# e3a PSI B (4 heures)

**un corrigé**

## Exercice 1.

**1.** $x = \frac{1}{4}y^2$ est une équation cartésienne de $\Gamma$.

**2.** $\Gamma$ est une parabole d'axe $Ox$. Son foyer $F$ est sur cet axe et il existe $a > 0$ tel que $F_1 = (a, 0)$. Sa directrice $D$ a alors pour équation $x = -a$. Comme $\Gamma = \{M/\ d(M, F) = d(M, D)\}$ et comme $(a, 2\sqrt{a}) \in \Gamma$, on a $2\sqrt{a} = 2a$ et ainsi $a = 1$. $\Gamma$ est donc la parabole de foyer $F = (1, 0)$ et de directrice d'équation $x = -1$.

**3.** La tangente à $\Gamma$ en $M(t)$ passe par $M(t)$ et est dirigée par $M'(t) = (2t, 2)$. Une équation cartésienne de cette tangente est donc

$$T_t\ :\ (x - t^2) - t(y - 2t) = 0$$

**4.** Le projeté orthogonal $P(t)$ de $F$ sur $T_t$ est le point de coordonnées $(x, y)$ tel que

$$\begin{cases} (x - t^2) - t(y - 2t) = 0 \\ t(x - 1) + y = 0 \end{cases}$$

($P(t)$ est sur $T_t$ et $\overrightarrow{FP(t)}$ est orthogonal à $T_t$). On a donc (résolution aisée) $P(t) = (0, t)$. La podaire de $\Gamma$ par rapport au foyer est donc l'axe des ordonnées.

**5. 5.1.** De même, projeté orthogonal $P(t)$ de $O$ sur $T_t$ est le point de coordonnées $(x, y)$ tel que

$$\begin{cases} (x - t^2) - t(y - 2t) = 0 \\ tx + y = 0 \end{cases}$$

On résoud aisément ce système pour obtenir un système d'équations paramétriques de la podaire :

$$X(t) = -\frac{t^2}{t^2 + 1},\ Y(t) = \frac{t^3}{1 + t^2}$$

**5.2.** On a

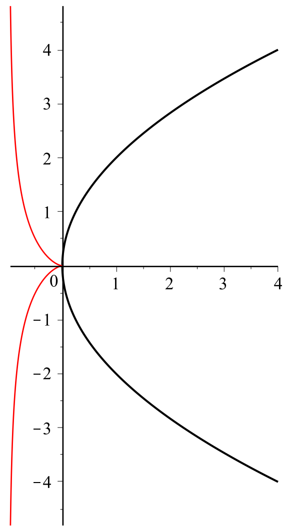
$$X'(t) = -\frac{2t}{(1 + t^2)^2} \quad \text{et} \quad Y'(t) = \frac{t^2(t^2 + 3)}{(t^2 + 1)^2}$$

Il y a annulation simultanée des dérivées quand $t = 0$ seulement. En $t = 0$ on a donc un point stationnaire. Comme

$$X(t) = -t^2 + o_0(t^3) \ \text{ et } \ Y(t) = t^3 + o_0(t^3)$$

On obtient que la tangente est dirigée par $(-1, 0)$ et que l'on a un point de rebroussement de première espèce (les dérivées seconde et troisième en 0, qui sont $(-2, 0)$ et $(0, 6)$, sont indépendantes).

Quand $t \to +\infty$, $X(t) \to -1$ et $Y(t) \to +\infty$ et $x = -1$ (la directrice de la parabole) est asymptote à la courbe. L'étude est la même en $-\infty$.




## Exercice 2.

### Partie A.

**1.** Notons $f_n \ : \ x \mapsto \frac{1}{1+(nx)^2}$. $f_n(0) = 1$ est le terme général d'une série grossièrement divergente. Si $x \neq 0$, $f_n(x) = O(1/n^2)$ est le terme général d'une série absolument convergente. Finalement, $\sum(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ et

$$D = \mathbb{R}^*$$

**2.** Si $0 < x < y$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) > f_n(y)$. En sommant, on a donc $f(x) > f(y)$. $f$ est ainsi strictement décroissante sur $I$.

**3.** On utilise le théorème de régularité des sommes de séries de fonctions.

- $\forall n, \ f_n \in \mathcal{C}^1(I)$ et $f_n' \ : \ x \mapsto -\frac{2n^2x}{(1+(nx)^2)^2}$.
- $\sum(f_n)$ converge simplement sur $I$.
- $\forall [a,b] \subset I, \ \forall x \geq a, \ \forall n \geq 1, \ |f_n'(x)| \leq \frac{2n^2b}{(1+(na)^1)^2}$. Ainsi $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{2n^2b}{(1+(na)^1)^2} = O(1/n^2)$ est le terme général d'une série absolument convergente ce qui nous indique que $\sum(f_n')$ converge normalement sur tout segment de $I$.

Le théorème s'applique et indique que $f \in \mathcal{C}^1(I)$ avec

$$\forall x > 0, \ f'(x) = -2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+(nx)^2)^2}$$

*Remarque : on obtient ainsi que $f'$ est négative sur $I$ ce qui redonne la décroissance.*

**4.** On veut maintenant utiliser le théorème de double limite.

- Chaque $f_n$ est de limite nulle en $+\infty$.
- $\forall x \geq 1, \ \forall n \geq 1, \ |f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2}$. Ainsi $\|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leq \frac{1}{1+n^2}$ est le terme général d'une série absolument convergente ce qui nous indique que $\sum(f_n)$ converge normalement sur $[1,+\infty[$ et donc au voisinage de $+\infty$.

On conclut que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

**5.** **5.1** Fixons $x > 0$. La fonction $g_x\ :\ t \mapsto \frac{1}{1+t^2x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. En particulier,

$$\forall p \geq 1,\ \forall t \in [p, p+1],\ g_x(p+1) \leq g_x(t) \leq g_x(p)$$

En intégrant cette inégalité sur $[p, p+1]$, on obtient

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{1+(p+1)^2x^2} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leq \frac{1}{1+p^2x^2}$$

**5.2** Fixons $x > 0$ et sommons ces inégalités :

$$\forall n \geq 1,\ \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{1+(p+1)^2x^2} \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{1+p^2x^2}$$

$t \mapsto \frac{1}{1+t^2x^2}$ a pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \frac{1}{x}\arctan(tx)$. Les quantités précédentes admettent une limite quand $n \to +\infty$ et ce passage à la limite donne

$$f(x) - \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\pi}{2x} \leq f(x)$$

ou encore

$$\frac{\pi}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x^2} + \frac{\pi}{2x}$$

Majorant et minorant étant tous deux équivalents à $\frac{\pi}{2x}$ quand $x \to 0$, on en déduit que

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{2x}$$

**6.** L'allure de la courbe de $f$ est celle d'une branche d'hyperbole.

## Partie B.

**1.** Soit $x > 0$. $h_x\ :\ t \mapsto \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, prolongeable par continuité en 0 (par la valeur $1/x$) et dominée par $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ (car $x > 0$ et par croissances comparées entre puissance et exponentielle puisque $|h_x(t)| \leq \frac{1}{e^{xt}-1} \sim e^{-xt}$). $h_x$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\varphi(x)$ existe donc a fortiori.

**2.** Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall x > 0,\ t \mapsto \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\forall t > 0,\ x \mapsto \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}$ est continue sur $I$.
- $\forall [a, b] \subset I,\ \forall t > 0, \left|\frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}\right| \leq \frac{|\sin(t)|}{e^{at}-1}$. Comme ci-dessus, le majorant est inrtégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Le théorème indique donc que $\varphi \in \mathcal{C}^0(I)$.

**3.** **3.1** On a

$$\forall a > 0,\ \int_0^a e^{-kxt}\sin(t)\ dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^a e^{(i-kx)t}; dt\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(i-kx)t}}{i-kx}\right]_0^a\right)$$

Le terme de droite admet une limite quand $a \to +\infty$ et $J_k$ existe donc avec

$$J_k = -\mathrm{Im}\left(\frac{1}{i-kx}\right) = \frac{1}{1+k^2x^2}$$

**3.2** On a (somme géométrique de raison $e^{-xt} \in [0,1[$)

$$\forall x > 0,\ \forall t > 0,\ \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1} = \sin(t)e^{-xt}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kxt} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(t)e^{-kxt}$$

On veut maintenant utiliser un théorème d'interversion somme-intégrale (on travaille à $x$ fixé).

- $g_k$ : $\sin(t)e^{-kxt}$ est le terme général d'une série de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers $t \mapsto \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- On a (inégalité triangulaire et majoration par la somme infinie)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t > 0,\ \left|\sum_{k=1}^{n} g_k(t)\right| \leq \frac{|\sin(t)|}{e^{xt}-1}$$

  eton a vu que le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On peut ainsi appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\varphi(x) = \sum_{k\geq 1} J_k = f(x)$$

## Exercice 3.

1. **1.1** $x$ étant dans $F^\perp$ est orthogonal à tous les $e_i$ et on a alors $\|x\|^2 = 0$.

   **1.2** On a donc montré que $F^\perp = \{0\}$. Mais comme $F$ est de dimension finie, le cours nous dit que $E = F \oplus F^\perp$. On en déduit que $E = F$ est de dimension finie (inférieure à $n$).

2. Appliquons $(P)$ aux $e_k$ :

$$\forall k \in \{1,\dots,n\},\ \|e_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(e_k|e_i)^2 = \|e_k\|^4 + \sum_{i\neq k}(e_k|e_i)^2$$

Comme on suppose $\|e_k\| \geq 1$, on a $\|e_k\|^2 \leq \|e_k\|^4$ et l'identité précédente nous apprend que

$$\forall k \in \{1,\dots,n\},\ \sum_{i\neq k}(e_k|e_i)^2 \leq 0$$

Les $(e_k|e_i)^2$ étant positifs, la somme ne peut être $\leq 0$ que si tous les termes sont nuls. On a donc

$$\forall k,\ \forall i \neq k,\ (e_k|e_i) = 0$$

ce qui montre que $\mathcal{B}$ est une famille orthogonale. $(P)$ appliquée avec $e_k$ donne maintenant

$$\forall k \in \{1,\dots,n\},\ \|e_k\|^2 = \|e_k\|^4$$

et comme $\|e_k\| > 0$, on en déduit que $\|e_k\| = 1$. $\mathcal{B}$ est finalement une famille orthonormale. Comme cette famille engendre $E = F$, c'est une base orthonormale de $E$ (le caractère orthonormal entraîne le caractère libre).

3. **3.1** Comme $\mathcal{B}$ engendre $F = E$, l'hypothèse supplémentaire d'indépendance nous apprend que $\mathcal{B}$ est une base de $E$.

   **3.2** On a deux relations :

$$\forall x, y \in E,\ (x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

**3.3** Soient $x, y \in E$. On a

$$\begin{array}{rcl} (x|y) & = & \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\ & = & \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}(x+y|e_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x-y|e_i)^2\right) \\ & = & \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(((x|e_i)+(y|e_i))^2 - ((x|e_i)+(y|e_i))^2\right) \\ & = & \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(4(x|e_i)(y|e_i)) \\ & = & \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)(y|e_i) \end{array}$$

**3.4** Les formules de produit matriciel donnent

$$\forall i, j,\ (A^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}A_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}(e_i|e_k)(e_k|e_j) = (e_i|e_j)$$

la dernière égalité provenant de la question précédente (et de la symétrie du produit scalaire). On a donc $A^2 = A$ (égalité de leurs coefficients).

**3.5** Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \ker(a)$. On a alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}x_j = 0$$

et, avec l'expression de $A_{i,j}$ et la bilinéarité du produit scalaire,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ (e_i|\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = (e_i|x) = 0$$

$x$ est donc orthogonal à tous les éléments d'une base de $E$ et est donc nul. On a montré que

$$\ker(a) = \{0\}$$

**3.6** $A$ est donc inversible et en multipliant $A^2 = A$ par $A^{-1}$ on obtient $A = I_n$ c'est à dire

$$\forall i, j,\ (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$$

Ceci siginifie exactement que $\mathcal{B}$ est une famille (et donc ici une base) orthonormale.

# Exercice 4.

**1.** Soit $X \in \mathbb{C}^n$ avec $X \neq 0$. $Y = \frac{X}{\|X\|}$ étant de norme $\leq 1$, on a (la borne sup étant un majorant) $\|AY\| \leq \mathcal{N}(A)$ ce qui donne, $\|AX\| \leq \|X\|\mathcal{N}(A)$. L'inégalité reste vraie si $X = 0$.

**2.** La boule unité fermée est un compact de $\mathbb{C}^n$ (c'est un fermé borné en dimension finie). De plus $X \mapsto \|AX\|$ est continue. Cette fonction admet donc un maximum sur la boule unité fermée et il existe $Y \in \mathbb{C}^n$ avec $\|Y\| \leq 1$ tel que $\mathcal{N}(A) = \|AY\|$. Comme $\|AY\| \leq \mathcal{N}(A)\|Y\|$ (question précédente), on a $\mathcal{N}(A) \leq \mathcal{N}(A)\|Y\|$.

- Si $A \neq 0$ alors $\mathcal{N}(A) \neq 0$ et $\|Y\| \geq 1$. Comme $\|Y\| \leq 1$ on a donc $\|Y\| = 1$. En posant $X_0 = Y$, on a donc $\frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|} = \|AY\| = \mathcal{N}(A)$.

- Sinon, tout $X_0 \neq 0$ convient (car $\mathcal{N}(A) = 0$ et $AX_0 = 0$ pour tout $X_0$).
Dans tous les cas, on a trouvé un $X_0$ convenable.

**3.** Appliquons la question précédente avec $A = I_n$ : on trouve $\mathcal{N}(I_n) = \frac{\|X_0\|}{\|X_0\|} = 1$.

**4.** Le résultat demandé traduit l'équivalence des normes $\mathcal{N}$ et $calN_\infty$ qui est acquise puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie ($n^2$).

**5.** C'est immédiat puisqu'une partie est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule. On peut aussi dire par inégalité triangulaire que

$$\forall A \in \mathcal{G},\ \mathcal{N}(A) \leq \mathcal{N}(A - I_n) + \mathcal{N}(I_n) \leq 2$$

**6.** **6.1** $\mathcal{G}$ étant un sous-groupe est stable par produit et par passage à l'inverse. Le résultat demandé en découle immédiatement (si on veut ergoter, on prouve le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ à partir de $A$ et $A^{-1}$ qui sont dans $\mathcal{G}$).

**6.2** $A$ étant dans $GL_n(\mathbb{C})$, 0 n'est pas valeur propre de $A$ et $\lambda \neq 0$. On montre par récurrence sur $k$ que $A^k X = \lambda^k X$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- Initialisation : $A^0 X = X$ et le résultat est vrai pour $k = 0$.
- Hérédité : soit $k \geq 1$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang $k - 1$. On a alors

$$A^k X = A(A^{k-1} X) = \lambda^{k-1} AX = \lambda^k X$$

et le résultat est donc vrai au rang $k$.

De plus $AX = \lambda X$ donne, en multipliant par $A^{-1}$ et en divisant par $\lambda$, $A^{-1}X = \lambda^{-1}X$. Une récurrence semblable indique alors que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^{-k}X = \lambda^{-k}X$. On a donc

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ A^k X = \lambda^k X$$

**6.3** Comme $A^k \in \mathcal{G}$, $A^k$ est dans la boule de rayon 1 de centre $I_n$ et donc $\mathcal{N}(A^k - I_n) \leq 1$. La question 1 indique alors que

$$\|(A^k - I_n)X\| \leq \|X\|$$

On a donc $\|(\lambda^k - 1)X\| \leq \|X\|$. Avec l'homogénéité de la norme et en divisant par $\|X\| > 0$ ($X$ est vecteur propre et donc non nul) on obtient

$$|\lambda^k - 1| \leq 1$$

Par seconde forme de l'inégalité triangulaire, on a enfin

$$||\lambda^k| - 1| \leq |\lambda^k - 1| \leq 1$$

**6.4** Si $|\lambda| > 1$ alors $|\lambda^k| \to +\infty$ quand $k \to \infty$ ce que ne permet pas la question précédente. Si $|\lambda| < 1$, on obtient de même une contradiction en faisant $k \to -\infty$. Finalement,

$$|\lambda| = 1$$

**6.5** On a $|e^{i\alpha} - 1|^2 = (\cos(\alpha) - 1)^2 + \sin^2(\alpha) = 2(1 - \cos(\alpha))$. Appliquons ceci avec $\alpha = k\theta$ :

$$|\lambda^k - 1|^2 = |2(1 - \cos(k\theta))| \leq 1$$

A fortiori, on a

$$|1 - \cos(k\theta)| \leq 1/2 \leq 1$$

On en déduit que $\cos(k\theta) \in [0, 2]$ et comme un cosinus est $\leq 1$,

$$\cos(k\theta) \in [0, 1]$$

**6.6** Les éléments de $[-\pi,\pi]$ ayant un cosinus $\geq 0$ sont ceux de $[-\pi/2,\pi/2]$ et donc

$$\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$$

On a alors $2\theta\in[-\pi,\pi]$ et comme son cosinus est $\geq 0$, on trouve de même que $2\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$ c'est à dire

$$\theta\in[-\pi/4,\pi/4]$$

On prouve par récurrence que $q\in\mathbb{N}$ que $\theta\in[-\pi/2^q,\pi/2^q]$ est vrai pour tout $q\in\mathbb{N}$.

- Initialisation : c'est vrai par hypothèse sur $\theta$ pour $q=0$.
- Hérédité : soit $q\geq 1$ tel que le résultat est vrai jusqu'au rang $q-1$. On a alors $2^{q-1}\theta\in[-\pi,\pi]$ et son cosinus est positif donc $2^{q-1}\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$. On en déduit le résultat au rang $q$.

**6.7** En passant à la limite $q\to+\infty$, il vient que $\theta=0$ et donc que $\lambda=1$. 1 est la seule valeur propre possible. Or, toute matrice complexe a au moins une valeur propre. Ainsi,

$$\mathrm{Sp}(A)=\{1\}$$

**7.** **7.1** Notons $u_A$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$. $A\in\mathrm{Sp}(A)$ et il existe donc un vecteur $e_1\neq 0$ tel que $u_A(e_1)=e_1$. $(e_1)$ est libre et, par théorème de la base incomplète, il existe $e_2$ tel que $(e_1,e_2)$ soit une base de $\mathbb{C}^2$. Dans cette base, $u_A$ est représenté par une matrice de la forme $T=\begin{pmatrix}1&a\\0&b\end{pmatrix}$. $T$ et $A$ sont alors semblable et donc 1 est l'unique valeur propre de $T$ ce qui indique que $b=1$. De plus $a\neq 0$ car sinon $T$ serait diagonale et $A$ diagonalisable. Finalement, $A$ est semblable à une matrice triangulaire de la forme $T=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$ avec $a$ non nul.

**7.2** On montre par une récurrence non détaillée que

$$\forall m\in\mathbb{N},\ T^m=\begin{pmatrix}1&ma\\0&1\end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\forall m\in\mathbb{N},\ \mathcal{N}_\infty(T^m)=\max(m|a|,1)$$

**7.3** Pour $m$ assez grand ($m\geq 1/|a|$), on a $\mathcal{N}_\infty(T^m)=m|a|\to+\infty$ quand $m\to+\infty$. Ainsi

$$\lim_{m\to+\infty}\mathcal{N}_\infty(T^m)=+\infty$$

Avec la question 4, on en déduit que

$$\lim_{m\to+\infty}\mathcal{N}(T^m)=+\infty$$

Or, il existe une matrice inversible $Q$ telle que $Q^{-1}AQ=T$ et donc (récurrence) $Q^{-1}A^mQ=T^m$. On a alors

$$\mathcal{N}(T^m)=\mathcal{N}(Q^{-1}A^mQ)\leq\mathcal{N}(Q)\mathcal{N}(A^m)\mathcal{N}(Q^{-1})$$

Comme $\mathcal{N}(Q)>0$ et $\mathcal{N}(Q^1)$, on en déduit (en divisant par ces quantités) que

$$\lim_{m\to+\infty}\mathcal{N}(A^m)=+\infty$$

**7.4** Ceci contredit le fait que $\mathcal{G}$ est borné (puisque les $A^m$ sont dans $\mathcal{G}$). On a donc montré, par l'absurde, que $A$ est diagonalisable.

**7.5** Tout élément de $\mathcal{G}$ est diagonalisable d'unique valeur propre 1. $I_n$ est donc le seule élément possible dans $\mathcal{G}$. Comme on a un sous-groupe, il est non vide et

$$\mathcal{G}=\{I_n\}$$