

**e3a 2015 - PSI 2**  
**durée 3 heures - calculatrices interdites**

Dans tout le problème :

- $E$  est un espace euclidien de dimension  $p \geq 1$  dans lequel le produit scalaire sera noté  $(\cdot|\cdot)$  et la norme associée  $\|\cdot\|$ .
- $\mathcal{S}(E)$  désigne le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  constitué des endomorphismes symétriques de  $E$ .
- $T(E)$  désigne l'ensemble des éléments  $u$  de  $\mathcal{S}(E)$  de rang inférieur ou égal à 1 et qui vérifient

$$\forall x \in E, (u(x)|x) \geq 0$$

## Préliminaires

1. Justifier que  $T(E)$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .
2. Si  $M$  est une matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , on notera  $\text{Tr}(M)$  sa trace. Soient  $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .
  - (a) Prouver que  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .
  - (b) On suppose que  $B$  est semblable à  $A$ . Comparer  $\text{Tr}(A)$  et  $\text{Tr}(B)$ .
  - (c) Donner la définition de la trace d'un endomorphisme de  $E$ .
3. Rappeler la définition d'un hyperplan de  $E$ . On se donne alors un tel hyperplan  $H$  et on note  $G$  son complémentaire dans  $E$ . Déterminer (en justifiant) si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
  - (a)  $G$  est un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $H$ .
  - (b) Pour tout vecteur  $a$  de  $G$ ,  $\text{Vect}(a)$  est supplémentaire de  $H$  dans  $E$ .
  - (c) Pour tout vecteur  $a$  non nul et orthogonal à  $H$ ,  $\text{Vect}(a)$  est supplémentaire de  $H$  dans  $E$ .
  - (d) Le noyau de l'application  $\text{Tr}$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .
  - (e) Un endomorphisme de  $E$  est de rang 1 si et seulement si son noyau est un hyperplan de  $E$ .
4. Montrer que l'application

$$(f, g) \in \mathcal{S}(E)^2 \mapsto \langle f, g \rangle = \text{Tr}(f \circ g)$$

est un produit scalaire.

**On notera pour la suite  $N$  la norme associée à ce produit scalaire.**

5. Soit  $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ . et  $f_A$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  qui lui est canoniquement associé.  
Donner les éléments propres de la matrice  $A$ .

## Partie 1

Soit  $a \in E$  et  $u_a$  l'endomorphisme de  $E$  défini par

$$\forall x \in E, u_a(x) = (x|a)a$$

1. Montrer que  $u_a \in T(E)$ .
2. On suppose dans cette question que  $a \neq 0$ .
  - (a) Ecrire la matrice de  $u_a$  dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  constituée du vecteur  $a$  et d'une base de  $\text{Vect}(a)^\perp$ .

- (b) Déterminer alors  $\text{Tr}(u_a)$  et  $\text{Tr}(u_a \circ u_a)$  en fonction de  $a$ .
  - (c) Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Déterminer les éléments diagonaux de la matrice  $f \circ u_a$  dans la base  $\mathcal{B}$  définie précédemment.
  - (d) Calculer alors  $\text{Tr}(f \circ u_a)$  en fonction de  $a$ .
3. Soit  $u \in T(E)$ ,  $u$  non nul et  $b$  un vecteur non nul de  $\text{Im}(u)$ .
- (a) Montrer que  $b$  est un vecteur propre de  $u$  associé à une valeur propre  $\mu$  positive.
  - (b) Prouver que  $\forall x \in E, u(x) = \frac{\mu}{\|b\|^2}(x|b)b$ .
  - (c) En déduire que  $\mu > 0$ .
  - (d) Montrer qu'il existe au moins un vecteur  $a$  de  $E$  tel que  $u = u_a$ .
4. L'application  $\varphi : a \in E \mapsto \varphi(a) = u_a \in T(E)$  est-elle injective? Surjective?

## Partie 2

Pour cette partie du problème,  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{S}(E)$  qui est **fixé**.

Pour tout vecteur  $x \in E$ , on pose

$$\Phi(x) = [N(f - u_x)]^2 \quad \text{et} \quad m(f) = \inf_{x \in E} \Phi(x)$$

Pour tout vecteur  $x$  de  $E$  et tout vecteur  $y$  de  $E$  tel que  $\|y\| = 1$ , on pose

$$h_x : t \in \mathbb{R} \mapsto h_x(t) = \Phi(x + ty)$$

1. Justifier l'existence de  $m(f)$ .
2. Prouver que  $\forall x \in E, \Phi(x) = [N(f)]^2 - 2(x|f(x)) + \|x\|^4$ .
3. Montrer que  $h_x$  est une fonction polynomiale dont on précisera les coefficients.
4. justifier l'existence d'une base orthonormale  $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_p)$  de  $E$  et de réels  $(\lambda_i)_{i \in [1,p]}$  vérifiant

$$\forall i \in [1,p], f(e_i) = \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p$$

5. Calculer alors  $N(f)$  à l'aide des réels  $\lambda_i, 1 \leq i \leq p$ .
6. Exprimer  $\alpha = \sup_{z \in E, \|z\|=1} (z|f(z))$  à l'aide des  $\lambda_i$ . Déterminer l'ensemble des vecteurs  $z \in E$  unitaires tels que  $(z|f(z)) = \alpha$ .
7. On suppose que  $m(f)$  est atteint en  $a \in E$ .
  - (a) Déterminer  $h'_a(0)$ .
  - (b) Prouver que  $f(a) = \|a\|^2 a$ .
  - (c) Prouver que pour tout réel  $t$  et tout vecteur  $y$  de norme 1,

$$\Phi(a + ty) - \Phi(a) = t^2[(t + 2(y|a))^2 + 2(\|a\|^2 - (y|f(y)))]$$

- (d) Prouver que

$$m(f) = \Phi(a) \iff \begin{cases} f(a) = \|a\|^2 a \\ \forall y \in E \text{ tel que } \|y\| = 1, (y|f(y)) \leq \|a\|^2 \end{cases}$$

8. On suppose que  $\lambda_p \leq 0$ .
  - (a) Prouver que  $m(f) = \Phi(a)$  si et seulement si  $a = 0$ .
  - (b) Déterminer  $m(f_A)$  où  $f_A$  est l'endomorphisme de la question 5 des préliminaires.
9. On suppose que  $\lambda_p > 0$ .
  - (a) Démontrer que  $m(f) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2$ .
  - (b) Prouver que  $m(f) = \Phi(x) \iff \begin{cases} x \in \ker(f - \lambda_p Id_E) \\ \|x\| = \sqrt{\lambda_p} \end{cases}$ .

### Partie 3

Dans cette partie, on prend  $E = \mathbb{R}^p$  euclidien usuel.

1. Soit  $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  symétrique et telle que

$$\begin{cases} \forall i, j \in [1, p]^2, m_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in [1, p], \sum_{j=1}^p m_{i,j} = 1 \end{cases}$$

On note  $f_M$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^p$  canoniquement associé à la matrice  $M$ .

- (a) Prouver que  $\lambda = 1$  est valeur propre et donner un vecteur propre associé.
- (b) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$  un vecteur propre associé. Soit  $k \in [1, p]$  tel que  $|x_k| = \max\{|x_j|, 1 \leq j \leq p\}$ . En considérant la  $k$ -ième ligne du système  $MX = \lambda X$ , prouver que  $|\lambda| \leq 1$ .
- (c) Déterminer alors un vecteur  $a$  de  $\mathbb{R}^p$  tel que  $\Phi(a) = m(f_M)$ . (On ne cherchera pas à calculer la valeur de  $m(f_M)$ ).
- (d) En déduire l'existence d'un endomorphisme  $v$  de  $T(E)$  tel que  $[N(f_M - v)]^2 = m(f_M)$ .
- (e) Reconnaître la nature géométrique de l'endomorphisme  $v$  et donner ses éléments remarquables.
2. Soit  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  la matrice dont tous les coefficients valent 1 et  $f_B$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^p$  qui lui est canoniquement associé. Calculer  $m(f_B)$ . Trouver un vecteur  $b \in \mathbb{R}^p$  tel que  $[N(f_B - u_b)]^2 = m(f_B)$ .
3. On prend dans cette question  $p > 1$ . Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

et  $f_C$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^p$  qui lui est canoniquement associé.

- (a) Déterminer les éléments propres de la matrice  $C$ .
- (b) Calculer  $m(f_C)$ .
- (c) Trouver un vecteur  $c$  de  $\mathbb{R}^p$  tel que  $\Phi(c) = m(f_C)$  et un endomorphisme  $w \in T(E)$  tel que  $m(f_C) = [N(f_C - w)]^2$ .
- (d) Cet endomorphisme  $w$  est-il unique ?