CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2   PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Dans tout le problème, I est l'intervalle $[1,+\infty[$.

On note $\mathscr{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles et $\mathscr{E}_1 = \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur I à valeurs réelles.

Lorsque V est un endomorphisme de $\mathscr{E}$, on rappelle que $V^0 = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ et que si n est un entier naturel non nul, $V^n = \underbrace{V \circ ... \circ V}_{n}$

Soit a un ***réel strictement positif***.

Pour tout f de $\mathscr{E}$, on considère l'équation différentielle sur I :

$$y' - a\,y + f = 0 \quad (E_a^f)$$

et on note $\mathscr{S}_a^f$ l'ensemble de ses solutions sur I.

Partie 1

1. Etude de l'équation (E_a^f).

1.1. Soient $f \in \mathscr{E}$ et $z \in \mathscr{E}_1$.

Montrer que z est solution de (E_a^f) si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x \in I$, $z(x) = \mathrm{e}^{ax}\left(K - \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$

1.2. Prouver que s'il existe une solution de (E_a^f) qui soit bornée sur I, alors celle-ci est unique.

1.3. Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

1.4. Démontrer que la fonction $F : x \in I \mapsto \mathrm{e}^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique solution de (E_a^f) bornée sur I.

On définit ainsi une application U_a de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à toute fonction f de $\mathscr{E}$ associe la fonction $F = U_a(f)$ ainsi obtenue.

2. Etude de quelques propriétés de U_a.

2.1. Expliciter $U_a(f)$ lorsque f est la fonction constante égale à 1.

2.2. Vérifier que U_a est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

2.3.

2.3.a. L'endomorphisme U_a est-il injectif ?

2.3.b. Montrer que pour tout f élément de $\mathscr{E}$, $U_a(f) \in \mathscr{E}_1$.

2.3.c. L'endomorphisme U_a est-il surjectif ?

2.4. **On suppose dans cette question et uniquement dans cette question que $a = 1$.**

Montrer que le sous-espace de $\mathscr{E}$: $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ est stable par U_1. En donner une base $\mathscr{B}$.

Ecrire la matrice M de la restriction de U_1 à $\mathscr{F}$ dans cette base.

Prouver que $M = \lambda\,\Omega$ où λ est un réel positif et Ω une matrice de rotation dont on déterminera l'angle.

3. **On revient au cas général.**

3.1. Pour $r \in [0,+\infty[$, on note f_r la fonction de $\mathscr{E}$ définie par : $x \mapsto \mathrm{e}^{-rx}$.

Déterminer $U_a(f_r)$.

3.2. Soit $\lambda \in \left]0, \dfrac{1}{a}\right]$. Le réel λ est-il valeur propre de l'endomorphisme U_a ?

3.3. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(U_a^n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ sur I.

3.4. Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} U_a^n(f_r)$ sur I et déterminer sa somme lorsqu'elle converge.

4. Prouver que l'on a, pour tout élément f de $\mathscr{E}$:

$$\forall\, x \in I, \quad U_a(f)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\, f(x+t)\,\mathrm{d}t$$

5. Pour tout entier naturel k, on note g_k la fonction de $\mathscr{E}$ définie par : $g_k(x) = \mathrm{e}^{-x}\,x^k$ et on note $G_k = U_a(g_k)$.

Pour tout entier naturel p, on note $\mathscr{F}_p = \mathrm{Vect}(g_0, ..., g_p)$

5.1. Donner une base $\mathscr{B}_p$ de $\mathscr{F}_p$.

5.2. Vérifier que $\mathscr{F}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ stable par U_a.

5.3. Calculer le déterminant de la restriction de U_a à $\mathscr{F}_p$.

6. Prouver que l'on a : $\forall\, f \in \mathscr{E}$, $|\,U_a(f)\,| \leqslant U_a(\,|f|\,)$.

7. Soit f dans $\mathscr{E}$ à valeurs positives. En est-il de même pour $U_a(f)$?

8. Soit f dans $\mathscr{E}$ décroissante. Prouver que $a\,U_a(f) \leqslant f$ puis que $U_a(f)$ est décroissante.

9. On note :

- $\mathscr{H}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{E}$ de classe C^1 sur I et telles que f' est bornée sur I.
- D l'opérateur de dérivation sur $\mathscr{H}$.

Soit $f \in \mathscr{H}$.

9.1. Montrer que l'on a : $U_a(f') - a\,U_a(f) + f = 0$.

9.2. En déduire que U_a et D commutent dans $\mathscr{H}$.

10. Soit $f \in \mathscr{E}$. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_a^{n+1}(f)$ est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n\,!}\,\mathrm{e}^{-at}\,f(t)\,\mathrm{d}t$.

On pourra procéder par intégration par parties.

11. Soit $f \in \mathscr{E}$. **On suppose dans cette question et uniquement dans cette question que $a > 1$.**

11.1. Soient $x \in I$ et t un réel supérieur ou égal à x. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(t-x)^n}{n\,!}\,\mathrm{e}^{-at}\,f(t)\right)$.

11.2. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} U_a^n(f)$ est simplement convergente sur I. On notera S sa somme.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat valable pour tout entier naturel n : $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = n\,!$

11.3. Démontrer qu'il existe un réel $b > 0$ tel que $S = U_b(f)$.

Partie 2

On admettra que :

si u et v sont deux fonctions continues sur I à valeurs réelles telles que v est à valeurs positives et $\displaystyle\int_1^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}t$ converge

$$\text{si } u = \underset{+\infty}{o}(v), \text{ alors } \int_x^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

1. Soient f et g dans $\mathscr{E}$ avec g à valeurs positives et $f = \underset{+\infty}{o}(g)$. Montrer que $U_a(f) = \underset{+\infty}{o}(U_a(g))$.

2. Soient f et g dans $\mathscr{E}$, g à valeurs positives telles que $f \underset{+\infty}{\sim} g$. Montrer que $U_a(f) \underset{+\infty}{\sim} U_a(g)$.

3. Soit $f \in \mathscr{E}$ admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que $U_a(f)$ admet aussi une limite finie en $+\infty$.

On pourra commencer par étudier le cas où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

4. Pour tout réel strictement positif ω, on note pour toute la suite du problème, h_ω la fonction de $\mathscr{E}$ qui à $t \in I$ associe $\dfrac{1}{t^\omega}$ et $H_\omega = U_a(h_\omega)$.

4.1. Montrer que l'on a pour tout $x \in I$: $H_\omega(x) = \dfrac{h_\omega(x)}{a} - \dfrac{\omega}{a} H_{\omega+1}(x)$

4.2. En déduire que : $H_\omega(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{h_\omega(x)}{a}$.

5.

5.1. Montrer que pour tout $x \in I$: $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k\,.\,k\,!}\,(x^k - 1)$.

5.2. En déduire que l'on a : $\displaystyle H_1(x) = \mathrm{e}^{ax}\left(-\ln x - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k\,.\,k\,!}\,(x^k - 1) + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t\right)$

Partie 3

On reprend les fonctions f_r définies à la question **3.1.** de la partie **1** avec maintenant $\underline{r > 0}$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} U_a(f_r)(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

2. Pour les fonctions h_ω definies à la question **4.** de la partie **2**, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} H_\omega(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

3. Soit $f \in \mathscr{E}$, à valeurs positives et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On note $\varphi : x \in I \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $F = U_a(f)$ et $\Phi : x \in I \mapsto \displaystyle\int_1^x F(t)\,\mathrm{d}t$.

3.1. Vérifier que l'on a pour tout $x \in I$: $\Phi'(x) - a\,\Phi(x) + \varphi(x) - F(1) = 0$.

3.2. Prouver que $\varphi \in \mathscr{E}$.

3.3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

4. Soit $f \in \mathscr{E}$ intégrable sur I.

Montrer que $U_a(f)$ est aussi intégrable sur I.

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1147 – D'après documents fournis