E3A PSI 1 2017

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathcal{B} = \left(1, X, \ldots, X^{n-1}\right)$ sa base canonique.
Soient $a_1, \ldots, a_n$, n réels vérifiant : $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

1. Montrer que l'application : $T : P \mapsto (P(a_1), \ldots, P(a_n))$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$.
2. On note $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $L_i = T^{-1}(e_i)$, c'est-à-dire l'unique polynôme dont l'image par T est e_i. Montrer que $\mathcal{B}' = (L_1, \ldots, L_n)$ est une base de E puis déterminer les composantes d'un polynôme P quelconque de E dans cette base.
   Dans la suite de l'exercice, on note $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$
3. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.
   (a) Donner, sans justification, les polynômes L_1, L_2, L_3 et expliciter la matrice M.
   (b) Montrer que 1 est valeur propre de la matrice M et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$.
4. **On revient au cas général**.
   (a) Montrer que M est inversible. Calculer son inverse. (On pourra utiliser la question 2)
   (b) Etablir la relation : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$.
   (c) Montrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{1,j} = 1$. Montrer ensuite que pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0$.
   (d) Lorsque $a_1 = 1$, déterminer la somme des coefficients de chaque colonne de M.
5. Dans cette question, on suppose que $n \geqslant 4$ et soit u l'endomorphisme de E défini par : [1]

$$\forall P \in E, u(P) = Q \qquad \text{avec} \quad Q(X) = P(0)L_1(X) + P(1)L_2(X) + P(2)L_3(X)$$

   (a) Déterminer $\ker(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$. Sont-ils supplémentaires ?
   (b) Déterminer les éléments propres de u et caractériser géométriquement u

1. Imprécision de l'énoncé original : il faut prendre ici $a_1 = 0, a_2 = 1$ et $a_3 = 2$

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle $[0,+\infty[$ et $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des applications continues de I vers $\mathbb{R}$.
On note E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel constitué des éléments f de $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ tels que f^2 est intégrable sur I, c'est-à-dire tels que $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t$ converge.

Questions de cours

1. Prouver que pour tous réels a et b, $ab \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$.
2. Montrer que le produit de deux éléments de E est une application intégrable sur I.
3. Soit φ l'application qui au couple $(f,g) \in E^2$ associe le réel : $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t) \, \mathrm{d}t$.
   Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $\langle \ | \ \rangle$.

Partie 1

Soit h élément de $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$, tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t) \, \mathrm{d}t$ converge.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_n^{n+1} h(t) \, \mathrm{d}t$.
   Prouver que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.
2. En déduire l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h(a_n) = 0$.

Partie 2

Soit F l'ensemble des applications f de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f'(t)]^2 \, \mathrm{d}t$ convergent. Soit $f \in F$.

1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t) f'(t) \, \mathrm{d}t$ convergent.
2. Etablir l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t) f'(t) \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t$.
   On pourra, par exemple, utiliser un résultat de la partie 1.
3. Démontrer
$$\left(\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^{+\infty} t^2 [f(t)]^2 \, \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} [f'(t)]^2 \, \mathrm{d}t\right) \quad (*)$$
4. Déterminer toutes les applications $f \in F$ pour lesquelles il y a égalité dans l'inégalité $(*)$.

EXERCICE 3

On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possibles est noté Ω.
Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et T une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $[\![0, k]\!]$.
On considère alors une suite $(X_i)_{i \in [\![0,k]\!]}$ de variables aléatoires de même loi et toutes à valeurs dans $\mathbb{Z}$.[2]
On suppose que les variables aléatoires $X_0, X_1, \ldots, X_k$ et T sont mutuellement indépendantes.

On définit la variable aléatoire Y par : $\quad \forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \displaystyle\sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$

1. Montrer que l'existence de l'espérance des variables aléatoires X_i entraine l'existence de l'espérance de Y.
   On pourra constater que $([T = j])_{j \in [\![0,k]\!]}$ constitue un système complet d'événements.
2. Calculer alors $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_0)$ et $\mathbb{E}(T)$.
3. On suppose que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ et que X_0^2 possède une espérance.
   Prouver alors que : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_0)\,\mathbb{E}(T)$.[3]

2. Imprécision de l'énoncé original : il faut prendre les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$
3. Erreur dans l'énoncé original : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_0)(\mathbb{E}(T) + 1)$

EXERCICE 4

PARTIE A. Recherche de zéro d'une fonction

1. Soient a et b deux réels, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$.
   (a) Justifier que f s'annule sur $[a,b]$.
   (b) Écrire une fonction Python `rech_dicho` prenant en arguments une fonction `f`, deux flottants `a` et `b` tels que `f(a)f(b)<0` et une précision `eps` et qui renvoie un couple de réels encadrant un zéro de `f` à une précision `eps` près.
2. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.
   (a) Montrer que f admet un point fixe (c'est-à-dire un réel c de $[0,1]$ tel que $f(c) = c$).
   (b) Écrire une fonction Python `rech_pt_fixe` qui prend en argument une fonction `f` que l'on suppose continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$, un précision `eps` et qui renvoie un couple de réels encadrant un point fixe de `f` à une précision `eps` près. On pourra utiliser la fonction `rech_dicho`.

PARTIE B. Recherche dans une liste

1. On propose l'algorithme suivant

```
1  def rech_dicho(L,g,d,x):
2    """L est une liste telle que
         L[g:d+1] est triee"""
3    if x>L[d] :
4      return d+1
5    else :
6      a=g
7      b = d
8      while a != b :
9        c = (a+b)//2
10       if x <= L[c] :
11         b = c
12       else :
13         a = c+1
14   return a
```

   (a) On prend `L = [2,4,5,7,7,9,10]`. Que renvoient les instructions suivantes ?
   `>>> rech_dicho(L,1,5,6)`
   `>>> rech_dicho(L,0,5,1)`
   On donnera les valeurs prises par les variables `a` et `b` à chaque passage ligne 9.
   (b) Détailler clairement ce que fait le programme `rech_dicho`.
   (c) Déterminer, en le justifiant, la complexité du programme, mesurée en nombre de comparaisons. On utilisera, si besoin est, la notation O, et on pourra exprimer cette complexité en fonction d'un ou plusieurs paramètres parmi `len(L)`, `g`, `d`, `x`.
2. Proposer un algorithme `tri_dicho` de tri par insertion **utilisant la fonction** `rech_dicho` pour trouver la position à laquelle insérer l'élément.
3. Estimer le nombre **d'affectations** de `tri_dicho` ainsi que le nombre de **comparaisons** effectuées par l'algorithme `tri_dicho` . Comparer avec le tri par insertion classique.