Banque d'épreuves E3A 2019

Épreuve de mathématiques II, PSI, trois heures

Corrigé

Questions de cours

1. Nous citons le théorème de Cauchy linéaire pour un système différentiel ; ici n est un entier naturel non nul, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Soient $A : I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux applications continues sur I. On fixe $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall t \in I,\ Y'(t) & = & A(t)Y(t) + B(t), \\ Y(t_0) & = & Y_0, \end{array} \right.$$

admet exactement une solution $Y \in \mathrm{C}^1(I, \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$.

Ce théorème peut se reformuler en disant que l'application $Y \mapsto Y(t_0)$ définit une application de l'ensemble des solutions de $Y' = AY + B$ dans $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, surjective (ceci équivaut à l'existence d'une solution) et injective (ceci équivaut à l'unicité de la solution), donc bijective. En particulier, si $B = 0$, c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels. C'est ainsi que nous l'utiliserons dans ce sujet (question **1.3** de la partie II, et question **1.4** de la partie III).

2.

(**2.1**) On a :

$$\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

ce dont on déduit immédiatement : $|\mathrm{j}| = 1$, et : $\arg(\mathrm{j}) \equiv \dfrac{2\pi}{3} \bmod 2\pi$.

(**2.2**) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a : $s_k = 1 + \mathrm{j}^k + \left(\mathrm{j}^k\right)^2$. On reconnaît la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison j^k. Pour la calculer, deux cas de figure sont à considérer, selon que j^k égale 1 ou non ; nous allons d'abord déterminer à quelle condition sur k cela se produit : on a $\mathrm{j}^k = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^k = e^{\frac{2i\pi k}{3}}$. Par conséquent :

$$\mathrm{j}^k = 1 \Longleftrightarrow e^{\frac{2i\pi k}{3}} = 1 \Longleftrightarrow \frac{2\pi k}{3} \equiv 0 \bmod 2\pi \Longleftrightarrow \exists \ell \in \mathbb{Z},\ \frac{2\pi k}{3} = 2\pi\ell \Longleftrightarrow \exists \ell \in \mathbb{Z},\ k = 3\ell,$$

donc en résumé : $\mathrm{j}^k = 1$ si et seulement si k est un multiple entier de 3.

Revenons à l'étude de s_k :

— si $k \equiv 0 \bmod 3$, alors $\mathrm{j}^k = 1$, et donc : $s_k = 3$;

— si $k \not\equiv 0 \bmod 3$, alors $\mathrm{j}^k \neq 1$, et on a :

$$s_k = \frac{\left(\mathrm{j}^k\right)^3 - 1}{\mathrm{j}^k - 1} = \frac{\mathrm{j}^{3k} - 1}{\mathrm{j}^k - 1},$$

mais dans ce cas : $j^{3k} = e^{\frac{2i\pi\cdot(3k)}{3}} = e^{2i\pi k} = 1$, donc $s_k = 0$.

En résumé :

$$s_k = \begin{cases} 3 & \text{si } k \equiv 0 \bmod 3, \\ 0 & \text{si } k \not\equiv 0 \bmod 3. \end{cases}$$

(2.3) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\begin{cases} a & +b & +c & = 1, \\ a & +\mathrm{j}b & +\mathrm{j}^2 c & = 0, \\ a & +\mathrm{j}^2 b & +\mathrm{j}c & = 0, \end{cases}$$

et notons L_1, L_2 et L_3 les lignes respectives du système. Les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 + \mathrm{j}L_2 + \mathrm{j}^2 L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 + \mathrm{j}^2 L_2 + \mathrm{j}L_3$ donnent respectivement :

$$\begin{cases} 3a & +s_1 b & +s_1 c & = 1, \\ s_1 a & +s_2 b & +3c & = 1, \\ s_1 a & +3b & +s_2 c & = 1, \end{cases}$$

c'est-à-dire, d'après la question précédente (où l'on démontre que $s_1 = s_2 = 0$ en particulier) :

$$\begin{cases} 3a & = 1, \\ 3c & = 1, \\ 3b & = 1, \end{cases}$$

donc : $(a, b, c) = \frac{1}{3}(1, 1, 1)$. On vérifie réciproquement que ce triplet est effectivement solution (nous avons encore besoin de la relation $s_1 = 0$). On en déduit que l'ensemble des solutions $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ du système est :

$$\left\{ \frac{1}{3}(1, 1, 1) \right\}.$$

3. On a : $\det(V_\gamma) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1} (\gamma_j - \gamma_i)$.

Partie I

1. S'il existe un couple $(i, j) \in [\![0, n-1]\!]^2$ avec $i \neq j$ tel que $\gamma_i = \gamma_j$, alors la $(i+1)$-ième et la $(j+1)$-ième colonne de V_γ sont égales. Les colonnes de la matrice V_γ sont donc liées, et : $\det(V_\gamma) = 0$.

2. L'hypothèse : $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$ se traduit ainsi, lorsqu'on regarde les coefficients de ce vecteur colonne :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \gamma_i^{j-1} = 0,$$

c'est-à-dire, en utilisant la notation $P = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X^{j-1}$ de l'énoncé :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad P(\gamma_i) = 0.$$

Autrement dit, les nombres complexes $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$ sont racines de P. Or ils sont supposés distincts dans cette question, donc on a énuméré là n racines de P, alors qu'il est clair que $\deg(P) \leqslant n-1$: ce n'est possible que si P est le polynôme nul ; ainsi $P = 0$, et donc tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_j = 0.$$

On a implicitement démontré ici que si les γ_i, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, sont tous distincts, alors la famille des vecteurs colonnes de ${}^tV_\gamma$ est libre, donc ${}^tV_\gamma$ est inversible et V_γ également. On en déduit : $\det(V_\gamma) \neq 0$.

3.

(**3.1**) Tout d'abord, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ l'application ψ_k est bien sûr de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, en tant que composition de l'application polynomiale $x \mapsto \gamma_k x$ (continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$) et de l'exponentielle ; on a par une récurrence immédiate :

$$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi_k^{(\ell)}(x) = \gamma_k^\ell e^{\gamma_k x} = \gamma_k^\ell \psi_k(x).$$

En tant que somme d'applications de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, l'application Ψ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!], \quad \Psi^{(\ell)} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \psi_k^{(\ell)} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \gamma_k^\ell \psi_k.$$

(**3.2**) Soit $(m_0, \ldots, m_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $\sum_{k=0}^{n-1} m_k \psi_k = 0$. Montrons : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $m_k = 0$; cela démontrera l'indépendance linéaire de la famille $(\psi_k)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$.

Avec les notations de la question précédente, l'hypothèse : $\sum_{k=0}^{n-1} m_k \psi_k = 0$ signifie que $\Psi = 0$. Ses dérivées successives sont donc identiquement nulles. En les évaluant en 0 on a, du fait que $\psi_k(0) = 1$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!], \quad \sum_{k=0}^{n-1} m_k \gamma_k^\ell = 0,$$

c'est-à-dire, en écrivant matriciellement ces n égalités :

$$V_\gamma \begin{pmatrix} m_0 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})}.$$

Or il est supposé ici que les γ_i, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, sont tous distincts, donc la matrice V_γ est inversible d'après la question **2**. L'égalité ci-dessus implique donc :

$$\begin{pmatrix} m_0 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})},$$

c'est-à-dire : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $m_k = 0$. D'où le résultat qu'on voulait démontrer. La famille $(\psi_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est bien libre dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Partie II

1.

(**1.1**) Si f est une solution de (E_1), alors f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, donc f' est de classe C^2 et f'' de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. En particulier elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$. En tant que somme d'applications dérivables sur $\mathbb{R}$, l'application $g = f + f' + f''$ est également dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $g' = f' + f'' + f^{(3)}$. Or $f^{(3)} = f$ puisque f vérifie (E_1) par hypothèse, donc :

$$g' = f' + f'' + f = g,$$

ainsi g est une solution de l'équation différentielle du premier ordre (E_2) : $y' = y$.

(**1.2**) La résolution de (E_2) est très standard. L'ensemble de ses solutions est :

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda e^t \end{matrix} \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

(**1.3**) Si f est une solution de l'équation (E_1), alors d'après la question **1.1** de cette partie, l'application $g = f + f' + f''$ est solution de (E_2). Donc, d'après la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \lambda e^t.$$

C'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) + f'(t) + f(t) = \lambda e^t. \tag{E_λ}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre, dont le membre de droite est de forme exponentielle : nous savons résoudre une telle équation. Ses solutions sont somme

d'une solution particulière et d'une solution de l'équation différentielle homogène associée : déterminons ces solutions.
Résolution de l'équation différentielle homogène associée à (E_λ) : $y''+y'+y=0$. Son équation caractéristique est $r^2+r+1=0$. Nous avons démontré, dans la question **2.2** de cours, que $s_1 = \mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1=0$ et $s_2 = (\mathrm{j}^2)^2+\mathrm{j}^2+1=0$. Ainsi j et j^2 sont deux solutions distinctes de l'équation caractéristique (en effet $\mathrm{j}\neq\mathrm{j}^2$ vu que $\mathrm{j}\neq 0$ et $\mathrm{j}\neq 1$). On en déduit que l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle $y''+y'+y=0$ est :

$$\left\{\begin{matrix}\mathbb{R} & \to & \mathbb{C}\\ t & \mapsto & \alpha e^{\mathrm{j}t}+\beta e^{\mathrm{j}^2 t}\end{matrix} \mid (\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\right\}.$$

Détermination d'une solution particulière de (E_λ). On considère $f_p : t\mapsto \mu e^t$, où $\mu\in\mathbb{C}$. L'application f_p est bien sûr de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et vérifie (E_λ) si et seulement si :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \mu e^t+\mu e^t+\mu e^t=\lambda e^t \iff 3\mu=\lambda \iff \mu=\frac{\lambda}{3}.$$

Ainsi $f_p : t\mapsto \frac{\lambda}{3}e^t$ est une solution particulière de (E_λ).

Conclusion. L'ensemble des solutions à valeurs complexes de (E_λ) est :

$$\left\{\begin{matrix}\mathbb{R} & \to & \mathbb{C}\\ t & \mapsto & \alpha e^{\mathrm{j}t}+\beta e^{\mathrm{j}^2 t}+\frac{\lambda}{3}e^t\end{matrix} \mid (\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\right\}.$$

Voyons comment en déduire l'ensemble $\mathscr{H}$ des solutions de (E_1) : si f est une solution de (E_1), alors d'après ce qui précède il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que f soit solution de (E_λ) ; or nous avons démontré à l'instant que pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, l'ensemble des solutions de (E_λ) est inclus dans : $\mathscr{H}'=\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\left\{t\mapsto e^{\mathrm{j}t}, t\mapsto e^{\mathrm{j}^2 t}, t\mapsto e^t\right\}\right)$. On en déduit : $\mathscr{H}\subseteq\mathscr{H}'$. De plus :
— d'après le théorème de Cauchy linéaire, l'application $Y\mapsto Y(0)$ définit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels entre $\mathscr{H}$ et $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, donc : $\dim(\mathscr{H})=\dim(\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{C}))=3$;
— la famille $\left(t\mapsto e^{\mathrm{j}t}, t\mapsto e^{\mathrm{j}^2 t}, t\mapsto e^t\right)$ est libre d'après la question **3.2** de la partie I, donc : $\dim(\mathscr{H}')=3$.

Ainsi nous avons une inclusion entre deux espaces vectoriels de même dimension, donc ils sont égaux. En conclusion, l'ensemble des solutions à valeurs complexes de (E_1) est :

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}'=\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\left\{t\mapsto e^{\mathrm{j}t}, t\mapsto e^{\mathrm{j}^2 t}, t\mapsto e^t\right\}\right)=\left\{\begin{matrix}\mathbb{R} & \to & \mathbb{C}\\ t & \mapsto & \alpha e^{\mathrm{j}t}+\beta e^{\mathrm{j}^2 t}+\gamma e^t\end{matrix} \mid (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3\right\}.$$

Remarque. On peut aussi vérifier par un calcul direct que réciproquement, pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, *toutes les solutions de* (E_λ) *sont des solutions de* (E_1). *Nous en faisons ici l'économie.*

2.

(**2.1**) Un bref calcul de déterminant montre que le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A = X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1).$$

Dans la résolution de la question **1.3** dans la partie II, nous avons implicitement déterminé les racines du polynôme X^2+X+1 : il s'agit de j et j^2. On en déduit :

$$\chi_A = (X-1)(X^2+X+1) = (X-1)(X-\mathrm{j})(X-\mathrm{j}^2).$$

Cela permet de répondre à la question de la diagonalisation de A :
— le polynôme caractéristique de A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ d'après le critère de diagonalisation ;
— le polynôme caractéristique de A est scindé et à racines simples dans $\mathbb{C}$ (en effet $\mathrm{j} \neq \mathrm{j}^2$ vu que $\mathrm{j} \neq 0$ et $\mathrm{j} \neq 1$), donc A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$;
d'où le résultat.

(**2.2**) La matrice A étant diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$, nous savons qu'il suffit, pour obtenir un système fondamental de solutions de (S), de déterminer ses éléments propres. La résolution des systèmes linéaires $AX = \mathrm{j}X$, $AX = \mathrm{j}^2X$ et $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, permet d'obtenir :

$$\ker(A - \mathrm{j}\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{j}\\ \mathrm{j}^2\end{pmatrix}\right),\ \ker(A - \mathrm{j}^2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{j}^2\\ \mathrm{j}^4\end{pmatrix}\right),\ \ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right),$$

(on peut simplifier : $\mathrm{j}^4 = \mathrm{j}^3 \times \mathrm{j} = \mathrm{j}$, mais ce nous est inutile pour l'instant) donc, si l'on pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y_0(t) = e^{\mathrm{j}t}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{j}\\ \mathrm{j}^2\end{pmatrix}, \quad Y_1(t) = e^{\mathrm{j}^2 t}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{j}^2\\ \mathrm{j}^4\end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

alors (Y_0, Y_1, Y_2) est un système fondamental de solutions de (S). C'est-à-dire : une application $X : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ est solution de (S) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $X = \alpha Y_0 + \beta Y_1 + \gamma Y_2$, si et seulement si :

$$\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{C}^3, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \alpha e^{\mathrm{j}t}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{j}\\ \mathrm{j}^2\end{pmatrix} + \beta e^{\mathrm{j}^2 t}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{j}^2\\ \mathrm{j}^4\end{pmatrix} + \gamma e^{t}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

ce qui résout explicitement le système (S).

(**2.3**) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application de classe C^3 sur $\mathbb{R}$. Posons : $X = \begin{pmatrix}f\\ f'\\ f''\end{pmatrix}$. Alors X est de classe

C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque toutes ses composantes le sont, et on a $X' = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \\ f^{(3)} \end{pmatrix}$. Par suite :

$$f \text{ vérifie } (E_1) \iff f^{(3)} = f \iff \begin{cases} f' & = & f' \\ f'' & = & f'' \\ f^{(3)} & = & f \end{cases} \iff X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X,$$

donc : f est solution de (E_1) si et seulement si $X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix}$ est solution de (S). Or nous avons déterminé les solutions de (S) dans la question précédente : on en déduit que f est solution de (E_1) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{\mathrm{j}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \\ \mathrm{j}^2 \end{pmatrix} + \beta e^{\mathrm{j}^2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j}^4 \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que (en identifiant coefficient par coefficient) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(t) & = & \alpha e^{\mathrm{j}t} + \beta e^{\mathrm{j}^2 t} + \gamma e^t \\ f'(t) & = & \alpha \mathrm{j} e^{\mathrm{j}t} + \beta \mathrm{j}^2 e^{\mathrm{j}^2 t} + \gamma e^t \\ f''(t) & = & \alpha \mathrm{j}^2 e^{\mathrm{j}t} + \beta \mathrm{j}^4 e^{\mathrm{j}^2 t} + \gamma e^t \end{cases}$$

Les deux dernières égalités sont conséquence de la première. Donc, en conclusion :

$$f \text{ est solution de } (E_1) \iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \alpha e^{\mathrm{j}t} + \beta e^{\mathrm{j}^2 t} + \gamma e^t,$$

et l'on retrouve bien la description des solutions donnée dans la question **1.3**.

3.

(3.1) Nous allons utiliser la règle de D'Alembert : soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ converge trivialement, et sa somme égale 1. Si $x \neq 0$, alors pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{\left| \frac{x^{3(n+1)}}{(3(n+1))!} \right|}{\left| \frac{x^{3n}}{(3n)!} \right|} = \frac{|x|^{3n+3}}{|x|^{3n}} \frac{(3n)!}{(3n+3)!} = \frac{|x|^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{|x|^3}{27n^3},$$

or : $\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^3}{27n^3} = 0$. On en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left| \frac{x^{3(n+1)}}{(3(n+1))!} \right|}{\left| \frac{x^{3n}}{(3n)!} \right|} = 0 < 1.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ converge (absolument). On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc le rayon de convergence demandé est $+\infty$.

(**3.2**) L'application φ est une somme de série entière définie sur $\mathbb{R}$, donc elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(**3.3**) Une somme de série entière est dérivable terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(3n)\frac{x^{3n-1}}{(3n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}, \tag{1}$$

le terme correspondant à $n = 0$ étant de dérivée nulle, puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(3n-1)\frac{x^{3n-2}}{(3n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!},$$

et enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(3)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(3n-2)\frac{x^{3n-3}}{(3n-2)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!} \overset{[n'=n-1]}{=} \sum_{n'=0}^{+\infty}\frac{x^{3n'}}{(3n')!},$$

c'est-à-dire : $\varphi^{(3)} = \varphi$.

Pour obtenir $\varphi^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on observe que cela dépend de la congruence de k modulo 3 : partant de l'égalité $\varphi^{(3)} = \varphi$, une récurrence immédiate permet d'obtenir : $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(3\ell)} = \varphi$. Donc $\varphi^{(k)} = \varphi$ si k est un multiple de 3.

Si $k \equiv 1 \bmod 3$, alors il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que : $k = 3\ell + 1$. En dérivant l'égalité $\varphi^{(3\ell)} = \varphi$ établie à l'instant, on obtient :

$$\varphi^{(k)} = \varphi^{(3\ell+1)} = \left(\varphi^{(3\ell)}\right)' = \varphi',$$

et de même on obtient $\varphi^{(k)} = \varphi''$ dans le cas où k est congru à 2 modulo 3. En résumé :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!} & \text{si } k \equiv 0 \bmod 3, \\ \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} & \text{si } k \equiv 1 \bmod 3, \\ \varphi''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} & \text{si } k \equiv 2 \bmod 3. \end{cases}$$

(**3.4**) D'après la question précédente, on a : $\varphi^{(3)} = \varphi$. On en déduit que φ est solution de (E_1) ; d'après la question **1.3** ou **2.3**, il existe donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \alpha e^{\mathrm{j}x} + \beta e^{\mathrm{j}^2 x} + \gamma e^{x}.$$

Déterminons les scalaires présents grâce aux valeurs de φ, φ' et φ'' en 0. En dérivant l'égalité ci-dessus, et en l'évaluant en 0, on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\varphi(0) & = & \alpha+\beta+\gamma \\ \varphi'(0) & = & \alpha\mathrm{j}+\beta\mathrm{j}^2+\gamma \\ \varphi''(0) & = & \alpha\mathrm{j}^2+\beta\mathrm{j}^4+\gamma\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}\varphi(0) & = & \alpha+\beta+\gamma, \\ \varphi'(0) & = & \alpha\mathrm{j}+\beta\mathrm{j}^2+\gamma, \\ \varphi''(0) & = & \alpha\mathrm{j}^2+\beta\mathrm{j}+\gamma,\end{array}\right. \tag{2}$$

puisque : $\mathrm{j}^4=\mathrm{j}^3\times\mathrm{j}=\mathrm{j}$. Mais on a aussi, en examinant les termes constants des développements en série entière en 0 de φ, φ' et φ'' que nous avons explicités dans la question précédente :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\varphi(0) & = & 1, \\ \varphi'(0) & = & 0, \\ \varphi''(0) & = & 0.\end{array}\right. \tag{3}$$

En combinant (2) et (3), nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\alpha+\beta+\gamma & = & 1, \\ \alpha\mathrm{j}+\beta\mathrm{j}^2+\gamma & = & 0, \\ \alpha\mathrm{j}^2+\beta\mathrm{j}+\gamma & = & 0,\end{array}\right.$$

c'est-à-dire : (γ,α,β) est solution du système résolu dans la question de cours **2.3**. On en déduit : $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$, et donc, en utilisant le fait que $\mathrm{j}^2=\bar{\mathrm{j}}$ (admis provisoirement) :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \varphi(x)=\frac{e^x+e^{\mathrm{j}x}+e^{\mathrm{j}^2x}}{3}=\frac{e^x+e^{\mathrm{j}x}+e^{\bar{\mathrm{j}}x}}{3}=\frac{e^x+e^{\mathrm{j}x}+\overline{e^{\mathrm{j}x}}}{3}=\frac{e^x+2\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{j}x}\right)}{3},$$

et grâce à la forme algébrique de j, on trouve : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{j}x}\right)=e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$. Ainsi :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \varphi(x)=\frac{1}{3}\left(e^x+2e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right), \tag{4}$$

d'où le résultat.

Voici une démonstration parmi d'autres de l'égalité $\mathrm{j}^2=\bar{\mathrm{j}}$: on a $|\mathrm{j}|^2=\mathrm{j}\cdot\bar{\mathrm{j}}=1$ d'après la question **2.1** de cours, mais on a aussi $\mathrm{j}^3=1$ comme on l'a déjà vu, donc : $\mathrm{j}^3=\mathrm{j}\cdot\bar{\mathrm{j}}$, puis : $\mathrm{j}^2=\bar{\mathrm{j}}$, après division par $\mathrm{j}\neq 0$.

(**3.5**) Faisons le changement d'indice de sommation $n'=n-1$ dans (1). On obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \varphi'(x)=\sum_{n'=0}^{+\infty}\frac{x^{3(n'+1)-1}}{(3(n'+1)-1)!}=\sum_{n'=0}^{+\infty}\frac{x^{3n'+2}}{(3n'+2)!}=\psi(x).$$

Pour répondre à la question de l'énoncé, il suffit donc d'écrire φ' explicitement à l'aide de fonctions usuelles à valeurs réelles. En dérivant l'identité (4), on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \varphi(x)=\frac{1}{3}\left(e^x+2\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)-e^{-\frac{x}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)\right),$$

donc finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \frac{1}{3}\left(e^x - e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)\right).$$

(**3.6**) Il s'agit ici de remarquer que θ est la partie paire de φ. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) + \varphi(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n} + (-x)^{3n}}{(3n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n} + (-1)^{3n}x^{3n}}{(3n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^{3n}}{(3n)!} x^{3n},$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(-1)^{3n} = \left((-1)^3\right)^n = (-1)^n$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + (-1)^{3n} = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que dans la somme ci-dessus, tous les termes d'indices impairs sont nuls, et on ne somme que sur des indices n pairs ; si on les écrit $n = 2\ell$ avec $\ell \in \mathbb{N}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) + \varphi(-x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{2}{(6\ell)!} x^{6\ell} = 2\theta(x).$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \theta(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \left(e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right),$$

ou encore : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\theta(x) = \frac{1}{3}\left(\cosh(x) + \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$, d'où le résultat.

Partie III

1.

(**1.1**) Il s'écrit : $Y' = A_\alpha Y$, *via* une réduction très classique.

(**1.2**) Soit $y \in \mathscr{S}_\alpha$. Montrons que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ on a $y^{(n)} \in \mathrm{C}^\ell(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, par récurrence sur ℓ.
Comme y est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ par définition de $\mathscr{S}_\alpha$, en particulier $y^{(n)}$ est de classe C^0 sur $\mathbb{R}$, donc la propriété voulue est vraie pour $\ell = 0$.
À présent, soit $\ell \in \mathbb{N}$, et supposons que $y^{(n)} \in \mathrm{C}^\ell(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Montrons que $y^{(n)} \in \mathrm{C}^{\ell+1}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Par définition de $\mathscr{S}_\alpha$, on a :

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}.$$

Or $y^{(n)}$ est de classe C^ℓ sur $\mathbb{R}$ par hypothèse de récurrence, donc y est de classe $\mathrm{C}^{\ell+n}$ sur $\mathbb{R}$, et on en déduit que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ l'application $y^{(k)}$ est de classe $\mathrm{C}^{\ell+n-k}$ sur $\mathbb{R}$. En

particulier, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $n-k \geqslant 1$, donc $y^{(k)}$ est en particulier de classe $\mathrm{C}^{\ell+1}$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $y^{(n)}$ s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathrm{C}^{\ell+1}$ sur $\mathbb{R}$, donc est elle-même de classe $\mathrm{C}^{\ell+1}$ sur $\mathbb{R}$; d'où la proposition au rang $\ell+1$.
On a démontré par récurrence que $y^{(n)}$ est de classe C^{ℓ} sur $\mathbb{R}$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que $y^{(n)}$ est de classe C^{∞}. Il en est donc de même de y, d'où le résultat.

(**1.3**) Nous proposons une approche inutilement complexe en apparence, mais qui a l'avantage d'anticiper sur la question suivante. L'application :

$$\Phi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})) & \to & \mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} & \mapsto & x_0 \end{array}\right.$$

est clairement linéaire, donc elle transforme sous-espaces vectoriels (de $\mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$) en sous-espaces vectoriels (de $\mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$). Montrons que si l'on appelle $\mathscr{H}$ l'espace vectoriel des solutions du système matriciel : $X' = A_\alpha X$, alors : $\Phi(\mathscr{H}) = \mathscr{S}_\alpha$.

L'inclusion : $\mathscr{S}_\alpha \subseteq \Phi(\mathscr{H})$ est une traduction du fait que si $y \in \mathscr{S}_\alpha$, alors $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ est solution de $X' = AX$. Nous l'avons établi dans la question **1.1**. Pour montrer l'inclusion réciproque, nous devons démontrer que pour tout $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{H}$ (ici $x_0, \ldots, x_{n-1}$ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ de classe C^{∞}), on a $\Phi(X) = x_0 \in \mathscr{S}_\alpha$. Pour cela, on note que si $X \in \mathscr{H}$ alors $X' = A_\alpha X$ et donc, en identifiant les coefficients dans chaque membre de l'égalité $X' = A_\alpha X$:

$$\left\{\begin{array}{ll} x_0' & = x_1 \\ x_1' & = x_2 \\ & \vdots \\ x_{n-2}' & = x_{n-1} \\ x_{n-1}' & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x_k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = x_0' \\ x_2 & = x_1' = x_0'' \\ & \vdots \\ x_{n-1} & = x_{n-2}' = x_{n-3}'' = \cdots = x_0^{(n-1)} \\ x_{n-1}' & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_0^{(k)} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = x_0' \\ x_2 & = x_0'' \\ & \vdots \\ x_{n-1} & = x_0^{(n-1)} \\ x_0^{(n)} & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x_0^{(k)} \end{array}\right.$$

ce qui démontre que x_0 est solution de l'équation (E_α), c'est-à-dire : $x_0 \in \mathscr{S}_\alpha$. C'est ce qu'on voulait démontrer.
En résumé : $\Phi(\mathscr{H}) = \mathscr{S}_\alpha$, or Φ est linéaire et $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, donc $\mathscr{S}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

(**1.4**) D'après la question précédente, la restriction de l'application Φ à $\mathscr{H}$ définit une application surjective de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{S}_\alpha$, où $\mathscr{H}$ est l'espace vectoriel des solutions du système différentiel $X' = AX$. Cette même restriction est injective : si $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{H}$ vérifie $\Phi(X) = 0$, alors $x_0 = 0$ d'après la définition de Φ, et d'après la question précédente les x_i, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, sont les dérivées successives de x_0, donc l'égalité $x_0 = 0$ implique :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad x_i = x_0^{(i)} = 0,$$

c'est-à-dire : $X = 0$.
On en déduit que Φ induit un isomorphisme de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{S}_\alpha$. Un isomorphisme conserve les dimensions, donc : $\dim(\mathscr{S}_\alpha) = \dim(\mathscr{H})$. Mais d'après le théorème de Cauchy linéaire, l'application $Y \mapsto Y(0)$ définit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels entre $\mathscr{H}$ et $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, donc : $\dim(\mathscr{H}) = \dim(\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})) = n$. On en déduit :

$$\dim(\mathscr{S}_\alpha) = n.$$

Remarque. Dans la question précédente, nous montrons implicitement que l'application réciproque de Φ est : $y \mapsto \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$. On démontre ainsi directement que Φ est bijective.

2. Dans ce cas, l'équation (E_α) est simplement : $y^{(n)} = y$.

3. Soit $r \in \mathbb{C}$. Alors l'application $x \mapsto e^{rx}$ est clairement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et sa n-ième dérivée est : $x \mapsto r^n e^{rx}$. On en déduit qu'elle appartient à S_α si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad r^n e^{rx} = e^{rx},$$

c'est-à-dire si et seulement si $r^n = 1$. On en déduit que les nombres complexes r pour lesquels la fonction $x \mapsto e^{rx}$ appartient à $\mathscr{S}_\alpha$ sont les racines n-ièmes de l'unité :

$$r \in \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

4. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, posons : $r_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi_k(x) = e^{r_k x}$.
D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ l'application ψ_k est une solution de (E_α), c'est-à-dire : $\psi_k \in \mathscr{S}_\alpha$. De plus, d'après la question **3.2** de la partie I, la famille $(\psi_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ est libre. Ainsi il s'agit d'une famille de n fonctions dans $\mathscr{S}_\alpha$, linéairement indépendantes, et d'après la question **1.4** on a $\dim(\mathscr{S}_\alpha) = n$: on en déduit qu'il s'agit d'une famille libre de cardinal maximal, c'est donc une base de $\mathscr{S}_\alpha$.

5.

(**5.1**) La linéarité de d est évidente : on sait que la dérivation est une opération linéaire. Il s'agit de prouver qu'elle définit un endomorphisme de $\mathscr{S}_\alpha$; montrons donc que pour tout $y \in \mathscr{S}_\alpha$, on a : $d(y) \in \mathscr{S}_\alpha$. Mais il suffit de faire cette vérification sur une base de $\mathscr{S}_\alpha$, et on en connaît une grâce à la question précédente : en reprenant les notations de la question précédente, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a : $d(\psi_k) = \psi_k' = r_k\psi_k \in \mathscr{S}_\alpha$ car $\psi_k \in \mathscr{S}_\alpha$ et $\mathscr{S}_\alpha$ est un espace vectoriel (donc est stable par multiplication externe).

Puisque l'image par d de toute fonction d'une base de $\mathscr{S}_\alpha$ est dans $\mathscr{S}_\alpha$, on en déduit par linéarité que $\mathscr{S}_\alpha$ est stable par d, donc d définit un endomorphisme de cet espace vectoriel.

(**5.2**) Toujours avec les notations de la question **4**, La matrice de d relativement à la base $(\psi_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est immédiatement :

$$\begin{pmatrix} r_0 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & r_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit : $\det(d) = \prod_{i=0}^{n-1} r_i \neq 0$ (en effet une racine de l'unité est nécessairement non nulle). Par conséquent d est bijectif.

(**5.3**) Dans la question précédente, nous avons montré que la matrice de d dans une certaine base de $\mathscr{S}_\alpha$ est diagonale : on en déduit que d est diagonalisable.

Partie IV

L'encadré de l'énoncé n'est pas clair sur la question, mais je présume qu'on a ici $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$, de sorte que l'équation différentielle $y^{(2p)} = y$ soit en fait (E_α), et que $\mathscr{S}_\alpha$ soit l'espace vectoriel des solutions de cette équation différentielle particulière.

1. Il s'agit de démontrer que si f et g sont dans $\mathscr{S}_\alpha$, alors l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|}\left(f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t)\right) \mathrm{d}t$$

converge.

Pour cela, on note que si f et g sont dans $\mathscr{S}_\alpha$, alors l'application :

$$\varphi_{f,g} : t \mapsto e^{-3|t|}\left(f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t)\right)$$

est continue sur $\mathbb{R}$ (vérification facile), donc est intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$: les problèmes d'intégrabilité ne se posent qu'au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$ on a $e^{-3|t|} = e^{-3t}$ et donc, d'après l'indication de l'énoncé :

$$\varphi_{f,g}(t) = O\left(e^{-3t}e^te^t\right) = O\left(e^{-t}\right),$$

or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge, donc par comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_{f,g}(t)\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge (*a priori* $\varphi_{f,g}$ n'a aucune raison d'être positive, d'où le recours à la convergence absolue).
Au voisinage de $-\infty$ on a $e^{-3|t|} = e^{3t}$ et donc, d'après l'indication de l'énoncé :

$$\varphi_{f,g}(t) = O\left(e^{3t}e^{-t}e^{-t}\right) = O\left(e^{t}\right),$$

or l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{t}\mathrm{d}t$ converge (le changement de variable $u = -t$ permet de démontrer que cette intégrale est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$; on peut aussi démontrer la convergence du fait que ses primitives aient une limite finie en $-\infty$), donc par comparaison des intégrales de fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \varphi_{f,g}(t)\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge.
Puisque les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \varphi_{f,g}(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_{f,g}(t)\mathrm{d}t$ convergent, l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{f,g}(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|}\left(f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t)\right)\mathrm{d}t$$

converge également, donc l'expression $(f \mid g)$ de l'énoncé a bien un sens.

2. L'application $(f, g) \mapsto (f \mid g)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chaque variable du fait de la linéarité de la dérivation (p fois) et de l'intégration, symétrique du fait de la commutativité du produit dans $\mathbb{R}$. Il reste à vérifier qu'il s'agit d'une forme définie positive.
Pour cela, soit $f \in \mathscr{S}_\alpha$. Alors :

$$(f \mid f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|}\left((f(t))^2 + (f^{(p)}(t))^2\right)\mathrm{d}t.$$

L'exponentielle est positive (et non nulle) sur $\mathbb{R}$, et un carré de nombre réel est positif, donc l'intégrande ci-dessus est positif sur $\mathbb{R}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit : $(f \mid f) \geqslant 0$; d'où la positivité de $(\cdot \mid \cdot)$. De plus, si $(f \mid f) = 0$, alors l'application $t \mapsto e^{-3|t|}\left((f(t))^2 + (f^{(p)}(t))^2\right)$ est une application CONTINUE, positive et d'intégrale nulle : ce n'est possible que si elle est identiquement nulle. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{-3|t|}\left((f(t))^2 + (f^{(p)}(t))^2\right) = 0.$$

Après multiplication par $e^{3|t|}$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (f(t))^2 + (f^{(p)}(t))^2 = 0.$$

Comme le carré d'un nombre réel est positif, nous avons là une somme de deux nombres réels positifs dont la somme est nulle ; ce n'est possible que s'ils sont tous les deux nuls. En particulier :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = 0,$$

donc $f = 0$: nous avons bien démontré que $(\cdot \mid \cdot)$ est une forme définie.

En conclusion, l'application $(\cdot \mid \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire.

3. Soient $f \in S_1$ et $g \in S_2$. Alors : $f^{(p)} = f$ et $g^{(p)} = -g$. En dérivant p fois ces deux égalités, on obtient : $f^{(2p)} = f^{(p)} = f$, donc $f \in S_\alpha$, et de même : $g^{(2p)} = -g^{(p)} = -(-g) = g$, donc $g \in S_\alpha$. Ceci montre que $(f \mid g)$ est correctement défini (on a montré en passant que $S_1 \subseteq \mathscr{S}_\alpha$ et $S_2 \subseteq \mathscr{S}_\alpha$). De plus, toujours si $f \in S_1$ et $g \in S_2$:

$$(f \mid g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|}\left(f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t)\right)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-3|t|}\left(f(t)g(t) - f(t)g(t)\right)}_{=0}\mathrm{d}t = 0.$$

Donc f et g sont orthogonaux pour tous $f \in S_1$ et $g \in S_2$. Ceci démontre que S_1 et S_2 sont orthogonaux. De plus, d'après la question **1.4** de la partie III, on a $\dim(S_1) = \dim(S_2) = p$ et $\dim(S_\alpha) = n = 2p$, donc :

$$\dim(S_1) + \dim(S_2) = 2p = \dim(S_\alpha),$$

ce qui démontre que S_1 et S_2 sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{S}_\alpha$.

4.

(**4.1**) Si l'on veut conjecturer le résultat attendu, on peut s'inspirer de ce qui fut trouvé dans la question **3.3** de la partie II.

En tant que somme de série entière, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme. On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(4)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(4n)(4n-1)(4n-2)(4n-3)\frac{x^{4n-4}}{(4n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!} \overset{[n'=n-1]}{=} \sum_{n'=0}^{+\infty}\frac{x^{4n'}}{(4n')!} = f(x).$$

Si l'on prend $\alpha = (1,0,0,0) \in \mathbb{C}^4$, on a donc $f \in \mathscr{S}_\alpha$.

(**4.2**) Notons que la décomposition d'une fonction dans la somme directe $\mathscr{S}_\alpha = S_1 \oplus S_2$ est explicite. En effet, l'application linéaire $s : y \mapsto y^{(p)}$ définit clairement une symétrie de l'espace vectoriel $\mathscr{S}_\alpha$ (pour tout $y \in \mathscr{S}_\alpha$ on a : $s^2(y) = y^{(2p)} = y$, donc $s^2 = \mathrm{Id}$), par rapport à S_1 et parallèlement à S_2 (en effet, $s(y) = y$ si et seulement si $y^{(p)} = y$, et $s(y) = -y$ si et seulement si $y^{(p)} = -y$). Connaissant les différentes propriétés d'une symétrie, on en déduit que pour tout $y \in \mathscr{S}_\alpha$, on a : $y = \frac{1}{2}(y + s(y)) + \frac{1}{2}(y - s(y))$, avec $\frac{1}{2}(y + s(y)) \in S_1$ et $\frac{1}{2}(y - s(y)) \in S_2$; cela nous donne les projetés (orthogonaux) de toute fonction de $\mathscr{S}_\alpha$ sur S_1 et S_2 respectivement.

Plaçons-nous dans le cas particulier $n = 4$ (donc $p = 2$). D'après ce qui précède, le projeté orthogonal de f sur S_1 est $\frac{1}{2}(f + s(f)) = \frac{1}{2}(f + f'')$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) + f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!} \overset{[n'=n-1]}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!} + \sum_{n'=0}^{+\infty}\frac{x^{4n'+2}}{(4n'+2)!} = \sum_{\substack{m=0\\ m\equiv 0 \text{ ou } 2 \bmod 4}}^{+\infty}\frac{x^m}{m!},$$

et $m \in \mathbb{N}$ est congru à 0 ou 2 modulo 4 si et seulement s'il est pair ; on peut dans ce cas l'écrire $m = 2\ell$ avec $\ell \in \mathbb{N}$. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!} = \cosh(x).$$

Ainsi le projeté orthogonal de f sur S_1 est $\frac{1}{2}(f + f'') = \frac{1}{2}\cosh$. De même, mais avec un peu plus de flair, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) - f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n} \frac{x^{2\cdot 2n}}{(2\cdot 2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n+1} \frac{x^{2\cdot(2n+1)}}{(2\cdot(2n+1))!} \\ &= \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ pair}}}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ impair}}}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \\ &= \cos(x), \end{aligned}$$

donc le projeté orthogonal de f sur S_2 est $\frac{1}{2}(f - f'') = \frac{1}{2}\cos$.

(4.3) On a :

$$f = \frac{1}{2}(f + f'') + \frac{1}{2}(f - f'') = \frac{1}{2}(\cosh + \cos).$$