e3a - PSI A
durée 3 heures - calculatrices interdites

Partie I.

1. arccos étant continue sur $[-1,1]$ (bijection réciproque d'une fonction continue) et cos étant continue sur $\mathbb{R}$, c_n est continue sur $[-1,1]$ par théorème d'opérations.

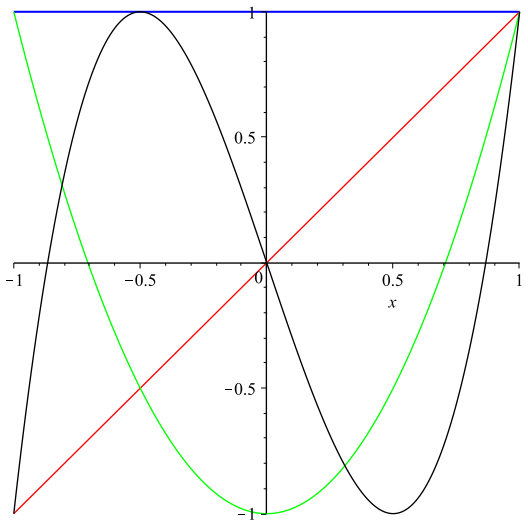
2. Soit $x \in [-1,1]$; on a $\cos(\arccos(x)) = x$. On a alors immédiatement

$$c_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad c_1(x) = x$$

Les formule élémentaire de trigonométrie donnent

$$c_2(x) = 2x^2 - 1, \ c_3(x) = 4x^3 - 3x$$

3. On obtient la représentation suivante



4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [-1,1]$, on pose $\theta = \arccos(x)$. Alors $c_n(x) = \cos(n\theta)$. Comme $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta)$. On a donc

$$c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2xc_n(x)$$

en utilisant toujours $\cos(\arccos(x)) = x$.

5. On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \deg(T_n) = n \text{ et si } n \geq 1 \text{ le coefficient dominant de } T_n \text{ est } 2^{n-1}$$

Le coefficient dominant de T_0 est lui égal à 1.

- <u>Initialisation</u> : le résultat est vrai aux rang 0 et 1 par définition.
- <u>Hérédité</u> : soit $n \geq 1$ tel que le résultat est vrai jusqu'au rang n. On a alors $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ qui est un polynôme de degré $\leq n+1$ (différence de deux tels polynômes) avec un un coefficient devant X^{n+1} égal à deux fois le coefficient dominant de T_n et valant donc 2^n. Le résultat est donc vrai au rang $n+1$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(T_0, \dots, T_n)$ est échelonnée en degré et donc libre. Elle est composée de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et cet espace est de dimension $n+1$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. Soit $x \in [-1,1]$. On montre par une récurrence immédiate à partir de la question **4** et de la définition des T_n que $c_n(x) = T_n(x)$ pour tout n (on initialise pour $n=0$ et $n=1$ et les deux suites $(T_n(x))$ et $(c_n(x))$ vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2).

Partie II.

1.a. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. P et Q sont bornés sur $[-1,1]$ (continus sur le segment) et

$$\forall x \in [-1,1], \ \left| \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right| \leq \frac{\|P\|_{\infty,[-1,1]} \|Q\|_{\infty,[-1,1]}}{\sqrt{1-x^2}}$$

La fonction $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie et continue sur $]-1,1[$. Comme elle est paire, pour montrer qu'elle est intégrable sur $]-1,1[$, il suffit de montrer qu'elle est intégrable sur $[0,1[$. Or $w(x) \sim_1 \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$ est intégrable au voisinage de 1 et w l'est donc aussi. La majoration précédente montre que $x \mapsto \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$ (continue sur $]-1,1[$ et intégrable aux voisinage de 1 et -1). L'application proposée existe donc.
Elle est clairement symétrique et linéaire par rapport à la seconde variable. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $(P|P) = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \geq 0$ (on intègre une fonction positive et les bornes sont dans le bon sens). Comme la fonction intégrée est positive ET continue sur $]-1,1[$, il n'y a nullité que si la fonction est nulle c'est à dire si P est nulle sur $]-1,1[$. Ceci implique la nullité de P (polynôme avec une infinité de racines). Finalement, l'application est définie postive et définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

1.b. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On a

$$\int_0^\pi \cos(p\theta)\cos(q\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos((p+q)\theta) + \cos((p-q)\theta))\, d\theta$$

Si $p+q=0$, c'est-à-dire $p=q=0$, l'intégrale vaut π.
Sinon, si $p-q=0$ l'intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$. Enfin, dans le cas général ($p \neq q$), l'intégrale vaut 0 car $\sin((p \pm k)\theta)$ vaut 0 en π et en 0.

$$I_{p,q} = \int_0^\pi \cos(p\theta)\cos(q\theta)\, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi & \text{si } p = q = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } p = q \neq 0 \end{cases}$$

1.c. cos étant un $\mathcal{C}^1$ difféomorhisme de $]0,\pi[$ dans $]-1,1[$, on peut poser $x = \cos(\theta)$ pour obtenir (puisque $T_n = c_n$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ quand $\theta \in]0,\pi[$)

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_p(x)T_q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^\pi \cos(p\theta)\cos(q\theta)\, d\theta = I_{p,q}$$

La famille $(T_0, \dots, T_n)$ est ainsi orthogonale d'après la question précédente. C'est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ mais pas orthonormale puisque $\|T_0\|^2 = \pi$ et $\forall k \geq 1, \ \|T_k\|^2 = \pi/2$ ne valent pas 1.

1.d. T_n étant orthogonal à $T_0, \dots, T_{n-1}$, il est dans l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(T_0, \dots, T_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1.e. Pour $n \geq 1$, $T_n - 2^{n-1}X^n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'après **I.5**. Son produit scalaire avec T^n est donc nul ce qui donne

$$(T_n|X^n) = \frac{1}{2^{n-1}}\|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2^n}$$

2.a. La famille $(T_0, \dots, T_n)$ étant une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, tout élément de $\mathbb{R}_n[X]$ se décompose de façon unique sur cette famille. Mieux (calcul en b.o.n.)

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{(P|T_k)}{\|T_k\|^2} T_k$$

2.b. On vient de voir que

$$b_n = \frac{(P|T_n)}{\|T_n\|^2} = \frac{2(P|T_n)}{\pi}$$

En écrivant $P = X^n + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, comme $(Q|T_n) = 0$ on obtient

$$b_n = \frac{2(X^n|T_n)}{\pi} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

2.c. Toujours d'après les formules en bases orthogonales,

$$\|P\|^2 = \sum_{k=0}^{n} b_k^2 \|T_k\|^2 \geq b_n^2 \|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2} b_n^2 = \frac{\pi}{2^{2n-1}}$$

2.d. On vient de voir que

$$\forall (a_0, \dots, a_{n-1}), \quad \int_{-1}^{1} \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}} \, dt \geq \frac{\pi}{2^{2n-1}} \qquad (*)$$

$\frac{T_n}{2^{n-1}}$ étant un polynôme unitaire de degré n, il existe $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que ce polynôme s'écrive $X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Pour ce choix des a_k, on a

$$\int_{-1}^{1} \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = \left\| \frac{T_n}{2^{n-1}} \right\|^2 = \frac{\|T_n\|^2}{2^{2n-2}} = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \qquad (**)$$

$(*)$ donne un minorant des quantités proposées et $(**)$ montre que ce minorant est atteint. C'est donc un minimum et

$$\min_{(a_0,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \int_{-1}^{1} \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = \frac{\pi}{2^{2n-1}}$$

On a donc mieux qu'une borne inférieure.

Partie III.

1. Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. On a $x_k \in [-1, 1]]$ et donc $T_n(x_k) = c_n(x_k)$. Comme $\theta_k \in [0, \pi]$, $c_n(x_k) = \cos(n\theta_k) = 0$ car $n\theta_k = \pi/2[\pi]$. $x_1, \dots, x_n$ sont donc racines de T_n. Elles sont distinctes car cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$ et car les θ_k sont des éléments distincts de $[0, \pi]$. Comme $\deg(T_n) = n$, T_n admet enfin au plus n racines (comptées avec leurs multiplicités). Finalement, $x_1, \dots, x_n$ sont exactement les racines de T_n et ce sont, en plus, des racines simples.

2.a. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange, $Q = \sum_{i=1}^{n} Q(x_i) L_i$ (c'est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui prend la valeur $Q(x_i)$ au point x_i et il n'y en a qu'un et donc c'est Q). Ceci montre que $(L_1, \dots, L_n)$ (famille de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$) engendre $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par cardinal et dimension, c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

2.b. Soit $G \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a $\sum_{i=0}^{k} G(x_i) L_i = G$ (on vient de le rappeler) et donc

$$\int_{-1}^{1} \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = \sum_{i=1}^{n} G(x_i) \int_{-1}^{1} \frac{L_i(t)}{\sqrt{1-t^2}} \, dt$$

ce qui est la formule demandée.

2.c. La division euclidienne de $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ par T_n s'écrit $R = T_nS + U$ avec $U \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. $T_nS = R - U$ est de degré $\leq 2n-1$ et T_n de degré n ; S est donc de degré $\leq n-1$. On a ainsi existence de la décomposition demandée.
Si $R = T_nS + U = T_nS_1 + U_1$ avec $U, U_1 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ alors $U - U_1 = T_n(S - S_1)$ et si $S \neq S_1$, $\deg(U - U_1) \geq \deg(T_n) = n$ ce qui est impossible. Ainsi $S = S_1$ et donc $U = U_1$ cequi donne l'unicité de la décomposition (c'est en fait l'unicité dans la division euclidienne).
On a alors T_n et S que sont orthogonaux (avec **II.1.4**) et

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt &= (\, R\, ,\, 1\,) \\
&= (\, T_nS + U\, ,\, 1\,) \\
&= (\, T_n\, ,\, S\,) + (\, U\, ,\, 1\,) \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{U(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R(x_i)
\end{aligned}$$

car $U(x_i) = R(x_i)$ puisque $T_n(x_i) = 0$.

2.d.i On a $\forall \theta \in [0, \pi],\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Dérivons cette relation :

$$\forall \theta \in [0, \pi],\ \sin(\theta) T_n'(\cos(\theta)) = n \sin(n\theta)$$

Comme $\sin(\theta_k) = \sqrt{1 - \cos(\theta_k)^2}$ (car $\theta_k \in [0, \pi]$ et son sinus est positif) on obtient

$$\forall k \in [|1, n|],\ \sqrt{1 - x_k^2}\, T_n'(x_k) = n \sin(n\theta_k) = n(-1)^{k+1}$$

On a donc bien ($\sqrt{1 - x_k^2} \neq q0$)

$$T_n'(x_k) = \frac{(-1)^{k+1} n}{\sqrt{1 - x_k^2}} = \frac{(-1)^{k+1} n}{\sin(\theta_k)}$$

2.d.ii Notons que $T_n'(x_k) \neq 0$ avec l'expression que l'on vient d'obtenir. T_n est scindé à racines simples égales à $x_1, \ldots, x_n$. Comme il est de coefficient dominant 2^{n-1}, on a

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$$

On a donc

$$\forall x \neq x_k,\ \psi_k(x) = \frac{2^{n-1}}{T_n'(x_k)} \prod_{i=1}^{n} (X - x_i) = Q_k(x)$$

et $Q_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a

$$\lim_{x \to x_k} \psi_k(x) = \frac{1}{T_n'(x_k)} \lim_{x \to x_k} \frac{T_n(x) - T_n(x_k)}{x - x_k} = 1 = \psi_k(x_k)$$

Par continuité de Q_k, l'égalité $\psi_k = Q_k$ est vraie sur tout $\mathbb{R}$. ψ_k est donc un polynôme de degré $n-1$. Il est nul en x_i pour $i \neq k$ et vaut 1 en x_k. C'est donc exactement L_k.

2.d.iii En multipliant haut et has par $\theta - \theta_k$ on voit apparaître deux taux d'accroissement et on a alors

$$\lim_{\theta \to \theta_k} \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)} = \frac{j \sin(j\theta_k)}{\sin(\theta_k)}$$

L'application $\theta \mapsto \frac{\cos(j\theta)-\cos(j\theta_k)}{\cos(\theta)-\cos(\theta_k)}$ est continue sur $[0, \pi] \setminus \{\theta_k\}$ (toujours par bijectivité de cos sur $[0, \pi]$, le dénominateur ne s'annule qu'en θ_k). On vient de voir qu'elle est prolongeable par continuité en θ_k. Son intégrale existe donc bien sur le segment $[0, \pi]$ (ce n'est même pas une intégrale généralisée).

Par définition (et **2.d.ii**), on a (le changement de variable a été justifié dans une question antérieure)

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \int_{-1}^{1} \frac{\psi_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) - T_n(x_k)}{(x - x_k) T_n'(x_k)\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{T_n'(x_k)} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta) - \cos(n\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)} d\theta \quad \text{avec} \quad x = \cos(\theta) \\
&= \frac{1}{T_n'(x_k)} u_n \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{n} u_n \sin(\theta_k)
\end{aligned}$$

2.d.iv On a

$$\begin{aligned}
u_{j+1} + u_{j-1} &= \int_0^{\pi} \frac{\cos((j+1)\theta) - \cos((j+1)\theta_k) + \cos((j-1)\theta) - \cos((j-1)\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}\, d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} \frac{\cos(j\theta)\cos(\theta) - \cos(j\theta_k)\cos(\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}\, d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} \frac{\cos(j\theta)\cos(\theta) - \cos(j\theta)\cos(\theta_k) + \cos(j\theta)\cos(\theta_k) - \cos(j\theta_k)\cos(\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}\, d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} \left(\cos(j\theta) + \cos(\theta_k) \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)} \right) d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} \cos(j\theta)\, d\theta + 2(\cos(\theta_k)) u_j \\
&= 2\cos(\theta_k) u_j
\end{aligned}$$

ce qui correspond à la formule demandé à un décalage d'indice près.

2.d.v La suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire $a_{j+1} - 2\cos(\theta_k) u_j + u_{j-1} = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 2\cos(\theta_k) r + 1 = 0$ et a pour racines $e^{i\theta_k}$ et $e^{-i\theta_k}$. On en déduit qu'il existe a et b réels tels que

$$\forall j \in \mathbb{N},\ u_j = a\cos(j\theta_k) + b\sin(j\theta_k)$$

Or $u_0 = 0$ donc $a = 0$ et $u_1 = \pi$ donc $b = \frac{\pi}{\sin(\theta_k)}$ (on a bien $\sin(\theta_i) \neq 0$). Ainsi,

$$u_n = \pi \frac{\sin(n\theta_k)}{\sin(\theta_k)} = \pi \frac{(-1)^{k+1}}{\sin(\theta_k)}$$

et avec **2.d.iii**

$$\lambda_k = \frac{\pi}{n}$$

3. 2.c.ii donne alors pour tout $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} R(x_i) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} R\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)$$