicité de f) :

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_{n_xT+T}^{x+T} f(v-T)\mathrm{d}v + \int_x^{n_xT+T} f(u)\mathrm{d}u &= \int_{n_xT+T}^{x+T} f(v)\mathrm{d}v + \int_x^{n_xT+T} f(v)\mathrm{d}v \\ &= \int_x^{x+T} f(v)\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

4.2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. D'après la question précédente, où l'on pose $x = a + kT$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad H_\lambda(a + (k+1)T) - H_\lambda(a + kT) = \lambda T - \int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

En sommant cette égalité de $k = 0$ à $k = n-1$, on obtient une somme télescopique dans le membre de gauche, tandis qu'on somme une quantité constante (ne dépendant pas de k) dans le membre de droite, donc :

$$H_\lambda(a + nT) - H_\lambda(a) = n\left(\lambda T - \int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right).$$

Notons que cette égalité est aussi valable pour $n = 0$ (on obtient $0 = 0$). Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_\lambda(a + nT) = H_\lambda(a) + n\left(\lambda T - \int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right).$$

Le membre de droite a une limite infinie quand $n \to +\infty$ si $\lambda T - \int_0^T f(t)\mathrm{d}t \neq 0$. On en déduit en particulier qu'une condition nécessaire sur λ pour que $(H_\lambda(a + nT))_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée est que $\lambda T - \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$ soit nul. La valeur λ_0 cherchée est donc :

$$\lambda_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

4.3. Si l'on prend $\lambda = \lambda_0$, alors d'après la question 4.1 on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_\lambda(x + T) - H_\lambda(x) = \lambda_0 = 0,$$

ce qui prouve que H_λ est T-périodique sur $\mathbb{R}$. Comme elle est de plus continue sur $\mathbb{R}$, elle est bornée ; redémontrons ce résultat classique. Comme H_λ est continue sur le segment $[0, T]$, d'après le théorème des bornes atteintes il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in [0, T]$, $|H_\lambda(x)| \leqslant M$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si l'on note n_x l'unique entier tel que $x - n_x T \in [0, T]$ (cela n'a pas la moindre importance pour la suite, mais on a $n_x = E\left(\frac{x}{T}\right)$ où E est la fonction partie entière), on a :

$$\begin{aligned} |H_\lambda(x)| &= |H_\lambda(x - n_x T)| && \text{(car } H_\lambda \text{ est } T\text{-périodique)}\\ &\leqslant M, && \text{(car } x - n_x T \in [0, T])\end{aligned}$$

d'où le résultat.

En conclusion, H_λ est T-périodique et bornée sur $\mathbb{R}$.

4.4. Nous avons montré dans la question précédente que si $\lambda = \lambda_0$, alors H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$. Donc, d'après la question 3.2, l'intégrale $I(\lambda_0)$ converge. Or la question 2 montre qu'il y a au plus un réel λ tel que $I(\lambda)$ converge. Donc :

$$I(\lambda) \text{ converge} \iff \lambda = \lambda_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

4.5. On reprend le raisonnement de la question 1.3, avec λ_0 au lieu de 1. Pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_a^x \frac{f(t) - \lambda_0}{t}\mathrm{d}t + \lambda_0\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t}\mathrm{d}t = \int_a^x \frac{f(t) - \lambda_0}{t}\mathrm{d}t + \lambda_0\left(\ln(x) - \ln(a)\right).$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x \frac{f(t) - \lambda_0}{t}\mathrm{d}t = -I(\lambda_0)$, et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\lambda_0\ln(x) = \pm\infty$ (car $\lambda_0 \neq 0$ dans cette question), le terme logarithme est prépondérant devant tous les autres au voisinage de $+\infty$, et on en déduit :

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda_0\ln(x).$$

5. 5.1. L'application $t \mapsto \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et au voisinage de 0 on a :

$$\frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} \underset{t\to0}{\sim} \frac{|nt|}{t} \underset{t\to0}{\sim} n \underset{t\to0}{\longrightarrow} n,$$

par conséquent l'application $t \mapsto \dfrac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}$ se prolonge en une application continue sur le SEGMENT $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc l'intégrale $A_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}\mathrm{d}t$ converge.

5.2. Pour tout t au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} = \frac{\sin(t)-t}{t\sin(t)} = \frac{-\frac{t^3}{6} + \underset{t\to 0}{o}\left(t^4\right)}{t\sin(t)} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^3}{6t\cdot t} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t}{6},$$

d'où le résultat.

5.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a :

$$A_n - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(nt)| \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t,$$

et comme l'application $t \mapsto \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$ est prolongeable en une application continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (la seule difficulté est en 0, mais d'après la question précédente cette fonction y admet une limite nulle, en particulier finie), d'après le théorème des bornes atteintes elle y est bornée (en valeur absolue) par une constante $C > 0$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad |A_n - B_n| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(nt)| \cdot \left|\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot C\mathrm{d}t = \frac{\pi C}{2},$$

ce qui démontre bien que la suite $(A_n - B_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est bornée.

5.4. i. Le changement de variable $u = nt$ dans l'intégrale $B_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(nt)|}{t}\mathrm{d}t$ donne :

$$B_n = \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\mathrm{d}u + \int_{\frac{\pi}{2}}^{n\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\mathrm{d}u. \tag{2}$$

On peut prendre n'importe quelle borne intermédiaire à la place de $\frac{\pi}{2}$, tant qu'elle est strictement positive (afin d'utiliser les résultats de la question 4). Comme l'application $u \mapsto |\sin(u)|$ est π-périodique, d'après la question 4.5 on a (en prenant $a = \frac{\pi}{2}$) :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{n\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda_0 \ln\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

où l'on vérifie qu'on a bien $\lambda_0 \neq 0$:

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin(u)|\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}\left[-\cos(u)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \neq 0.$$

Et comme $\ln\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \ln(n) + \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$, on a même :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{n\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln(n).$$

En utilisant cet équivalent dans (2), où l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\mathrm{d}u$ est une constante donc est négligeable devant une quantité qui tend vers l'infini :

$$B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln(n),$$

d'où le résultat.

Remarque. On retrouve implicitement le fait classique que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$A_n = (A_n - B_n) + B_n.$$

Comme $(A_n - B_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est bornée, et que $B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce dernier terme est prépondérant et on en déduit :

$$A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln(n).$$

Exercice 4

1. On a, en utilisant successivement la linéarité par rapport à la première, puis à la deuxième variable :

$$\Phi(X,Y) = x_1y_1\Phi(\vec{i},\vec{i}) + x_1y_2\Phi(\vec{i},\vec{j}) + x_2y_1\Phi(\vec{j},\vec{i}) + x_2y_2\Phi(\vec{j},\vec{j}).$$

Grâce aux données de l'énoncé, on obtient donc :

$$\Phi(X,Y) = x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1)\cos(\theta) + x_2y_2.$$

2. Au vu de la formule explicite obtenue dans la première question, le fait que ce soit une forme bilinéaire est évident, notamment du fait de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Pour la symétrie, on note que le produit étant commutatif dans $\mathbb{R}$, si $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ alors :

$$\Phi(Y,X) = y_1x_1 + (y_1x_2 + y_2x_1)\cos(\theta) + y_2x_2 = \Phi(X,Y).$$

Il reste à vérifier que Φ est définie et positive. Or, si $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$, alors :

$$\begin{aligned}\Phi(X,X) = x_1^2 + 2x_1x_2\cos(\theta) + x_2^2 &= (x_1 + \cos(\theta)x_2)^2 + x_2^2 - \cos(\theta)^2x_2^2 \qquad (*)\\ &= (x_1 + \cos(\theta)x_2)^2 + (1 - \cos(\theta)^2)x_2^2.\end{aligned}$$

On a $1-\cos(\theta)^2 \geqslant 0$ (mieux : par hypothèse $\theta \in]0,\pi[$, donc $1-\cos(\theta)^2 > 0$), donc la somme ci-dessus ne contient que des termes positifs. On en déduit d'une part : $\Phi(X,X) \geqslant 0$. D'autre part, une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul, donc :

$$\Phi(X,X) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + \cos(\theta)x_2 &=& 0\\ \underbrace{(1-\cos(\theta)^2)}_{>0}x_2 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& 0,\\ x_2 &=& 0,\end{array}\right.$$

donc $\Phi(X,X) = 0$ si et seulement si X est le vecteur nul : ceci achève de démontrer que Φ est définie positive.

En tant que forme bilinéaire symétrique définie positive, Φ est un produit scalaire sur E.

3. Comme f est linéaire, pour montrer que f est une isométrie il suffit de démontrer qu'elle préserve la norme euclidienne associée au produit scalaire Φ. C'est-à-dire :

$$\forall X \in E, \quad \Phi(f(X), f(X)) = \Phi(X, X).$$

On nous donne la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, ce qui nous permet d'en déduire : $f(\vec{i}) = \vec{j}$, $f(\vec{j}) = -\vec{i} + 2\cos(\theta)\vec{j}$, et donc, pour tout $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$, on a :

$$f(X) = x_1 f(\vec{i}) + x_2 f(\vec{j}) = -x_2\vec{i} + (x_1 + 2\cos(\theta)x_2)\vec{j}.$$

Grâce à l'explicitation de Φ donnée dans la première question (ou plutôt grâce à $(*)$ si l'on s'intéresse à $\Phi(X, X)$ et $\Phi(f(X), f(X))$), on en déduit :

$$\begin{aligned}\Phi(f(X), f(X)) &= (-x_2)^2 + 2(-x_2)(x_1 + 2\cos(\theta)x_2)\cos(\theta) + (x_1 + 2\cos(\theta)x_2)^2 \\ &= x_2^2 - 2x_1x_2\cos(\theta) - 4x_2^2\cos(\theta)^2 + x_1^2 + 4x_1x_2\cos(\theta) + 4\cos(\theta)^2x_2^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2\cos(\theta) + x_2^2 = \Phi(X, X),\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. Appliquons l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Notons que $\Phi(\vec{i}, \vec{i}) = 1$, donc $\vec{i}$ est déjà unitaire pour ce produit scalaire. Posons :

$$\vec{u} = \vec{j} - \Phi(\vec{i}, \vec{j})\vec{i}, \qquad \text{et :} \quad \vec{k} = \frac{1}{\sqrt{\Phi(\vec{u}, \vec{u})}}\vec{u}.$$

L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt assure alors que la famille $(\vec{i}, \vec{k})$ est orthonormée, et qu'on a $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$. Explicitons $\vec{k}$; on a : $\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \cos(\theta)$, et donc :

$$\vec{u} = \vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}.$$

Or :

$$\Phi(\vec{u}, \vec{u}) \overset{(*)}{=} (-\cos(\theta))^2 - 2\cos(\theta)\cos(\theta) + 1^2 = 1 - \cos(\theta)^2 = \sin(\theta)^2,$$

donc finalement :

$$\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{\sin(\theta)^2}}\left(\vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}\right) = \frac{1}{\sin(\theta)}\left(\vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}\right).$$

5. On sait déjà que f est une isométrie, et sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ permet de voir immédiatement que $\det(f) = \det(C) = 1$, donc f est une rotation planaire dont il reste à déterminer une mesure d'angle $\vartheta \in \mathbb{R}$ (faisons fi de l'orientation pour le moment) : or $2\cos(\vartheta) = \mathrm{tr}(f)$ d'après la classification des isométries directes en dimension 2, donc $\cos(\vartheta) = \cos(\theta)$, et $\vartheta \equiv \pm\theta \bmod 2\pi$. Sans aller plus loin, on s'attend donc déjà à ce que la matrice de f dans une base orthonormée (ce qu'est $(\vec{i}, \vec{k})$) soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mp\sin(\theta) \\ \pm\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Or $f(\vec{i}) = \vec{j}$ d'après la donnée de la matrice C, et du fait que $\vec{k} = \frac{1}{\sin(\theta)}\left(\vec{j} - \cos(\theta)\vec{i}\right)$ on en déduit : $\vec{j} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{k}$. Par conséquent $f(\vec{i}) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{k}$, ce qui signifie que la première colonne de $\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{k})}(f)$ est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$. La discussion qui précède nous assure donc qu'on a :

$$\mathrm{M}_{(\vec{i},\vec{k})}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que si E est orienté de sorte que la base $(\vec{\imath}, \vec{k})$ soit directe (ou $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$: les deux bases ont même orientation), alors f est une rotation planaire de mesure d'angle θ.

Remarque. Il est aussi possible d'obtenir $\mathrm{M}_{(\vec{\imath},\vec{k})}(f)$ à partir de $\mathrm{M}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(f) = C$ grâce à la formule du changement de base.

6. Comme f est une rotation planaire de mesure d'angle θ, on sait que f^m est une rotation de mesure d'angle $m\theta$. Par conséquent, $f^m = \mathrm{Id}_E$ si et seulement si $m\theta \equiv 0 \bmod 2\pi$, si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $m\theta = 2k\pi$. On en déduit :

$$f^m = \mathrm{Id}_E \Longleftrightarrow \theta \in \frac{2\pi}{m}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{2k\pi}{m} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$