e3a 2016 - PSI 1
Un corrigé

Exercice 1

1. (a) La série proposée est géométrique de raison $1/2 \in]-1,1[$ et donc convergente. On a
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$$
On en déduit que
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 2$$

(b) Si $x > 1$ alors $nx^{n-1} \to +\infty$ ce qui montre que le rayon de convergence est ≤ 1.
Si $x \in [0,1[$, $nx^{n-1} \to 0$ (croissances comparées) ce qui montre que le rayon de convergence est ≥ 1.
Le rayon de convergence est donc égal à 1.

(c) On a
$$b_n = n\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
Comme $1/2 \in]-1,1[$, la question précédente montre que $\sum(b_n)$ converge. La série entière de la question précédente est la série entière dérivée de $\sum_{n\geq 0} x^n$. Comme on peut dériver terme à terme une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence, on en déduit que
$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$
On en déduit que
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-1/2)^2} = 2$$

2. (a) $f\ :\ x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et
$$\forall x > 1,\ f'(x) = -\frac{1+\ln(x)}{(x\ln(x))^2} \leq 0$$
f est donc décroissante sur $]1,+\infty[$ (on aurait aussi pu montrer que si $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$ en utilisant la croissance de ln et la décroissance du passage à l'inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$).
On en déduit immédiatement que $(a_n)_{n\geq 2}$ est décroissante. Elle est de limite nulle par théorèmes d'opération.

(b) f étant décroissante, on peut utiliser une comparaion série-intégrale. On a
$$\forall k \geq 3,\ \int_k^{k+1} f(t)\ dt \leq a_k = f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt$$
En sommant (et comme $a_1 = 0$) la relation de Chasles donne
$$\forall n \geq 2,\ a_2 + \int_3^{n+1} f(t)\ dt \leq A_n \leq a_2 + \int_2^n f(t)\ dt$$
Une primitive de f sur $]1,+\infty[$ est $t \mapsto \ln(\ln(t))$ et on a donc
$$\forall n \geq 2,\ a_2 + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leq A_n$$
La minorant étant de limite $+\infty$, il en est de même de A_n et $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge.

(c) $na_n = \frac{1}{\ln(n)}$ si $n \geq 2$. On a donc directement

$$\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$$

(d) On a

$$b_n = \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)}{(n+1)\ln(n)\ln(n+1)}$$

On écrit que

$$\begin{aligned}
(n+1)\ln(n+1) &= (n+1)\left(\ln(n) + \ln(1+1/n)\right) \\
&= (n+1)\ln(n) + (n+1)\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= n\ln(n) + \ln(n) + o(\ln(n))
\end{aligned}$$

Ainsi, $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \sim \ln(n)$ et donc

$$b_n \sim \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = a_{n+1}$$

$\sum(b_n)$ est ainsi une série divergente (positive et équivalente à une série divergente).

3. (a) Dans la somme définissant u_n, il y a n termes. Par décroissance de (a_k), le plus petit d'entre eux est a_{2n}. On a donc

$$na_{2n} \leq u_n$$

(b) On a $u_n = A_{2n} - A_n$ et comme (A_n) converge (suite des sommes partielles de la série convergente $\sum(a_n)$) on en déduit que $u_n \to 0$. L'encadrement $0 \leq na_{2n} \leq u_n$ prouve alors que

$$\lim_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$$

(c) Posons $c_n = na_n$. On a $c_{2n} = 2(na_{2n}) \to 0$. De plus

$$0 \leq c_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n} = c_{2n} + a_{2n+1}$$

Comme $\sum(a_k)$ converge, $a_k \to 0$. Le majorant ci-dessus est de limite nulle et, par théorème d'encadrement, $c_{2n+1} \to 0$. Du résultat sur les extraites de rang pair et impair, on déduit que $c_n \to 0$, c'est à dire que

$$\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$$

(d) On revient aux sommes partielles (puisque l'on est dans une situation théorique).

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n} ka_{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)a_k \\
&= a_1 + \sum_{k=2}^{n} (k-(k-1))a_k + na_{n+1} \\
&= A_n + (n+1)a_{n+1} - a_{n+1}
\end{aligned}$$

Les trois termes du membre de droite admettant une limite finie quand $n \to +\infty$, (B_n) converge et donc $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge.

(e) Un passage à la limite dans l'identité précédente donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

4. (a) Reprenons l'identité de la question précédente (on s'est donné $1 \leq m \leq n$)

$$B_n = A_n + na_{n+1} = A_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k + na_{n+1}$$

Dans la somme, il y a $n-m$ termes tous plus grand que a_n et donc aussi que a_{n+1}. On en déduit que

$$B_n \geq A_m + (n-m)a_{n+1} + na_{n+1} = A_m - ma_{n+1}$$

(b) Fixons $m \in \mathbb{N}^*$ et faisons tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente (les limites existent) :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \geq A_m$$

Ceci montre que (A_m) est une suite bornée. Comme elle croît (car les a_k sont ≥ 0), elle converge. Ainsi, $\sum(a_k)$ converge.

(c) On est alors ramenés à la partie précédente et on a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Exercice 2

1. Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Supposons pour cela que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k = 0$. On a alors

$$\forall x \geq 0,\ 0 = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k = e^{-x} Q(x)$$

e^{-x} étant non nul, Q est une fonction polynomiale nulle sur $\mathbb{R}^+$ et donc nulle (puisque Q possède une infinité de racines) ce qui entraîne la nullité des α_i.
$\mathcal{B}$ est libre et engendre E (par définition) et c'est donc une base de E. La dimension d'un espace étant le cardinal de l'une de ses bases, on a

$$\dim(E) = N + 1$$

2. (a) La linéarité de Δ est immédiate (linéarité de la dérivation). En outre

$$\Delta(e_0) = -e_0 \ \text{ et } \ \forall j \in [|0, N|],\ \Delta(e_j) = je_{j-1} - e_j$$

Les éléments d'une base de E étant envoyés dans E, Δ est finalement un endomorphisme de E.

(b) Les calculs précédents montrent que

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Delta) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & N \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant inversible (triangulaire à coefficients diagonaux non nuls), $\Delta \in GL(E)$.

(c) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire se lisent sur la diagonale et ainsi

$$\mathrm{Sp}(\Delta) = \{-1\}$$

$A+I_{N+1}$ est de rang N (les N première lignes sont indépendantes et la dernière nulle) donc $E_\Delta(-1)$ est de dimension 1 par théorème du rang. Comme cet espace contient $e_0 \neq 0$, on a

$$E_0(\Delta) = \mathrm{Vect}(e_0)$$

Δ n'est donc pas diagonalisable car $N \geq 1$ (et la somme des dimension des sous-espaces propres est $< N+1 = \dim(E)$).

3. On a $w_n = (x+n)^k e^{-(x+n)} \sim e^{-x} n^k e^{-n} = o(1/n^2)$ par croissances comparées. Ainsi, $\sum(w_n)$ est absolument convergente (et donc convergente).

4. (a) Une somme (finie) de séries convergentes est convergente et le passage à la somme est linéaire dans l'espace des suites de série associée convergente.

(b) Comme $f \in E$, il existe des scalaires α_k tels que $f = \sum_{k=0}^N \alpha_k e_k$. $f(n+x)$ apparaît alors comme la somme des termes généraux de séries convergentes. La question précédente montre que $\sum(f(n+x))$ converge et que

$$F(x) = \sum_{k=0}^{N} \left(\alpha_k \sum_{n=0}^{+\infty} e_k(x+n) \right) = \sum_{k=0}^{N} \left(\alpha_k e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (x+n)^k e^{-n} \right)$$

(c) $n^j e^{-n} = o(1/n^2)$ (par croissances comparées) et c'est le terme général d'une série absolument convergente.

(d) k étant fixé, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x+n)^k e^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{k-j} n^j e^{-n} \right)$$

On peut là encore intervertir (car une somme est finie) pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x+n)^k e^{-n} = \sum_{j=0}^{k} \left(\binom{k}{j} x^{k-j} A_j \right)$$

On en déduit (en gardant les notations de la question précédente)

$$F(x) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{k} \alpha_k e^{-x} \binom{k}{j} x^{k-j} A_j$$

C'est bien une expression en fonction de A_j mais aussi des α_k qui, eux, ne sont pas dans l'énoncé. Qu'attend-on ?

(e) On veut exprimer F à l'aide des e_i. On a

$$F = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{k} \alpha_k \binom{k}{j} A_j e_{k-j}$$

Comme $0 \leq k-j \leq N$, on a $F \in E$ (combinaison linéaire de $e_0, \dots, e_N$). Ainsi Φ va de E dans E. Sa linéarité est immédiate ($\Phi(f_1 + \lambda f_2) = \Phi(f_1) + \lambda\Phi(f_2)$) et donc $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.

5. On applique ce qui précède avec $F = e_i$ (tous les α_k nuls sauf $\alpha_i = 1$) :

$$\Phi(e_i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} A_j e_{i-j}$$

On obtient donc pour Φ dans la base $\mathcal{B}$ une matrice triangulaire comme ci-dessous

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0}A_0 & \binom{1}{1}A_1 & \binom{2}{2}A_2 & \dots & \binom{N}{N}A_N \\ 0 & \binom{1}{0}A_0 & \binom{2}{1}A_1 & \dots & \binom{N}{N-1}A_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{0}A_0 & \dots & \binom{N}{N-2}A_{N-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{N}{0}A_0 \end{pmatrix}$$

On a donc une unique valeur propre A_0. Comme la matrice n'est pas diagonale (et possède une unique valeur propre), elle n'est pas diagonalisable. Ainsi, Φ n'est pas diagonalisable.

Exercice 3

1. Programmes mystères

1. On a `P0(5)=True` et `P1(5)=True` puis `P0(9)=True` et `P1(5)=False`
   `P0(N)` pour `N` ≥ 3 teste si `N` est pair. Il renvoie `False` si c'est le cas et `True` sinon.
   `P1(N)` teste si `N` est premier (en renvoyan `True` si c'est le cas).

2. `P2(N)` renvoie la liste de entiers premiers inférieurs à `N` qui sont de la forme $1 + k^2$ pour une un bon entier k. On a ainsi

   `P2(127)=[2,5,17,37,101]`

   On teste qui parmi $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 11^2$ est premier (au delà, on est après 127).

3. On gère un compteur que l'on incrémente à partir de la valeur $N + 1$ tant que l'on ne tombe pas sur un nombre premier.

```
def nextPrime(N):
    k=N+1
    while not P1(k):
        k=k+1
    return(k)
```

4. (a) Je gère deux variables `p` et `q` qui vont successivement prendre les valeurs des entiers premiers successifs (plus grands que `N`). On s'arrête quand il sont distants de 2.

```
def jumeau(N):
    p=nextPrime(N)
    q=nextPrime(p)
    while q!=p+2:
        p,q=q,nextPrime(q)
    return([p,q])
```

   On peut aussi tester pour les nombre premiers `p` $>$ `N` si `p` $+ 2$ est premier. Cela fait utiliser `P1`.

```
def jumeau(N):
    p=nextPrime(N)
    while not(P1(p+2)):
        p=nextPrime(p)
    return([p,p+2])
```

(b) Je gère deux variables `p` et `q` qui vont successivement prendre les valeurs des entiers premiers successifs et une liste `l` pour stocker les paires de jumeaux. Tant que $\mathtt{q} \leq \mathtt{N}$, on teste si $\mathtt{p} + 2 = \mathtt{q}$ pour savoir si on l'ajoute à la liste puis on passe au couple suivant.

```
def lesJumeaux(N):
    p=2
    q=nextPrime(p)
    l=[]
    while (q<=N):
        if q==p+2:l.append([p,q])
        p,q=q,nextPrime(q)
    return(l)
```

2. Fonction récursive

1. Dans l'appel `M(101)` on renvoie directement 91.
2. Si $\mathtt{N} > 100$ on est de même dans un cas de base de la fonction et on renvoie $\mathtt{N} - 10$.
3. Dans l'appel `M(100)`, on calcule `M(111)` qui vaut 101 avec lequel on rappelle `M` pour obtenir 91. Dans l'appel `M(99)`, on calcule `M(110)` qui vaut 100 avec lequel on rappelle `M` pour obtenir 91. Dans l'appel `M(98)`, on calcule `M(109)` qui vaut 99 avec lequel on rappelle `M` pour obtenir 91.
4. On peut penser que pour tout $\mathtt{N} \leq 100$ on a `M(N)` qui vaut 91. On le prouve par récurrence descendante sur `N`.
   - Initialisation : c'est vrai si $\mathtt{N} = 100$.
   - Hérédité soit $\mathtt{N} \leq 100$ tel que le résultat soit vrai du rang 100 jusqu'au au rang `N`. L'appel `M(N-1)` déclenche celui de `M(N+10)`. Si $\mathtt{N} + \mathtt{10} > 100$ cet appel renvoie `N` et par hypothèse de récurrence, le second appel à `M` donne 91. Sinon $\mathtt{N} + \mathtt{10}$ est entre `N` et 100 et par hypothèse de récurrence l'appel donne 91 et le second appel à `M` (avec 91) donne 91.

Exercice 4

1. Préliminaires

1. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$; on a alors $x \in E$ et donc $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$. $\mathrm{Im}(u)$ est donc stable par u.
2. (a) On a

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4)) = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$$

Comme (e_3, e_4) est libre, cet espace est de dimension 2 et

$$\mathrm{rg}(u) = 2$$

Par théorème du rang, $\ker(u)$ est de dimension 2. Comme il contient e_3 et e_4 qui sont indépendants, on a

$$\ker(u) = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$$

Comme $e_3 \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$, les deux sous-espaces ne sont pas en somme directe et donc pas supplémentaires.

(b) La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme elle est triangulaire, on a directement ses valeurs propres sur la diagonale et

$$\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$$

Comme $u \neq 0$, u n'est alors pas diagonalisable (un seul sous-espace propre de dimension $2 < 4$).

(c) On a immédiatement

$$\mathrm{Mat}_{(e_3,e_4)}(u|_{\mathrm{Im}(u)}) = 0$$

3. Le cours nous indique que la dimension du sous-espace propre est inférieure à la multiplicité de la valeur propre (comme racine du polynôme caractéristique).

4. S'il y a n valeurs propres, le polynôme caractéristique possède n racines. Comme il est de degré n, la somme des multiplicités des n racines est $\leq n$. Il faut donc que chaque multiplicité soit égale à 1.

2. L'exercice

1. Le déterminant étant invariant par transposition, M et ${}^tM$ ont même polynôme caractéristique et donc mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Comme il y a n valeurs propres distinctes et comme les sous-espaces propres sont en somme directe, M et ${}^tM$ sont diagonalisables et ont des sous-espaces propres de dimension 1.

2. Soient $i, \in [|1, n|]$; on a

$$\lambda_i {}^tV_iW_j = {}^t(MV_i)W_j = {}^tV_i({}^tMW_j) = \lambda_j {}^tV_iW_j$$

Comme $\lambda_i \neq \lambda_j$, on en déduit que

$${}^tV_iW_j = 0$$

3. Soit $i \in [|1, n|]$; on vient de voir que V_i est orthogonal à tous les W_j pour $j \neq i$. Si, par l'absurde, il était orthogonal à W_i, il serait nul puisqu'orthogonal à tout élément d'une base de $\mathbb{R}^n$ ce qui est faux ($V_i \neq 0$). On a donc

$${}^tV_iW_i \neq 0$$

4. A étant triangulaire, sa diagonale donne le spectre et

$$\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$$

A possède donc deux sous-espaces propres qui sont des droites. On vérifie que $V_1 = (1, 0)$ et $V_2 = (1, 1)$ sont propres pour A associés respectivement à 1 et 2. De même $W_1 = (1, -1)$ et $W_2 = (0, 1)$ sont propres pour ${}^tA$ associés à 1 et 2. On en déduit que

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_1 + 2B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. $C_k = V_k{}^tW_k$ est de rang ≤ 1 comme produit de deux matrices de rang 1. De plus, cette matrice n'est pas nulle car $C_kV_k = V_k{}^tW_kV_k = (W_k|V_k)V_k \neq 0$. C'est donc une matrice de rang 1 et donc (on multiplie par un scalaire non nul et cela ne change pas le rang)

$$\mathrm{rg}(B_k) = 1$$

On a

$$B_k^2 = \frac{1}{(V_k|W_k)^2}V_k({}^tW_kV_k){}^tW_k = \frac{1}{(V_k|W_k)}V_k{}^tW_k = B_k$$

$X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme qui annule B_k. Comme il est scindé à racines simples, B_k est diagonalisable.

6. On a vu en question précédente que $B_kV_k = V_k$ et on a aussi $B_kV_i = 0$ si $i \neq k$ car $(W_k|V_i) = 0$ dans ce cas. On en déduit que $\forall i,\ PV_i = V_i$ et $QV_i = \lambda_iV_i$. L'endomorphisme canoniquement associé à P agit comme l'identité sur la base des (V_i) et celui associé à Q agit comme celui associé à M. Un endomorphisme étant caractérisé par son action sur une base, on a

$$P = I_n \text{ et } Q = M$$

7. De même, G_r et M^r ont même action sur la base des V_i et donc

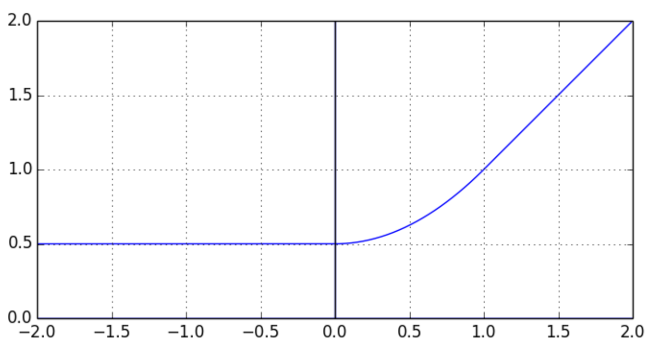
$$G_r = M^r$$

Exercice 5

1. (a) Le graphe de φ_x ets constitué d'une ligne horizontale d'ordonnée x jusqu'au point d'abscisse x puis coïncide avec la première bissectrice.

   (b) On distingue les cas
   - Si $x \leq 0$, $\Phi(x) = \int_0^1 t\ dt = \frac{1}{2}$.
   - Si $x \in]0,1[$, $\Phi(x) = \int_0^x x\ dt + \int_x^1 t\ dt = \frac{1+x^2}{2}$.
   - Si $x > 1$, $\Phi(x) = \int_0^1 x\ dt = x$

   (c)



2. Si X suit une loi géométrique alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. En particulier, $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq 1$ et donc

$$Y(\omega) = \Phi(X(\omega)) = X(\omega)$$

Les variables X et Y sont donc égales.

3. (a) On a $X(\Omega) = [|0, n|]$ et

$$\forall k \in [|0, n|],\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

De plus,

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p)$$

(b) Comme $Y = \Phi(X)$, on a

$$Y(\Omega) = \Phi([|0, n|]) = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, \ldots, n\right\}$$

De plus

$$\mathbb{P}(Y = 1/2) = \mathbb{P}(X = 0) = (1-p)^n \ \text{ et } \ \forall k \in [|1, n|],\ \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

4. (a) On a

$$\mathbb{P}(X = 1/2) = 1 - \mathbb{P}(X = -1) - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 2) = \frac{5}{12}$$

(b) On a $Y(\Omega) = \{\Phi(-1), \Phi(0), \Phi(1/2), \Phi(2)\} = \{1/2, 5/8, 2\}$ et

$$\mathbb{P}(Y = 1/2) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(Y = 5/8) = \mathbb{P}(X = 1/2) = \frac{5}{12}$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{5}{12}\frac{5}{8} + \frac{1}{3}2 = \frac{101}{96}$$

(c) Quand X vaut -1, Y vaut $1/2$ et Z vaut $-1/2$. On procède de même pour les trois autres valeurs et on trouve

$$Z(\Omega) = \{-1/2, 0, 5/16, 4\}$$

$$\mathbb{P}(Z = -1/2) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}(Z = 5/16) = \mathbb{P}(X = 1/2) = \frac{5}{12}$$

$$\mathbb{P}(Z = 4) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{3}$$

(d) Par formule de König-Huygens, on a

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

On a vu que $\mathbb{E}(Y) = 101/96$ et de même on a $\mathbb{E}(X) = 3/4$ et $\mathbb{E}(Z) = 269/192$. Ainsi

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{235}{384}$$

Pour obtenir le coefficient de corrélation, on doit diviser par le produit des écarts type. On a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{399}{256} - \left(\frac{101}{96}\right)^2 = \frac{4163}{9216}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}} = \frac{235}{16652}\sqrt{4163}$$