E3A PSI 2018 mathématiques 2

—

corrigé

Partie 1

Dans toute cette partie, on pose, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f_a : x \mapsto e^{-ax}$ (notation introduite en **3.1** du sujet).

1.1. En multipliant (E_a^f) par f_a, et puisque $f_a' = -af_a$, on a :

$$z' - az = -f \iff f_a z' - af_a z = -f_a f \iff (f_a z)' = -f_a f$$

donc z est solution de (E_a^f) si et seulement si $f_a z$ est une primitive de $-f_a f$.
Or par le théorème fondamental du calcul intégral, la fonction $H : x \mapsto -\int_1^x f_a f$ est une primitive de $-f_a f$ sur l'intervalle I, et les primitives de $-f_a f$ sur I sont égales entre elles à une constante près.
Donc z est solution de (E_a^f) si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $f_a z = H + K$, i.e. $z = (H+K)f_{-a}$, qui est le résultat voulu.

1.2. Si z_1 et z_2 sont deux solutions de (E_a^f), alors par **1.1**, il existe $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tels que $z_1 = (H + K_1)f_{-a}$ et $z_2 = (H + K_2)f_{-a}$, donc tels que $z_1 - z_2 = (K_1 - K_2)f_{-a}$.
Si de plus z_1 et z_2 sont bornées sur I, alors $z_1 - z_2$ l'est aussi, or f_{-a} ne l'est pas (car on a $a > 0$, donc f_a tend vers $+\infty$ en $+\infty$), donc nécessairement $K_1 = K_2$, i.e. $z_1 = z_2$.
Ainsi si (E_a^f) admet une solution bornée sur I, alors celle-ci est unique.

1.3. Par hypothèses sur f, la fonction $f_a f$ est continue sur I et dominée par f_a en $+\infty$. Or f_a est intégrable sur I car $a > 0$ (intégrales de référence), donc par comparaison, $f_a f$ l'est aussi.
Autrement dit, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$ converge absolument, donc elle converge.

1.4.
- La fonction F est bien une solution de (E_a^f) sur I puisqu'elle est de la forme donnée en **1.1**, pour $K = \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$ (par relation de Chasles), qui est bien une constante réelle par **1.3**.
- Soit M un majorant de $|f|$ sur I (M existe par hypothèse sur f). Alors par croissance de l'intégrale, $\forall\, x \in I$, $|F(x)| \leqslant e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}|f(t)|\,dt \leqslant Me^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}\,dt$. Or $\int_x^{+\infty} e^{-at}\,dt = \left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_x^{+\infty} = \frac{e^{-ax}}{a}$.
  Donc $\forall\, x \in I$, $|F(x)| \leqslant \frac{M}{a}$. Ainsi, la fonction F est bornée sur I.

On a montré que F est une solution bornée de (E_a^f) sur I, et par **1.2**, elle est unique.

2.1. Par la formule de **1.4** ou de façon évidente au vu de l'équation (E_a^1), la solution bornée $U_a(1)$ de (E_a^1) est la fonction constante égale à $\frac{1}{a}$.

2.2.
- Pour tout $f \in \mathscr{E}$, la fonction $U_a(f)$ est bornée et continue (même dérivable) sur I par construction (cf. **1.1** et **1.4**). Donc l'application U_a va de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$.
- L'application U_a est linéaire par linéarité de l'intégrale. En effet, pour tous $f, g \in \mathscr{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
  $\forall\, x \in I$, $U_a(\lambda f + g)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} f_a \times (\lambda f + g) = e^{ax} \int_x^{+\infty} (\lambda f_a f + f_a g) = \lambda e^{ax} (\int_x^{+\infty} f_a f + \int_x^{+\infty} f_a g) = \lambda U_a(f)(x) + U_a(g)(x)$, donc $U_a(\lambda f + g) = \lambda U_a(f) + U_a(g)$.

On a montré que U_a est linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, i.e. que U_a est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

2.3. **a.** Soit $f \in \mathscr{E}$. Par définition, $U_a(f)$ est une solution de (E_a^f), donc $U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0$. Ainsi si $U_a(f) = 0$ (fonction nulle sur I), alors $U_a(f)' = 0$, et donc $f = 0$.
Cela montre que $\mathrm{Ker}(U_a) = \{0\}$, i.e. que U_a est injectif.

b. Pour tout $f \in \mathscr{E}$, $U_a(f)$ est dérivable sur I puisque c'est une solution sur I de l'équation différentielle d'ordre un (E_a^f), et $U_a(f)' = aU_a(f) - f$ est continue comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont. Donc $U_a(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, i.e. $U_a(f) \in \mathscr{E}_1$.

c. On vient de montrer que $\mathrm{Im}(U_a) \subset \mathscr{E}_1$. Ainsi, aucun élément de $\mathscr{E} \setminus \mathscr{E}_1$ n'a d'antécédent par U_a. Comme l'ensemble $\mathscr{E} \setminus \mathscr{E}_1$ est non vide (il contient par exemple la fonction f définie par $f(x) = x$ sur $[1; 2]$ et $f(x) = 2$ sur $[2; +\infty[$, qui est continue et bornée sur I, mais pas dérivable en 2), cela montre que U_a n'est pas surjectif.

2.4.
- Pour montrer que $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ est stable par U_1, il suffit, vu la linéarité de U_1, de montrer que $U_1(\sin)$ et $U_1(\cos)$ appartiennent à $\mathscr{F}$.
  <u>*Méthode 1.*</u> Avec la formule d'Euler $\cos(t) + i\sin(t) = e^{it}$, valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a pour $x \in I$:

$$\begin{array}{rcl} U_1(\cos)(x) + i\,U_1(\sin)(x) & = & e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t + i\,e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ & = & e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}e^{it}\,\mathrm{d}t = e^x \int_x^{+\infty} e^{(i-1)t}\,\mathrm{d}t \\ & = & e^x\big[\frac{e^{(i-1)t}}{i-1}\big]_x^{+\infty} = e^x\frac{e^{(i-1)x}}{1-i} = \frac{e^{ix}}{1-i} = \frac{1}{2}e^{ix}(1+i) \\ & = & \frac{1}{2}(\cos(x)-\sin(x)) + \frac{i}{2}(\cos(x)+\sin(x)) \end{array}$$

On en déduit par unicité des écritures algébriques des nombres complexes que $U_1(\cos) = \frac{1}{2}(\cos - \sin)$ et $U_1(\sin) = \frac{1}{2}(\cos + \sin)$. D'où le résultat voulu.

Méthode 2. Par intégrations par parties dans lesquelles tous les termes convergent, on a pour $x \in I$:

$*$ $U_1(\sin)(x) = e^x\big(\big[-e^{-t}\sin(t)\big]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t\big) = \sin(x) + U_1(\cos)(x)$, et de même,

$*$ $U_1(\cos(x) = \cdots = \cos(x) - U_1(\sin)(x)$.

On en déduit que $2\,U_1(\sin) = \sin + \cos$ et $2\,U_1(\cos) = \cos - \sin$.

Conclusion. Ainsi $U_1(\cos)$ et $U_1(\sin)$ appartiennent à $\mathscr{F}$, et donc $\mathscr{F}$ est stable par U_1.

- La famille $(\sin, \cos)$ est évidemment libre (car les fonctions sin et cos ne sont pas proportionnelles) et génératrice de $\mathscr{F}$ (par définition de $\mathscr{F}$), donc la famille $(\sin, \cos)$ est une base de $\mathscr{F}$.
- Les calculs du premier point montrent que la matrice, dans la base $(\sin, \cos)$, de l'endomorphisme de $\mathscr{F}$ induit par U_1, est la matrice :

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}.$$

Donc M est bien de la forme $\lambda\Omega$ où $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ et Ω est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans le plan euclidien orienté usuel.

Remarques (problème d'énoncé).

— *En prenant la base* $(\cos, \sin)$*, on trouverait un angle de* $-\frac{\pi}{4}$.

— *Pire : en prenant une base plus exotique, comme* $(\sin, 2\cos)$*, ou* $(\sin, \sin + \cos)$*, la matrice* M *n'est pas de la forme* $\lambda\Omega$ *souhaitée ...*

3.1. Pour tout $x \in I$, $U_a(f_r)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-(a+r)t}\,\mathrm{d}t = e^{ax}\big[\frac{e^{-(a+r)t}}{-(a+r)}\big]_x^{+\infty} = e^{ax}\frac{e^{-(a+r)x}}{a+r} = \frac{e^{-rx}}{a+r} = \frac{1}{a+r}f_r(x)$.

Donc $U_a(f_r) = \frac{1}{a+r}f_r$.

3.2. Tout $\lambda \in]0; \frac{1}{a}]$ est de la forme $\lambda = \frac{1}{a+r}$ pour $r = \frac{1}{\lambda} - a \geqslant 0$, et par **3.1**, on a alors $U_a(f_r) = \lambda f_r$.

Comme $f_r \neq 0$, cela montre qu'un tel λ est valeur propre de U_a.

3.3. Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_a^n(f_r) = \frac{1}{(a+r)^n}f_r$.

Or $\frac{1}{a+r} > 0$ et pour tout $x \in I$, $f_r(x) \neq 0$, on en déduit que :

- si $\frac{1}{a+r} < 1$, i.e. si $a + r > 1$, alors la suite $(U_a^n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 (fonction nulle),
- si $a + r = 1$, alors la suite $(U_a^n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à f_r, donc converge simplement vers f_r,
- si $\frac{1}{a+r} > 1$, i.e. si $a + r < 1$, alors la suite $(U_a^n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

3.4. Vu **3.3**, la série $\sum U_a^n(f_r)$ converge simplement sur I si et seulement si $\frac{1}{a+r} < 1$, i.e. $a + r > 1$.

Le cas échéant, on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} U_a^n(f_r) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{a+r})^n f_r = \frac{1}{1-\frac{1}{a+r}}f_r = \frac{a+r}{a+r-1}f_r$.

4. Soit $x \in I$. Le changement de variable $u = t - x$ est valide dans l'intégrale définissant $U_a(f)(x)$ puisque la fonction affine $t \mapsto t - x$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]x; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$, et donne :

$$U_a(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t = e^{ax}\int_0^{+\infty} e^{-a(x+u)}f(x+u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-au}f(x+u)\,\mathrm{d}u.$$

C'est le résultat voulu (en remplaçant u par t).

5.1. Montrons que la famille $\mathscr{B}_p = (g_0, \dots, g_p)$ est libre. Si $(\lambda_0, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ est tel que $\sum_{k=0}^p \lambda_k g_k = 0$ (fonction nulle sur I), alors pour tout $x \in I$, $\sum_{k=0}^p \lambda_k x^k e^{-x} = 0$, et donc $\sum_{k=0}^p \lambda_k x^k = 0$ puisque $e^{-x} \neq 0$. Ainsi le polynôme $\sum_{k=0}^p \lambda_k X^k$ admet une infinité de racines (car $I = [1; +\infty[$ est infini), donc c'est le polynôme nul, i.e. $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.

Ainsi $\mathscr{B}_p$ est libre, et comme elle engendre $\mathscr{F}_p$ par définition, c'en est une base.

5.2. Comme en **2.4**, pour montrer que $\mathscr{F}_p = \mathrm{Vect}(g_0, \dots, g_p)$ est stable par U_a, il suffit, vu la linéarité de U_a, de montrer que pour tout $k \in [\![0; p]\!]$, $U_a(g_k) \in \mathscr{F}_p$. Or pour tout $x \in I$, on a par la formule de **4** :

$$\begin{array}{rcl} U_a(g_k)(x) & = & \int_0^{+\infty} e^{-at}g_k(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-(x+t)}(x+t)^k\,\mathrm{d}t \\ & = & e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t}\sum_{i=0}^k \binom{k}{i}x^i t^{k-i}\,\mathrm{d}t \quad \text{par la formule du binôme,} \\ & = & \sum_{i=0}^k e^{-x}x^i\binom{k}{i}\int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t}t^{k-i}\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale.} \end{array}$$

Autrement dit, $U_a(g_k)=\sum_{i=0}^{k}\lambda_{i,k}g_i$ où $\lambda_{i,k}=\binom{k}{i}\int_0^{+\infty}e^{-(a+1)t}t^{k-i}\,\mathrm{d}t$.
Ainsi pour tout $k\in[\![0;p]\!]$, $U_a(g_k)\in\mathscr{F}_p=\mathrm{Vect}(g_0,\dots,g_p)$, donc $\mathscr{F}_p$ est stable par U_a.

5.3. Les calculs faits en **5.2** montrent que la matrice, dans la base $(g_0,\dots,g_p)$, de l'endomorphisme de $\mathscr{F}_p$ induit par U_a, est triangulaire supérieure, et a pour coefficients diagonaux les $\lambda_{k,k}=\int_0^{+\infty}e^{-(a+1)t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a+1}$, pour $k\in[\![0;p]\!]$. Son déterminant, qui est le déterminant demandé, est donc $\prod_{k=0}^{p}\lambda_{k,k}=\frac{1}{(a+1)^{p+1}}$.

6. Pour tout $f\in\mathscr{E}$, on a $|f|\in\mathscr{E}$, de sorte que $U_a(f)$ et $U_a(|f|)$ sont bien définis. Et par croissance de l'intégrale, on a alors, pour tout $x\in I$, $|U_a(f)(x)|=|e^{ax}\int_x^{+\infty}e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t|\leqslant e^{ax}\int_x^{+\infty}e^{-at}|f(t)|\,\mathrm{d}t=U_a(|f|)(x)$.
Donc $|U_a(f)|\leqslant U_a(|f|)$.

7. Si f est positive, alors de façon évidente au vu des formules définissant $U_a(f)$ en **1.4** ou en **4**, on a par positivité de l'intégrale, $\forall\,x\in I$, $U_a(f)(x)\geqslant 0$. Donc si f est positive, il en est de même pour $U_a(f)$.

8. On suppose f décroissante.

- Alors pour tous $x\in I$ et $t\geqslant 0$, on a $f(x+t)\leqslant f(x)$, donc $e^{-at}f(x+t)\leqslant e^{-at}f(x)$, et donc par croissance de l'intégrale avec la formule vue en **4**, $U_a(f)(x)\leqslant f(x)\int_0^{+\infty}e^{-at}\,\mathrm{d}t=\frac{f(x)}{a}$.
Puisque $a>0$, on a donc $\forall\,x\in I$, $aU_a(f)(x)\leqslant f(x)$, i.e. $aU_a(f)\leqslant f$.
- Par définition, $U_a(f)$ est une solution de (E_a^f), donc $U_a(f)'-aU_a(f)+f=0$. Ainsi $U_a(f)'=aU_a(f)-f\leqslant 0$ par le point précédent, donc $U_a(f)$ est décroissante.

9.1. L'hypothèse $f\in\mathscr{H}$ implique $f'\in\mathscr{E}$, de sorte que $U_a(f')$ est bien défini.
Alors par intégration par parties dans laquelle tous les termes convergent, on a pour $x\in I$:

$$U_a(f')(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty}e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t=e^{ax}\big[e^{-at}f(t)\big]_x^{+\infty}+ae^{ax}\int_x^{+\infty}e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t=-f(x)+aU_a(f)(x).$$

Ainsi $U_a(f')-aU_a(f)+f=0$.

9.2. Comme $U_a(f)$ est une solution de (E_a^f), on a aussi $U_a(f)'-aU_a(f)+f=0$, et donc vu **9.1**, $U_a(f)'=U_a(f')$.
Autrement dit, $\forall\,f\in\mathscr{H}$, $D\circ U_a(f)=U_a\circ D(f)$, i.e. U_a et D commutent dans $\mathscr{H}$.

10. On va montrer par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n:\forall\,f\in\mathscr{E},\ \forall\,x\in I,\ U_a^{n+1}(f)(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t$.

- La propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie par définition de U_a (cf. **1.4**).
- Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Fixons $f\in\mathscr{E}$ et $x\in I$. En appliquant $\mathscr{P}_n$ à la fonction $U_a(f)$, on a :

$$U_a^{n+2}(f)(x)=U_a^{n+1}(U_a^n(f))(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}U_a(f)(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or la fonction $g:t\mapsto e^{-at}U_a(f)(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et admet pour dérivée $g':t\mapsto -e^{-at}f(t)$ puisque $U_a(f)$ est solution de (E_a^f) (cf. calculs faits en **1.1**).
Une intégration par parties donne alors, sous réserve de convergence de l'un des deux termes de droite :

$$\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}U_a(f)(t)\,\mathrm{d}t=\Big[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-at}U_a(f)(t)\Big]_x^{+\infty}+\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or le terme entre crochets converge vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées (car $U_a(f)$ est bornée), et vaut 0 en 0. On en déduit que la dernière intégrale converge, et on a alors, en multipliant par e^{ax} :

$$U_a^{n+2}(f)(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t$$

qui est le formule voulue au rant $n+1$. On a montré que si $\mathscr{P}_n$ est vraie, alors $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est aussi.
- On conclut par principe de récurrence que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$, i.e. que :

$$\forall\,f\in\mathscr{E},\ \forall\,n\in\mathbb{N},\ U_a^{n+1}(f):x\mapsto e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

11.1. La série exponentielle $\sum\frac{(t-x)^n}{n!}$ converge et a pour somme e^{t-x}, donc la série proposée converge et a pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)=e^{t-x}e^{-at}f(t)=e^{-x}e^{(1-a)t}f(t).$$

11.2. Soit $x\in I$. Il s'agit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}U_a^{n+1}(f)(x)$ converge et de calculer sa somme $S(x)$.
Vu **10**, il s'agit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)\,dt$ converge et de calculer sa somme $e^{-ax}S(x)$.
On va pour cela utiliser le théorème d'intégration terme à terme :

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_n:t\mapsto\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)$ est continue (par morceaux) sur $[x;+\infty[$.
- Par **11.1**, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[x;+\infty[$, et sa somme $F:t\mapsto e^{-x}e^{(1-a)t}f(t)$ est continue (par morceaux) sur $[x;+\infty[$.

- Soit M un majorant de $|f|$ sur I. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [x;+\infty[$, on a $|f_n(t)| \leqslant \frac{M}{n!}t^n e^{-at}$, et la fonction $g_n : t \mapsto t^n e^{-at}$ est intégrable sur $[x;+\infty[$, puisque dominée en $+\infty$ par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ par croissances comparées.
  Donc f_n est intégrable sur $[x;+\infty[$, et $\int_x^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{n!}\int_x^{+\infty} t^n e^{-at}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{n!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-at}\,\mathrm{d}t$.
  Or avec l'indication et en posant $u = at$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^n}\int_0^{+\infty}(at)^n e^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^{n+1}}\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{n!}{a^{n+1}}$.
  On a donc $\int_x^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{a^{n+1}}$. Or la série géométrique $\sum \frac{1}{a^{n+1}}$ converge puisque $a > 1$, donc par comparaison, la série de terme général $\int_x^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Le théorème de d'intégration terme à terme s'applique donc et montre que la fonction F est intégrable sur $[x;+\infty[$, que la série $\sum \int_x^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_x^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t = e^{-x}\int_x^{+\infty} e^{(1-a)t}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En multipliant par $e^a x$, on conclut que la série $\sum_{n\geqslant 0} U_a^{n+1}(f)(x)$ converge et a pour somme :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_a^{n+1}(f)(x) = e^{(a-1)x}\int_x^{+\infty} e^{(1-a)t}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

11.3. La formule obtenue ci-dessus montre que $S = U_b(f)$ pour $b = a - 1 > 0$.

Remarque. On peut illustrer ce résultat avec l'exemple traité en **3.4**. En effet pour $f = f_r$ et $a + r > 1$, on a montré que $\sum_{n=0}^{+\infty} U_a^n(f_r) = \frac{a+r}{a+r-1}f_r$, donc $S = \sum_{n=1}^{+\infty} U_a^n(f_r) = \frac{a+r}{a+r-1}f_r - f_r = \frac{1}{a+r-1}f_r = U_{a-1}(f_r)$ vu **3.1**.

Partie 2

1. Il est clair que si f_1, f_2 et $h \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ sont telles que $f_1 = \underset{+\infty}{o}(f_2)$ et h ne s'annulant pas, alors $hf_1 = \underset{+\infty}{o}(hf_2)$.
Ainsi si $f = \underset{+\infty}{o}(g)$, alors $f_a f = \underset{+\infty}{o}(f_a g)$ et donc par l'encadré, $\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\big(\int_x^{+\infty} e^{-at}g(t)\,\mathrm{d}t\big)$.
En multipliant cette relation par e^{ax}, on obtient $U_a(f)(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(U_a(g)(x))$, qui est le résultat voulu.

2. On rappelle que $f_1 \underset{+\infty}{\sim} f_2 \iff f_1 - f_2 = \underset{+\infty}{o}(f_2)$.
Ainsi si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors $f - g = \underset{+\infty}{o}(g)$, donc par **1**, $U_a(f-g) = \underset{+\infty}{o}(U_a(g))$.
Or par linéarité de U_a (cf. **Partie 1**, **2.2**), on a $U_a(f-g) = U_a(f) - U_a(g)$, donc $U_a(f) - U_a(g) = \underset{+\infty}{o}(U_a(g))$, ce qui signifie $U_a(f) \underset{+\infty}{\sim} U_a(g)$.

3.
- Cas d'une limite nulle.
  Si $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, i.e. si $f = \underset{+\infty}{o}(1)$, alors par **1**, $U_a(f) = \underset{+\infty}{o}(U_a(1))$.
  Or les calculs faits en **Partie 1**, **2.1** ou **3.1**, donnent $U_a(1) = \frac{1}{a}$, donc $U_a(f) = \underset{+\infty}{o}(\frac{1}{a})$, i.e. $\lim\limits_{+\infty} U_a(f) = 0$.
- Cas d'une limite non nulle.
  Si $\lim\limits_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}^*$, alors en appliquant le point précédent à $f - \ell$, ou la question **2** à l'équivalent $f \underset{+\infty}{\sim} \ell$, on obtient en profitant de la linéarité de U_a, $\lim\limits_{+\infty} U_a(f) = \frac{\ell}{a}$.

On a montre dans tous les cas que si f converge en $+\infty$, alors $U_a(f)$ aussi, avec $\lim\limits_{+\infty} U_a(f) = \frac{1}{a}\lim\limits_{+\infty} f$.

4.1. Soit $\omega > 0$. Les fonctions h_ω et $h'_\omega = -\omega h_{\omega+1}$ appartiennent à $\mathscr{E}$, donc par intégration par parties dans laquelle tous les termes convergent (la limite en $+\infty$ du terme entre crochets est nulle par croissances comparées), on a pour $x \in I$:

$$\begin{aligned} H_\omega(x) &= e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}h_\omega(t)\,\mathrm{d}t \\ &= e^{ax}\Big[\frac{e^{-at}}{-a}h_\omega(t)\Big]_x^{+\infty} - \frac{\omega}{a}e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}h_{\omega+1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a}h_\omega(x) - \frac{\omega}{a}H_{\omega+1}(x) \end{aligned}$$

qui est l'égalité voulue.

4.2. On a manifestement $h_{\omega+1} = \underset{+\infty}{o}(h_\omega)$, donc par **1**, $H_{\omega+1} = \underset{+\infty}{o}(H_\omega)$.
L'égalité de **4.1** donne donc $\frac{1}{a}h_\omega = H_\omega + \underset{+\infty}{o}(H_\omega)$, i.e. $\frac{1}{a}h_\omega \underset{+\infty}{\sim} H_\omega$, qui est l'équivalent demandé.

5.1. Soit $x \in I$. Par linéarité de l'intégrale, $\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{e^{-at}-1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(x) + \int_1^x \frac{e^{-at}-1}{t}\,\mathrm{d}t$.
Or pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $e^{-at} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-at)^k}{k!}$, donc $\frac{e^{-at}-1}{t} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!}$.
Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $g_k : t \mapsto \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!}$. On a manifestement $\|g_k\|_{\infty,[1;x]} = \frac{a^k x^{k-1}}{k!}$, donc la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 1} g_k$ converge normalement sur $[1;x]$. On peut donc intervertir somme et intégrale sur le segment $[1;x]$:

$\int_1^x \frac{e^{-at}-1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_1^x \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k}{k\cdot k!}(x^k-1).$

On a donc bien $\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k}{k\cdot k!}(x^k-1)$.

5.2. Immédiat vu **5.1** puisque $H_1(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t = e^{ax}\big(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t\big)$ par relation de Chasles.

Partie 3

1. Par **Partie 1**, **3.1**, $U_a(f_r) = \frac{1}{a+r} f_r$, donc $\int_1^{+\infty} U_a(f_r)(t)\,\mathrm{d}t$ converge lorsque $r > 0$ (intégrale de référence).

2. Par **Partie 2**, **4.2**, on a $H_\omega \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a}h_\omega$, donc les deux intégrales $\int_1^{+\infty} H_\omega(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} h_\omega(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature (car les fonctions en jeu sont continues et positives sur $I = [x; +\infty[$).
Or $\int_1^{+\infty} h_\omega(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\iff \omega > 1$ (intégrale de Riemann), donc $\int_1^{+\infty} H_\omega(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\iff \omega > 1$.

3.1. Par définition, $U_a(f)$ est une solution de (E_a^f), donc $U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0$, i.e. avec les notations de cette question, $F' - aF + f = 0$. En intégrant cette relation entre 1 et $x \in I$, on obtient, puisque $\Phi' = F$:

$$F(x) - F(1) - a\Phi(x) + \varphi(x) = 0, \text{ i.e. } \Phi'(x) - F(1) - a\Phi(x) + \varphi(x) = 0.$$

3.2. La fonction φ est une primitive de f sur I, donc elle y est continue (même de classe $\mathscr{C}^1$). Et puisque f est positive, on a pour tout $x \in I$, $0 \leqslant \varphi(x) = \int_1^x f \leqslant \int_1^{+\infty} f$, donc φ est bornée sur I. Ainsi, $\varphi \in \mathscr{E}$.

3.3. Par **3.1**, on a $\Phi(x) = \int_1^x F(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\big(F(x) + \varphi(x) - F(1)\big)$.
Or $F = U_a(f)$ est bornée par construction, et φ est bornée par **3.2**, donc Φ l'est.
Par ailleurs comme f est positive, $F = U_a(f)$ l'est aussi par **Partie 1**, **7**, donc Φ est croissante.
Le théorème de la limite monotone implique alors que $\Phi(x) = \int_1^x F(t)\,\mathrm{d}t$ converge quand $x \to +\infty$, ce qui est la définition de la convergence de $\int_1^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t$.

4. On suppose f intégrable, donc la question **3** s'applique à $|f|$ et montre que l'intégrale $\int_1^{+\infty} U_a(|f|)$ converge.
Or par **Partie 1**, **6**, on a $|U_a(f)| \leqslant U_a(|f|)$, donc par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} |U_a(f)|$ converge, autrement dit $U_a(f)$ est intégrale sur I.