# e3a - PSI B
# un corrigé

## Exercice 1

**1.** Le théorème de Cayley-Hamilton dit qu'une matrice est annulée par son polynôme caractéristique. Ici (calcul de déterminant par blocs ou développement par rapport à la dernière ligne)

$$\chi_A = \det(A - XI_3) = -X(X^2+1)$$

Ainsi, $X(X^2+1)$ annule $A$.

**2.** $X(X^2+1) = X(X-i)(X+i)$ étant scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et annulant $A$, $A$ est $\mathbb{C}$-diagonalisable.
Le spectre réel de $A$ est composé des racines réelles de $\chi_A$. 0 est donc la seule valeur propre réelle de $A$. Or, la seule matrice réelle diagonalisable dont 0 est l'unique valeur propre est la matrice nulle. Comme $A \neq 0$, $A$ n'est pas diagonalisable.

**3.** $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice (dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$) de la rotation d'angle $\pi/2$. On a donc $R^k$ qui est la matrice de la rotation d'angle $k\pi/2$. Un calcul par blocs donne alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = \begin{pmatrix} \cos(k\pi/2) & -\sin(k\pi/2) & 0 \\ \sin(k\pi/2) & \cos(k\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut aussi écrire que (le cas $A^0$ est particulier)

$$\forall k \in\ \mathbb{N}*,\ A^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+1} & 0 \\ (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**4.** $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace d'un espace de dimension finie. Il est donc de dimension finie. On montre par récurrence que

$$\forall k \in\ \mathbb{N},\ A^k \in \text{Vect}(I_3, A, A^2)$$

- Initialisation : c'est évident pour $k = 0, 1, 2$.
- Hérédité : soit $n \geq 2$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang $n$. On a alors l'existence de $a, b, c$ réels tels que $A^n = aA^2 + bA + cI_3$ et $A^{n+1} = aA^3 + bA^2 + cA = bA^2 + (c-a)A \in \text{Vect}(I_3, A, A^2)$. Le résultat est donc vrai au rang $n+1$.

*On aurait aussi pu utiliser la division euclidienne par $\chi_A$ pour éviter la récurrence.*
On en déduit que

$$F = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$$

Supposons que $aA^2 + bA + cI_3 = 0$. $P = aX^2 + bX + x$ annule $A$ et toute valeur propre complexe de $A$ est racine de $P$. $P$ admet donc au moins trois racines $(0, i, -i)$. Comme il est dans $\mathbb{C}_2[X]$ (qui contient $\mathbb{R}_2[X]$) il est nul. La famille $\mathcal{B} = (I_3, A, A^2)$ est donc libre et c'est finalement une base de $F$.

**5.** $S_n$ étant combinaison linéaire d'éléments de $F$ est dans $F$. Pour exprimer $S_n$ dans $\mathcal{B}$, on remarque que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^{2k} = (-1)^{k-1}A^2$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^{2k+1} = (-1)^k A$$

Dans la somme qui définit $S_n$, on particularise le terme d'indice 0 et on découpe la somme selon la parité de l'indice pour les autres termes). On obtient

$$S_n = I_3 + \left( \sum_{0 \le j \le \frac{n-1}{2}} (-1)^j \frac{\theta^{2j+1}}{(2j+1)!} \right) A + \left( \sum_{1 \le j \le \frac{n}{2}} (-1)^{j-1} \frac{\theta^{2j}}{(2j)!} \right) A^2$$

ce qui donne l'expression de $S_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

**6.** Pour montrer que $(S_n)$ converge il suffit, par théorème d'opérations, de montrer que les suites de coorodnnées ci-dessus convergent. Or, on sait que

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\theta^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sin(\theta)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\theta^{2j}}{(2j)!} = \cos(\theta)$$

On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \left( \sum_{0 \le j \le \frac{n-1}{2}} (-1)^j \frac{\theta^{2j+1}}{(2j+1)!} \right) = \sin(\theta)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left( \sum_{1 \le j \le \frac{n}{2}} (-1)^{j-1} \frac{\theta^{2j}}{(2j)!} \right) = 1 - \cos(\theta)$$

On a donc convergence de $(S_n)$.

*On peut aussi interpréter $S_n$ comme somme partielle d'ordre $n$ de la série de terme général $\frac{\theta^k}{k!} A^k$. En munissant $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'une norme multiplicative, et on sait qu'il en existe, on a $\forall k \ge 1$, $\left\| \frac{\theta^k}{k!} A^k \right\| \le \frac{(|\theta| \|A\|)^k}{k!}$ qui est le terme général d'une série, exponentielle, convergente. Comme $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de dimension finie, et donc complet, la converge absolue de la série entraîne sa convergence. Ainsi, $(S_n)$ converge.*

**7.** En outre, on a prouvé que

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = I_3 + \sin(\theta) A + (1 - \cos(\theta)) A^2$$

**8.** On a ainsi

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par $e_3$ et d'angle $\theta$.

**9.** Par théorèmes d'opérations, on a

$$\lim_{n \to +\infty} S_n^2 = M^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une rotation vectorielle n'est une symétrie vectorielle que quand son angle est nul (on a alors l'identité qui est la symétrie par rapport à $\mathbb{R}^3$ de drirection $\{0\}$) ou égal à $\pi$ (on a alors la symétrie orthogonale par rapport à l'axe). La condition cherchée est donc $2\theta = 0[\pi]$ ou encore

$$\theta = 0[\pi/2]$$

*$B$ est la matrice d'une symétrie vectorielle quand $B^2 = I_3$. Ici, $(M^2)^2 = M^4$ est la rotation d'angle $4\theta$ et d'axe $\mathrm{Vect}(e_3)$. $M^2$ est donc la matrice d'une symétrie quand $4\theta = 0[2\pi]$, ce qui redonne la même condition.*

## Exercice 2

### Préliminaires

**1.** Notons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impair, on a

$$H_{2n+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} + \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2j+1} = \frac{1}{2} H_n + \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2j+1}$$

On en déduit que

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2j+1} = H_{2n+1} - \frac{1}{2} H_n$$

Avec le résultat admis (et puisque $o(\ln(2n+1)) = o(\ln(n))$ puisque $\ln(2n+1) = \ln(n) + \ln(2) + \ln(1 + \frac{1}{2n}) \sim \ln(n)$) on a alors

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2j+1} = \ln(2n+1) - \frac{1}{2}\ln(n) + o(\ln(n))$$

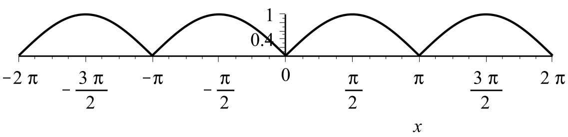
En utilisant encore $\ln(2n+1) = \ln(n) + o(\ln(n))$ on conclut que

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2j+1} = \frac{1}{2}\ln(n) + o(\ln(n)) \sim \frac{\ln(n)}{2}$$

**2.** Par croissances comparées, $n^{3/2} \frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \to 0$. On en déduit, par comparaison aux séries de Riemann, que $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ est absolument convergente.

### Enoncé

**1.** On utilise le graphe de sin sur $[0, \pi]$. On complète par $\pi$-périodicité.




$f$ étant paire, les coefficients "en sinus" sont nuls et ceux "en cosinus" valent (en tenant compte de la positivité du sinus sur $[0, \pi]$)

$$\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)\cos(2nx)\ dx,\ a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)\ dx = \frac{2}{\pi}$$

Avec les formules de trigonométrie, on obtient

$$\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin((1+2n)x) + \sin((1-2n)x))\ dx = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}$$

La fonction $f$ est $\pi$-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée de $f$ qui vaut $f$ car $f$ est continue. On a finalement

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}$$

**2.** En prenant la valeur $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

**3.** On peu alors écrire que

$$\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$$

**4.** En regroupant les sommes dans **2**, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| = \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{1-\cos(2nx)}{4n^2-1}$$

Comme $1-\cos(2y) = 2\sin^2(y)$ on a finalement

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}$$

**5.a** Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $x \mapsto \frac{|\sin(mx)|}{\sin(x)}$ est continue sur $]0,\pi/2]$ et prolongable par continuité en 0 par la valeur $|m|$ (en utilisant $\sin(y) \sim_0 y$). $\rho_m$ est donc bien définie (intégrale d'une fonction continue sur un segment).

**5.b** Fixons $x \in \mathbb{R}$. Comme $\forall y,\ \sin^2(y) = \frac{1}{2}(\cos(2y)-1)$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sin^2((k+1)x) - \sin^2(kx) = \frac{1}{2}\left(\cos(2(k+1)x) - \cos(2kx)\right)$$

Comme $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin((p+q)/2)\sin((p-q)/2)$ on peut alors écrire

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sin^2((k+1)x) - \sin^2(kx) = \sin((2k+1)x)\sin(x)$$

En sommant ces relations de $k = 0$ à $k = n$, un télescopage s'opère et on obtient

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \sin((2k+1)x)\right)\sin(x) = \sin^2((n+1)x)$$

**5.c** On a

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2nm-1} = \sum_{k=0}^{2nm-1} \frac{1}{2k+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(2nm-1) \sim \frac{\ln(n)}{2}$$

le second équivalent provenant de $\ln(2nm-1) = \ln(n) + \ln(2m) + \ln(1-1/(2nm))$. Ainsi,

$$\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2nm-1}}{4n^2-1} \sim \frac{\ln(n)}{8n^2}$$

est le terme général d'une série absolument convergente (préliminaires).

**5.d** $m \in \mathbb{N}^*$ est fixé. Avec la question **4** et la définition de $\rho_m$, on a

$$\rho_m = \frac{16}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}\frac{\sin^2(nmx)}{\sin(x)}\, dx$$

$g_n\ :\ x \mapsto \frac{\sin^2(nmx)}{(4n^2-1)(\sin(x))}$ est le terme général d'une suite de fonctions continues sur $]0,\pi/2]$. De plus $\sum(g_n)$ converge simplement sur $]0,\pi/2]$, de somme simple continue sur $]0,\pi/2]$ (cette somme simple est $x \mapsto \frac{\pi}{8}\frac{|\sin(mx)|}{\sin(x)}$). Enfin

$$\int_0^{\pi/2} |g_n(x)|\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nmx)}{|4n^2-1|(\sin(x))}\, dx$$

et avec la question **5.b**,

$$\forall x \in [0,\pi/2],\ \sin^2(nmx) = \sin(x)\sum_{k=0}^{nm-1}\sin((2k+1)x)$$

ce qui donne

$$\int_0^{\pi/2}|g_n(x)|\,dx = \frac{1}{|4n^2-1|}\sum_{k=0}^{nm-1}\int_0^{\pi/2}\sin((2k+1)x)\,dx = \frac{1}{|4n^2-1|}\sum_{k=0}^{2nm-1}\frac{1}{2k+1}$$

On vient de voir que c'est le teme général d'une série convergente. Le théorème d'interversion somme-intégrale s'applique et donne

$$\rho_m = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)\,dx$$

Le même calcul que ci-dessus (sans les modules) donne alors

$$\rho_m = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2nm-1}}{4n^2-1}$$

**6.a** $g$ est continue sur $]0,\pi/2]$ et

$$g(x) = \frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)} \sim_0 \frac{x^3/6}{x^2} = \frac{x}{6} \to 0$$

$g$ est donc prolongeable par continuité en 0 (par 0).

**6.b** On a immédiatement

$$\rho_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}|\sin(mx)|\left(g(x)+\frac{1}{x}\right)\,dx$$

La question précédente permet de découper l'intégrale (les deux morceaux existent comme intégrales de fonctions continues sur le segment $[0,\pi/2]$) et on obtient

$$\rho_m = \alpha_m + \beta_m$$

**7.a** $t \mapsto \frac{|\sin(t)|}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur 1). Elle est donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. Donc en particulier sur out $[0,u]$ pour $u>0$. A fortiori, $G(u)$ existe.

**7.b** Le changement de variable $x = t/m$ (licite puisque $t \mapsto \frac{t}{m}$ est un $C^1$ difféomorphisme de $]0,m\pi/2[$ dans $]0,\pi/2[$)

$$G\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \int_0^{m\pi/2}\frac{|\sin(t)|}{t}\,dt = \int_0^{\pi/2}\frac{|\sin(mx)|}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\beta_m$$

**7.c** Par relation de Chasles, on a

$$G(u) = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(t)|}{t}\,dt + \int_{N\pi}^{u}\frac{|\sin(t)|}{t}\,dt$$

$v_k$ n'étant défini que pour $k \geq 1$ (même si la valeur $k=0$ ne pose en fait pas de problème), on doit mettre de côté le terme d'indice 0. On a alors

$$G(u) = \int_0^{\pi}\frac{\sin(t)}{t}\,dt + \sum_{n=1}^{N-1}v_n + \int_{N\pi}^{u}\frac{|\sin(t)|}{t}\,dt$$

*Ceci est vrai pour tout entier naturel $N$. Le fait qu'il soit égal à la partie entière de $u/\pi$ n'intervient pas ici).*

**7.d** Remarquons tout d'abord que (en posant $x = t - k\pi$)

$$v_k = \int_0^\pi \frac{|\sin(x)|}{x + k\pi}\, dx$$

Comme sin est positive sur $[0, \pi]$ et comme $k\pi \le x + k\pi \le (k+1)\pi$ on a alors

$$\frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin(x)\, dx \le v_k \le \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \sin(x)\, dx = \frac{2}{k\pi}$$

On en déduit que

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} \le \sum_{n=1}^{N-1} v_n \le \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$$

De plus, comme $N = \lfloor u/\pi \rfloor$, on a $N\pi \le u \le (N+1)\pi$ et donc

$$0 \le \int_{N\pi}^{u} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt \le \int_{N\pi}^{(N+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt = v_N \le \frac{2}{N\pi}$$

Avec la question précédente,

$$\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\, dt + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} \le G(u) \le \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\, dt + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

Il reste à remarquer que $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\, dt \ge 0$ pour conclure que

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} \le G(u) \le \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\, dt + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

**7.e** Avec le préliminaire, on a $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim \ln(N)$ et $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \sim \ln(N-1)$ quand $N \to +\infty$. De plus $\ln(N-1) = \ln(N) + \ln(1 - 1/N) \sim \ln(N)$. Enfin, quand $u \to +\infty$, $N \to +\infty$ et $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est un terme constant négligeable devant $\ln(N)$. On a donc le majorant et le minotant de $G(u)$ tous deux équivalent à $\ln(N)$ et il en est alors de même de $G(u)$.
Comme $\ln(u/\pi - 1) \le \ln(N) \le (u\pi)$ on a aisément $\ln(N) \sim \ln(u/\pi) \sim \ln(u)$ ($\ln(u/\pi) = \ln(u) - \ln(\pi)$ et le second terme est négligeable). Finalement,

$$G(u) \underset{u \to +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(u)$$

**8.** On en déduit que

$$\beta_m = \frac{2}{\pi} G\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sim \frac{4}{\pi^2} \ln\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sim \frac{4\ln(m)}{\pi^2}$$

De plus $|\alpha_m| \le \|g\|_{\infty,[0,\pi/2]}$ est borné et donc négligeable devant $\beta_m$. On a alors

$$\rho_m \sim \beta_m \sim \frac{4\ln(m)}{\pi^2}$$

# Exercice 3

## Préliminaires

**1.** L'identité proposée est l'égalité de Taylor avec reste intégrale. On la prouve par récurrence sur $n \ge 1$.

- Initialisation : si $n = 1$, le théorème fondamental de primitivation appliqué à la fonction continue $f'$ donne $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\, dt$ ce qui donne la relation voulue.

- Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que le résultat soit vrai au rang $n$. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Une intégration par partie donne

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

ce qui permet immédiatement de passer du résultat au rang $n$ à celui au rang $n+1$.

Si $x \neq 0$, $t \mapsto t/x$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $]0,x[$ dans $]0,1[$. On peut alors poser $u = t/x$ dans l'intégrale précédente pour obtenir

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(1-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(xu)x\,du = \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(xu)\,du$$

Le résultat reste vrai si $x = 0$ (il se lit $0 = 0$). On a donc bien

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(xt)\,dt$$

**2.** Le changement de variable $t' = x - t$ donne immédiatement

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x u(x-t)v(t)\,dt = \int_0^x u(t')v(x-t')\,dt'$$

(les bornes sont inversées mais un signe moins apparaît dans le changement qui nous permet de les remettre “dans le bon sens”)

**3.a** *Il me semble que les hypothèses de l'énoncé sont insuffisantes pour conclure, au moins avec les théorèmes au programme. Je vais supposer EN PLUS DES HYPOTHESES DE L'ENONCE que l'application $(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $K$.*

Fixons $x \in [a,b]$. L'application $t \mapsto f(x,t)$ étant continue sur l'intervalle $[c,d]$, le théorème fondamental indique que $h_2 : y \mapsto H(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = h_2'(y) = f(x,y)$$

Fixons maintenant $y \in [c,d]$. On veut étudier $h_1 : x \mapsto H(x,y)$. Il s'agit d'une intégrale à paramètre.

- $\forall x \in [a,b],\ t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[c,y]$ et donc intégrable sur ce segment.
- $\forall t \in [c,y],\ x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.
- $\forall x \in [a,b],\ t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[c,y]$ (avec l'hypothèse supplémentaire faite).
- $\forall x \in [a,b],\ \forall t \in [c,y],\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \|\frac{\partial f}{\partial x}\|_{\infty,K}$, la norme infinie existant puisque l'on a une fonction continue sur un compact (avec l'hypothèse supplémentaire faite). Le majorant est constant et donc intégrable sur le segment $[c,y]$.

Le théorème de régularité des intégrales à paramètres s'applique et indique que $h_1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ avec

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = h_1'(x) = \int_c^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

**3.b** On a $F : x \mapsto H(x, G(x))$. Pour utiliser les théorèmes d'opérations, on aimerait que $H$ soit différentiable ou, pour faire plus simple, de classe $\mathcal{C}^1$. Comme on sait déjà qu'elle admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable, il nous reste à justifier que ces dérivées partielles sont continues.

- $\frac{\partial H}{\partial y} = f$ est bien continue sur $K$.

- On a

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x_0+h,y_0+k)=\int_c^{y_0+k}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h,t)\,dt=\int_c^{y_0}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h,t)\,dt+\int_{y_0}^{y_0+k}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h,t)\,dt$$

La fonction $h_1$ de la question précédente étant de classe $\mathcal{C}^1$ (à dérivée continue) le premier terme du membre de droite tend vers $\frac{\partial H}{\partial x}(x_0,y_0)$. On peut majorer le second en module par $|k|$ fois le norme infinie de $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur $K$ et ce majorant tend vers 0. Ceci montre la continuité de $\frac{\partial H}{\partial x}$ en $(x_0,y_0)$.

On peut maintenant affirmer que $F\in\mathcal{C}^1$ et (dérivation composée) que

$$\forall x\in[a,b],\ F'(x)=\frac{\partial H}{\partial x}(x,G(x))+G'(x)\frac{\partial H}{\partial y}(x,G(x))$$

Avec la question **3.1** on a finalement

$$\forall x\in[a,b],\ F'(x)=f(x,G(x))G'(x)+\int_c^{G(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

## Partie 1

**1.** Il suffit de choisir

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&1\\0&\dots&\dots&\dots&0\end{pmatrix}$$

**2.** Comme $\varphi$ est continue, le cours indique que le système $X'=AX+B$ associé à la condition initiale $X(0)=\begin{pmatrix}a_0\\\vdots\\a_{n-1}\end{pmatrix}$. Admet une unique solution. En notant $h$ la première coordonnée de $X$, on obtient une solution de $(E_1)$ telle que $h^{(k)}(0)=a_k$.

Si $h_1$ et $h_2$ sont deux telles solutions alors $X_1$ et $X_2$ obtenus comme en question précédente sont deux solution du problème de Cauchy précédent et sont donc égales. Il en est de même de leurs premières cordonnées $h_1$ et $h_2$.

On a donc l'existence et l'unicité demandée.

**3.** Soit $h$ l'unique solution de **2**. $h$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et on peut lui appliquer la question bf 1. du préliminaire. On obtient alors directement (puisque $h^{(n)}=\varphi$)

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{k!}x^k+\frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}\varphi(xt)\,dt$$

## Partie 2

**1.** Une intégration par partie donne

$$g(x)=[s(x-t)\psi_1(t)]_{t=0}^{t=x}+\int_0^x s'(x-t)\psi_1(t)\,dt$$

Comme $s(0)=\psi_1(0)=0$, on a donc

$$g(x)=\int_0^x s'(x-t)\psi_1(t)\,dt$$

**2.** Notons $G\ :\ x \mapsto x$ et $f\ :\ (x,y) \mapsto s'(x-y)\psi_1(y)$. Soit $b > 0$. $G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,b]$ dans $[a,b]$ ; $f$ vérifie les hypothèses de la partie préliminaire sur $K = [0,b] \times [0,b]$. On en déduit que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,b]$ avec

$$g'(x) = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt = s'(0)\psi_1(x) + \int_0^x s''(x-t)\psi_1(t)\ dt$$

Si $n \geq 3$ alors $s'(0) = 0$ et on a donc

$$g'(x) = \int_0^x s''(x-t)\psi_1(t)\ dt$$

Ceci montre que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dérivable à droite en 0. On montre de même que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ et dérivable à gauche en 0 avec la même expression pour la dérivée. Les nombres dérivés à droite et gauche en 0 sont égaux et $g$ est dérivable en 0. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \int_0^x s''(x-t)\psi_1(t)\ dt$$

**3.** Il suffit alors de faire une intégration par parties (toujours en supposont $n \geq 3$ et à partir de la question précédente)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \left[-s'(x-t)\psi_1(t)\right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x s'(x-t)\psi(t)\ dt$$

Avec $\psi_1(0) = s'(0) = 0$, on obtient que

$$g'(x) = \int_0^x s'(x-t)\psi(t)\ dt$$

**4.** On part de l'expression pour $k = n-1$ :

$$g^{(n-1)}(x) = \int_0^x s^{(n-1)}(x-t)\psi(t)\ dt$$

On applique la partie préliminaire comme plus haut pour obtenir

$$g^{(n)}(x) = s^{(n-1)}(0)\psi(x) + \int_0^x s^{(n)}(x-t)\psi(t)\ dt = \psi(x) + \int_0^x s^{(n)}(x-t)\psi(t)\ dt$$

**5.** On a alors

$$\begin{aligned}
g^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n c_k g^{(n-k)}(x) &= \psi(x) + \int_0^x s^{(n)}(x-t)\psi(t)\ dt + \sum_{k=1}^n c_k \int_0^x s^{(n-k)}(x-t)\psi(t)\ dt \\
&= \psi(x) + \int_0^x \left(s^{(n)}(x-t) + \sum_{k=1}^n c_k s^{(n-k)}(x-t)\right)\psi(t)\ dt \\
&= \psi(x)
\end{aligned}$$

puisque $s$ est solution de $(H_2)$.

**6.** En partie **1** on est dans le cas où $c_1 = \cdots = c_n = 0$ et $\psi = \varphi$. Dans ce cas, $(H_2)$ s'écrit $y^{(n)} = 0$ et $s\ :\ x \mapsto \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ est solution de $(H_2)$ avec $s(0) = \cdots = s^{(n-2)}(0) = 0$ et $s^{(n-1)}(0) = 1$. On vient donc de voir que

$$g\ :\ x \mapsto \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(t)\ dt$$

est solution de $(E_1)$. Un changement de variable comme en question **1** du préliminaire montre que

$$g\ :\ x \mapsto \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi(xt)\ dt$$

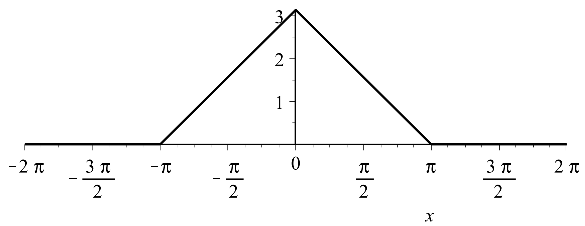
De plus, $g(0) = \cdots = g^{(n-1)}(0) = 0$ avec les expressions admises plus haut.
Enfin, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k!}x^k$ est solution de l'équation homogène associée à $(E_1)$. On peut donc dire que

$$h\ :\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k!}x^k + \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi(xt)\ dt$$

est solution de $(E_1)$ et on a $h^{(k)}(0) = a_k$ pour $k = 0, \ldots, n-1$.

## Application

**1.** La fonction est affine par morceaux et continue et sa représentation est la suivante




**2.** On est dans le cas $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$. On a $s = \sin$ et une solution de $(E_3)$ est

$$g\ :\ x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)\alpha(t)\ dt$$

On a alors (avec des intégrations par parties)

$$\forall x \in [0,\pi],\ g(x) = \int_0^x \sin(x-t)(\pi - t)\ dt = \pi - x + \sin(x) - \pi\cos(x)$$

$$\forall x \in [-\pi,0],\ g(x) = \int_0^x \sin(x-t)(\pi + t)\ dt = \pi + x - \sin(x) - \pi\cos(x)$$

et comme $\alpha$ est nulle hors de $[-\pi,\pi]$,

$$\forall x \geq \pi,\ g(x) = \int_0^\pi \sin(x-t)(\pi - t)\ dt = 2\sin(x) - \pi\cos(x)$$

$$\forall x \leq \pi,\ g(x) = \int_0^{-\pi} \sin(x-t)(\pi + t)\ dt = -2\sin(x) - \pi\cos(x)$$

**3.** Comme cos et sin sont deux solutions indépendantes de l'équations homogène, l'ensemble des solutions est

$$g + \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$$