E3A PSI 2018 mathématiques 1

—

Corrigé

Exercice 1

1. On rappelle que si l'on identifie $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$, alors l'application $(X,Y) \mapsto {}^tXY$ définit le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

- Montrons (1) $\Rightarrow$ (2). Si $\forall\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$, alors en particulier $\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel $AX = \lambda X$, on a ${}^tXAX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2 \geqslant 0$, et donc $\lambda \geqslant 0$ puisque $\|X\|^2 > 0$.
- Montrons (2) $\Rightarrow$ (3). Par théorème spectral, soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tP\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A. Si ces valeurs propres sont positives, alors on peut poser $B = {}^tP\,\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P$, de sorte que $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et que $B^2 = A$.
- Montrons (3) $\Rightarrow$ (1). Si $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est tel que $B^2 = A$, alors $\forall\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = {}^tXB^2X = {}^tX{}^tBBX = {}^t(BX)BX = \|BX\|^2 \geqslant 0$.

L'équivalence des trois propositions est ainsi démontrée.

2.1. Classiquement (en considérant le rang et la trace de J), on a $\mathrm{Sp}(J) = \{0, n\}$, avec $\mathrm{Ker}(J)$ l'hyperplan d'équation $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ et $\mathrm{Ker}(J - nI_n)$ la droite dirigée par la colonne $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Or pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a manifestement $JX = \lambda X \iff MX = (\alpha + 1 - \lambda)X$. D'où $\mathrm{Sp}(M) = \{\alpha+1, \alpha+1-n\}$, avec $\mathrm{Ker}(M - (\alpha+1)I_n) = \mathrm{Ker}(J)$ et $\mathrm{Ker}(M - (\alpha+1-n)I_n) = \mathrm{Ker}(J - nI_n)$.

2.2. Vu **2.1** et en utilisant la caractérisation (2), on a $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \alpha \geqslant n-1$.

De plus toujours par **2.1** :

- si $\alpha > n-1$, alors 0 n'est pas valeur propre de M, donc $\mathrm{rg}(M) = n$.
- si $\alpha = n-1$, alors $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(J - nI_n)$ est de dimension 1, donc $\mathrm{rg}(M) = n-1$.

Dans tous les cas, on a donc bien $\mathrm{rg}(M) \geqslant n-1$.

3.1. Le théorème spectral assure que a est diagonalisable en base orthonormale, d'où l'existence demandée.

3.2. Par définition de b, sa matrice dans la base orthonormale $\mathscr{B}$ est symétrique (et même diagonale), donc b est un endomorphisme symétrique.

3.3. Posons $I = \{i \in [\![1;n]\!] \mid \lambda_i = 0\}$.

En décomposant les éléments de E dans la base $\mathscr{B}$, on voit que $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Vect}(\{u_i \mid i \in I\}) = \mathrm{Ker}(b)$.

4.1. Remarquons que l'on a $a = b^2$, puisque ces deux endomorphismes coïncident sur la base $\mathscr{B}$ de **3.1**. Ainsi puisque b est symétrique (**3.2**), on a $\forall\,(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $\langle z_i, z_j\rangle = \langle b(e_i), b(e_j)\rangle = \langle e_i, b^2(e_j)\rangle = \langle e_i, a(e_j)\rangle = a_{i,j}$. En particulier si $i \neq j$, alors $\langle z_i, z_j\rangle < 0$ par hypothèse sur A.

Remarque. Une famille $(z_1, \dots, z_n)$ d'éléments d'un espace préhilbertien telle que $\forall\, i \neq j$, $\langle z_i, z_j\rangle < 0$ est dite *strictement obtusangle*. Les deux questions ci-dessous montrent qu'une telle famille est de rang $\geqslant n-1$.

4.1.1. Posons $I_1 = \{i \in [\![1;n-1]\!] \mid \gamma_i \geqslant 0\}$ et $I_2 = \{i \in [\![1;n-1]\!] \mid \gamma_i < 0\}$, de sorte que I_1 et I_2 forment une partition de $[\![1;n-1]\!]$ telle que $\forall\, i \in I_1$, $\gamma_i = |\gamma_i|$, et que $\forall\, i \in I_2$, $\gamma_i = -|\gamma_i|$.

Alors l'égalité $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0_E$ se récrit $\sum\limits_{i \in I_1} |\gamma_i| z_i - \sum\limits_{i \in I_2} |\gamma_i| z_i = 0_E$, ou encore $\sum\limits_{i \in I_1} |\gamma_i| z_i = \sum\limits_{i \in I_2} |\gamma_i| z_i$.

En notant z ce dernier élément, on a $\langle z, z\rangle = \langle \sum\limits_{i \in I_1} |\gamma_i| z_i, \sum\limits_{i \in I_2} |\gamma_i| z_i\rangle = \sum\limits_{(i,j) \in I_1 \times I_2} |\gamma_i||\gamma_j| \langle z_i, z_j\rangle$.

Or $\langle z, z\rangle \geqslant 0$ et puisque I_1 et I_2 sont disjoints, on a $\forall\,(i,j) \in I_1 \times I_2$, $\langle z_i, z_j\rangle < 0$, donc $|\gamma_i||\gamma_j|\langle z_i, z_j\rangle \leqslant 0$.

D'où nécessairement $\langle z, z\rangle = 0$, i.e. $z = 0_E$, et ainsi $\sum\limits_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i = \sum\limits_{i \in I_1} |\gamma_i| z_i + \sum\limits_{i \in I_2} |\gamma_i| z_i = z + z = 0_E$.

4.1.2. On a alors $\langle \sum\limits_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i, z_n\rangle = \langle 0_E, z_n\rangle = 0$ mais par linéarité, $\langle \sum\limits_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i, z_n\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| \langle z_i, z_n\rangle$ est une somme de termes négatifs. Donc $\forall\, i \in [\![1;n-1]\!]$, $|\gamma_i|\langle z_i, z_n\rangle = 0$, i.e. $\gamma_i = 0$ puisque $\langle z_i, z_n\rangle < 0$.

On a montré que $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0_E \Longrightarrow \forall\, i \in [\![1;n-1]\!]$, $\gamma_i = 0$, i.e. que la famille $(z_1, \dots, z_{n-1})$ est libre.

4.2. On vient de montrer que la famille $(b(e_1), \dots, b(e_{n-1}))$ est libre, donc que $\mathrm{rg}(b) \geqslant n-1$. Or par **3.3** et le théorème du rang, on a $\mathrm{rg}(b) = \mathrm{rg}(a)$. Donc $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(A) \geqslant n-1$.

Exercice 2

1. • Puisque $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments, la somme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ est égale au nombre total de parties d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire 2^n.

• Par la formule du binôme, $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$.

2. Les événements $A_{i,j}=[X=i]\cap[Y=j]$, pour $(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2$, forment un système complet d'événements, donc $\sum\limits_{(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2}\mathbb{P}(A_{i,j})=1$.

Or par **1**, $\sum\limits_{(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2}\mathbb{P}(A_{i,j})=\sum\limits_{i=1}^{n+1}\sum\limits_{j=1}^{n+1}\alpha\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}=\alpha\sum\limits_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\sum\limits_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}=\alpha 4^n$. Donc $\alpha=\frac{1}{4^n}$.

3. • Par formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $([Y=j])_{j\in[\![1;n+1]\!]}$, on a :

$\forall i\in[\![1;n+1]\!]$, $\mathbb{P}(X=i)=\sum\limits_{j=1}^{n+1}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])=\frac{\binom{n}{i-1}}{4^n}\sum\limits_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}=\frac{\binom{n}{i-1}}{2^n}$.

• Par symétrie, $\forall j\in[\![1;n+1]\!]$, $\mathbb{P}(Y=j)=\frac{\binom{n}{j-1}}{2^n}$.

• Ainsi $\forall(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2$, $\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])\frac{\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}}{4^n}=\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}Y=j)$.
Les variables X et Y sont donc indépendantes.

4. La variable $Z=X-1$ est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$ et $\forall k\in[\![0;n]\!]$, $P(Z=k)=P(X=k+1)=\binom{n}{k}\frac{1}{2^k}$. Donc Z suit la loi binomiale de paramètres n et $p=\frac{1}{2}$. En particulier, $\mathbb{E}(Z)=\frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(Z)=\frac{n}{4}$.
On en déduit par linéarité de l'espérance que $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Z)+1=\frac{n}{2}+1$, et par la formule donnant la variance d'une transformation affine que $\mathbb{V}(X)=\mathbb{V}(Z)=\frac{n}{4}$.

5. • Par définition des coefficients binomiaux, les parties de A de cardinal r sont au nombre de $\binom{p+q}{r}$.

• Partitionnons A en deux parties A_1 et A_2 de cardinal p et q respectivement.
Pour tout $k\in[\![0;r]\!]$, le nombre de parties de A de cardinal r et comportant exactement k éléments de A_1 (et donc $r-k$ éléments de A_2) est égal à $\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$, puisqu'il y a autant de telles parties que de couples constitués d'une partie de A_1 de cardinal k et d'une partie de A_2 de cardinal $r-k$.
Ainsi, la somme $\sum\limits_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$ est égale au nombre total de parties de A de cardinal r.

L'égalité demandée résulte de la comparaison des résultats des deux points précédents.

6. Le cas $p=q=r=n$ dans l'égalité de **5** donne $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$, puisque $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

7.1. Les colonnes de la matrice B sont toutes non nulles et proportionnelles à la colonne des coefficients binomiaux $\binom{n}{i-1}$ pour $1\leqslant i\leqslant n+1$, donc $\mathrm{rg}(B)=1$.

7.1. On a $\mathrm{Tr}(B)=\sum\limits_{i=1}^{n+1}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=i])=\frac{1}{4^n}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}^2=\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ par **6**.

Exercice 3

Question de cours : On a $\dim(\mathscr{S}_n)=\frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathscr{A}_n)=\frac{n(n-1)}{2}$.

Partie 1

1. Le sous-espace $\mathscr{S}_2$ de $\mathscr{M}_2$ est de dimension 3 (question de cours) et constitué de matrices diagonalisables d'après le théorème spectral.

2. On vient de voir que $\mathscr{D}_2$ contient un sous-espace de $\mathscr{M}_2$ de dimension 3, et il n'en contient pas de dimension 4 puisque le seul sous-espace de $\mathscr{M}_2$ de dimension 4 est $\mathscr{M}_2$, et ce dernier n'est pas inclus dans $\mathscr{D}_2$ (par exemple la matrice élémentaire $E_{1,2}$ de $\mathscr{M}_2$ n'est pas diagonalisable, puisqu'elle a pour unique valeur propre 0 sans être la matrice nulle). Donc la dimension maximale d'une sous-espace de $\mathscr{M}_2$ inclus dans $\mathscr{D}_2$ est 3.

3. *Méthode 1.* En exhibant deux matrices diagonalisables dont la somme ne l'est pas (la question 1 de la partie 2 donne un exemple), on montre que $\mathscr{D}_2$ n'est pas stable par somme, donc n'est pas un sous-espace de $\mathscr{M}_2$.

Méthode 2. Vu **1** et **2**, si $\mathscr{D}_2$ était un sous-espace de $\mathscr{M}_2$, ce serait un sous-espace strict de $\mathscr{M}_2$ contenant $\mathscr{S}_2$, donc on aurait $\mathscr{S}_2=\mathscr{D}_2$ au vu des dimensions. Or il existe des matrices diagonalisables non symétriques (par exemple celles données dans la question 1 de la partie 2), d'où une contradiction.

4. Un sous-espace de $\mathscr{M}_2$ contenant $\mathscr{D}_2$ contient strictement $\mathscr{S}_2$ par **1** et **3**, donc est de dimension p telle que $3 < p \leqslant 4$, i.e. est de dimension 4. Ainsi le seul sous-espace de $\mathscr{M}_2$ contenant $\mathscr{D}_2$ est $\mathscr{M}_2$.

5.1. L'application $\Delta : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a-d)^2+4bc$ est polynomiale en les coefficients des matrices, donc est continue.

Ainsi $\Omega = \Delta^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue donc Ω est un ouvert, et $F = \Delta^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue donc F est un fermé.

5.2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2$.

Le polynôme caractéristique $\chi_M = X^2-(a+d)X+(ad-bc)$ de M a pour discriminant $(a+d)^2-4(ad-bc) = (a-d)^2+4bc = \Delta(M)$. D'où la discussion suivante :

- Si $\Delta(M) > 0$, alors χ_M admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$, donc M est diagonalisable (son polynôme caractéristique est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$). Donc $\Omega \subset \mathscr{D}_2$.
- Si M est diagonalisable, alors χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$, donc admet deux racines réelles, ce qui implique $\Delta(M) \geqslant 0$ (sinon, χ_M aurait deux racines complexes conjuguées non réelles). Donc $\mathscr{D}_2 \subset F$.

5.3. *Méthode 1.* On utilise la caractérisation séquentielle des ouverts/fermés :

- Les matrices $\frac{1}{n}E_{1,2}$ ne sont pas diagonalisables (cf. **2**) et convergent, quand n tend vers $+\infty$, vers la matrice nulle, qui est diagonalisable. Cela montre que $\mathscr{D}_2$ n'est pas ouvert (la matrice nulle appartient à $\mathscr{D}_2$ mais pas à l'intérieur de $\mathscr{D}_2$).
- Les matrices $\frac{1}{n}E_{1,1} + E_{1,2}$ sont diagonalisables (car elles ont deux valeurs propres distinctes $\frac{1}{n}$ et 0) et convergent, quand n tend vers $+\infty$, vers la matrice $E_{1,2}$, qui n'est pas diagonalisable (cf. **2**). Cela montre que $\mathscr{D}_2$ n'est pas fermé (la matrice $E_{1,2}$ est adhérente à $\mathscr{D}_2$ sans appartenir à $\mathscr{D}_2$).

Méthode 2. On utilise la question précédente :

- On montre que l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω est F et que l'intérieur $\mathring{F}$ de F est Ω : les inclusions $\overline{\Omega} \subset F$ et $\Omega \subset \mathring{F}$ sont évidentes, et les deux autres résultent de la vérification de ce que toute matrice M telle que $\Delta(M) = 0$ appartient à la fois à l'adhérence de Ω et de $\mathscr{M}_2 \setminus F$ (...).
- Si $\mathscr{D}_2$ est fermé, alors on déduit de **5.2** que $\overline{\Omega} \subset \mathscr{D}_2 \subset F$, donc que $\mathscr{D}_2 = F$ par le point précédent. C'est absurde puisque par exemple, $E_{1,2} \in F \setminus \mathscr{D}_2$.
- Si $\mathscr{D}_2$ est ouvert, alors on déduit de **5.2** que $\Omega \subset \mathscr{D}_2 \subset \mathring{F}$, donc que $\mathscr{D}_2 = \Omega$ par le premier point. C'est absurde puisque par exemple, $I_2 \in \mathscr{D}_2 \setminus \Omega$.

Partie 2

1.1. Les matrices A et B sont triangulaires, donc leur polynôme caractéristique est scindé et a pour racines leurs coefficients diagonaux, à savoir -1 et 1 de multiplicité 1 et 0 de multiplicité $n-2$.

La dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre de multiplicité 1 est nécessairement égale à cette multiplicité. De plus, les matrices A et B sont de rang 2, donc leur noyau est de dimension $n-2$ par théorème du rang, soit la multiplicité de la valeur propre 0.

Ainsi A et B ont un polynôme caractéristique scindé et tous leurs sous-espaces propres sont de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre associée, donc A et B sont diagonalisables.

1.2. Las matrices A et B sont dans $\mathscr{D}_n$ mais leur somme $A+B = 2E_{1,2}$ n'y est pas (puisqu'elle a pour unique valeur propre 0 sans être la matrice nulle), donc $\mathscr{D}_n$ n'est pas stable par somme, donc $\mathscr{D}_n$ n'est pas un sous-espace de $\mathscr{M}_n$.

2. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(N)$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel $NX = \lambda X$. On a alors ${}^tXNX = \lambda {}^tXX = \lambda\|X\|^2$, et par ailleurs puisque ${}^tN = -N$, on a ${}^tXNX = -{}^tX{}^tNX = -{}^t(NX)X = -\lambda {}^tXX = -\lambda\|X\|^2$. Donc $\lambda\|X\|^2 = -\lambda\|X\|^2$, et comme $\|X\|^2 \neq 0$, on a nécessairement $\lambda = 0$. Cela montre que $\mathrm{Sp}(N) \subset \{0\}$.

3.
- Par **2**, une matrice à la fois antisymétrique et diagonalisable est nulle : en effet une telle matrice N est semblable à la matrice nulle (matrice diagonale de coefficients diagonaux la seule valeur propre possible de N), donc est égale à la matrice nulle. Ainsi $\mathscr{D}_n \cap \mathscr{A}_n = \{(0)\}$, et donc a fortiori $S \cap \mathscr{A}_n = \{(0)\}$.
- La formule de Grassmann donne alors $\dim(S)+\dim(\mathscr{A}_n) = \dim(S \oplus \mathscr{A}_n) \leqslant \dim(\mathscr{M}_n)$, donc nécessairement $\dim(S) \leqslant \dim(\mathscr{M}_n) - \dim(\mathscr{A}_n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

  Ainsi, un sous-espace de $\mathscr{M}_n$ contenu dans $\mathscr{D}_n$ est nécessairement de dimension $d \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$, et le sous-espace $\mathscr{S}_n$ est un exemple de tel sous-espace (par théorème spectral) réalisant le cas d'égalité.

4.1. • L'application f_P est clairement linéaire (c'est d'ailleurs affirmé dans l'énoncé) de $\mathscr{M}_n$ dans $\mathscr{M}_n$, et telle que $f_P \circ f_{P^{-1}} = f_{P^{-1}} \circ f_P = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n}$. Donc f_P est un automorphisme de $\mathscr{M}_n$ de réciproque $(f_P)^{-1} = f_{P^{-1}}$.

• Ainsi f_P induit un isomorphisme de $\mathscr{S}_n$ sur $f_P(\mathscr{S}_n) = \mathscr{S}_P$, et donc par le théorème du rang appliqué à cet isomorphisme induit, $\dim(\mathscr{S}_P) = \dim(\mathscr{S}_n)$.

4.2. Toute matrice semblable à une matrice diagonalisable est diagonalisable (par transitivité de la relation de similitude), et on a $\mathscr{S}_n \subset \mathscr{D}_n$ par théorème spectral, donc $\mathscr{S}_P \subset \mathscr{D}_n$.

4.3. • Vu **4.2**, on a $\mathscr{S}_P \subset \mathscr{D}_n$ pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, autrement dit $\bigcup\limits_{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \mathscr{S}_P \subset \mathscr{D}_n$.

• Par définition, pour tout $M \in \mathscr{D}_n$, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_n$ diagonale telle que $M = P^{-1}DP$, donc telle que $M \in \mathscr{S}_P$ (puisqu'une matrice diagonale est symétrique). Ainsi $\mathscr{D}_n \subset \bigcup\limits_{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \mathscr{S}_P$.

Par double inclusion, on a donc bien l'égalité demandée.

5.1. La famille $\mathscr{B}_1$ constituée des matrices $E_{i,j} + E_{j,i}$ pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tels que $i \leqslant j$, est une base de $\mathscr{S}_n$.

5.2. • *Méthode 1.* L'interprétation matricielle des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes des matrices montre que la matrice $P^{-1}T_{i,j}P$ se déduit de $T_{i,j}$ en multipliant sa j-ème colonne par 2 et sa j-ème ligne par $\frac{1}{2}$. Donc $P^{-1}T_{i,j}P = 2(E_{i,j} + E_{j,i})$.

Méthode 2 (en suivant l'indication). Si φ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice $T_{i,j}$ dans la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, alors $P^{-1}T_{i,j}P$ est la matrice de φ dans la base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_{j-1}, 2e_j, e_{j+1}, \ldots, e_n)$. Or vu $T_{i,j}$, on a $\varphi(e_k) = 0_{\mathbb{R}^n}$ si $k \notin \{i,j\}$, $\varphi(e_i) = 4e_j = 2(2e_j)$, et $\varphi(e_j) = e_i$, donc $\varphi(2e_j) = 2e_i$, d'où $P^{-1}T_{i,j}P = M_{\mathscr{B}}(\varphi) = 2(E_{i,j} + E_{j,i})$.

• Comme $T_{i,j}$ est semblable à une matrice symétrique (réelle), $T_{i,j}$ est diagonalisable (cf. **4.2**).

5.3. • Soit $M = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \lambda_{i,j} T_{i,j} \in \mathscr{T}$.

Le coefficient d'indices $(i_0, j_0) \in [\![1;n]\!]^2$ dans M est λ_{i_0,j_0} si $i_0 < j_0$, ou $4\lambda_{j_0,i_0}$ si $i_0 > j_0$. Ainsi si $M = (0)$, ou plus généralement si $M \in \mathscr{S}_n$, on a nécessairement $\lambda_{i,j} = 4\lambda_{i,j}$, i.e. $\lambda_{i,j} = 0$, pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant n$. On en déduit à la fois que $\mathscr{T} \cap \mathscr{S}_n = \{(0)\}$, et que la famille $(T_{i,j})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ est libre, donc est une base de $\mathscr{T}$, de sorte que $\dim(\mathscr{T}) = \frac{n(n-1)}{2}$ (cardinal de cette famille).

• Ainsi les sous-espaces $\mathscr{T}$ et $\mathscr{S}_n$ sont en comme directe, et par la formule de Grassmann, $\dim(\mathscr{T} \oplus \mathscr{S}_n) = \dim(\mathscr{T}) + \dim(\mathscr{S}_n) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2 = \dim(\mathscr{M}_n)$, donc $\mathscr{T} \oplus \mathscr{S}_n = \mathscr{M}_n$.

• Vu **5.1** et les deux points précédents, la famille constituée des matrices $T_{i,j}$, pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, et des matrices $E_{i,j} + E_{j,i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, est une base de $\mathscr{M}_n$. Et vu **5.2** et le théorème spectral, toutes ces matrices sont diagonalisables.

5.4. Si un sous-espace de $\mathscr{M}_n$ contient $\mathscr{D}_n$, alors il contient une base de $\mathscr{M}_n$ par **5.3**, donc il est égal à $\mathscr{M}_n$. Ainsi le seul sous-espace de $\mathscr{M}_n$ contenant $\mathscr{D}_n$ est $\mathscr{M}_n$.

Exercice 4

1. La fonction suivante retourne le résultat demandé pour toute liste d'entiers naturels <u>non vide</u> :

```
def maxi(L):
    res = L[0]
    for k in range(1,len(L)):
        if L[k] > res:
            res = L[k]
    return res
```

2. La fonction suivante retourne le résultat demandé pour toute liste d'entiers naturels :

```
def ind(L):
    res = []
    for k in range(len(L)):
        if L[k] != 0:
            res.append(k)
    return res
```

3. Par exemple (avec la même restriction qu'en **1**) :

```
def nb_oc(L):
    M = maxi(L)+1
    res = [0]*M
    for k in range(len(L)):
        res[L[k]] += 1
    return res
```

4.1. Lors de l'appel `nb_oc(L)` avec la fonction `nb_oc` telle que définie en **3**, la liste `L` est parcourue une première fois pour déterminer `M`, puis une seconde fois pour le remplissage de la liste `res`. Donc la liste `L` est parcourue deux fois en tout.

4.2. Le nombre `n = 2` trouvé en **4.1** est indépendant de `M`.

5.1. On trouve $L_1 = [1, 4, 3, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 0]$, $L_2 = [1, 4, 3, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 0] = L_1$, et donc par récurrence immédiate, $L_k = L_1$ pour tout $k \geqslant 1$.

5.2. La liste B proposée ne peut pas être la liste L_1 d'une suite de Robinson puisque par construction dans une telle liste, les valeurs $i_r, \ldots, i_2, i_1$ présentes dans les cases d'indice impair vont en décroissant.

5.3. Les listes L_0 correspondant à une telle liste L_1 sont toutes les listes constituées de deux « 4 » et d'un « 0 » (et de rien d'autre). Il y a donc trois possibilités : $[0, 4, 4]$, $[4, 0, 4]$ ou $[4, 4, 0]$.

5.4. Par exemple (avec la même restriction qu'en **1**) :

```
def rob(A,n):
    L = A
    for _ in range(n):
        T = nb_oc(L)
        I = ind(T)
        L = []
        for i in I[::-1]:  # I[::-1] est la liste I renversée, i.e. [i_r,...,i_1].
            L.append(T[i])
            L.append(i)
    return L
```