e3a - PSI - 2011
Epreuve A : un corrigé

Questions de cours.

1. Deux matrices A et B sont semblables s'il existe P inversible telle que $P^{-1}AP$. D'après la formule de changement de base, ceci est équivalent à dire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ où f_A est représenté par la matrice B.

2. (a) **Vrai.** Le résultat est dû au fait que multiplier par une matrice inversible à droite ou gauche ne change pas le rang d'une matrice :
   - si B est inversible, l'image de AB est égale à $f_A(\mathrm{Im}(f_B))$ qui vaut $f_A(\mathbb{R}^n)$ et donc $\mathrm{Im}(f_A)$; ainsi AB et A ont même rang ;
   - si A est inversible, l'image de AB est égale à $f_A(\mathrm{Im}(f_B))$ qui est de même dimension que $\mathrm{Im}(f_B)$; ainsi AB et B ont même rang.

   (b) **Faux.** Les matrice I_2 et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont même rang égal à 2. Or, I_2 est la seule matrice semblable à I_2 ($P^{-1}I_2P = I_2$) et donc A et I_2 ne sont pas semblables.

   (c) **Vrai.** Le résultat est dû au fait que l'application déterminant est un morphisme multiplicatif ($\det(AB) = \det(A)\det(B)$).

   (d) **Faux.** Les matrice I_2 et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ fournissent encore un contre-exemple.

   (e) **Vrai.** $X^2+5X-6 = (X-1)(X+6)$ annule A et donc A est diagonalisable (elle est annulée par un polynôme scindé à racines simples) et le spectre de A est inclus dans $\{1, -6\}$. $\mathbb{R}^n$ est ainsi la somme directe des sous-espaces propres et ceux-ci ne peuvent être que $\ker(A+6I_n)$ et $\ker(A+I_n)$ (éventuellement, ces espaces sont réduits à $\{0\}$).

   (f) **Faux.** Pour $A = I_n$, on a bien $A^2+5A-6I_n = O_n$ mais $\ker(A+I_n)$ et $\ker(A-6I_n)$ sont réduits à $\{0\}$.

   (g) **Vrai.** Si $P^{-1}AP = B$ alors $P^{-1}(A-xI_n)P = B-xI_n$ et $A-xI_n$ est semblable à $B-xI_n$. Ces matrices ont même déterminant et ainsi les polynômes caractéristiques de A et B sont égaux.

   (h) **Faux.** Les matrice I_2 et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ fournissent encore un contre-exemple.

Problème.

Partie I.

1. Le calcul donne $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   (a) B est symétrique réelle et donc diagonalisable (et il existe même une base orthonormée de vecteurs propres, c'est à dire une matrice de passage orthogonale diagonalisant B).

   (b) Les valeurs propres de B sont réelles comme expliqué plus haut. Soit λ une valeur propre et X un vecteur propre associé (élément de $\mathbb{R}^3$ et assimilé à une vecteur colonne). On a

   $$\lambda\|X\|^2 = {}^tXBX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2 \geq 0$$

   et comme $\|X\|^2 > 0$, on en conclut que $\lambda \geq 0$. Ainsi

   $$\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^+$$

(c) Il est immédiat que $(0,1,0)$ est vecteur propre de B associé à la valeur propre 2, que $(1,0,1)$ est vecteur propre associé à 8 et que $(1,0,-1)$ est vecteur propre associé à 0. Les sous-espaces propres étant en somme directe, il n'y a que trois valeurs propres et les sous-espaces propres dont de dimension 1.

$$\mathrm{Sp}(B) = \{8, 2, 0\}$$

$$\ker(B) = \mathrm{Vect}((1, 0-1)),\ \ker(B-2I_3) = \mathrm{Vect}((0,1,0)),\ \ker(B-8I_3) = \mathrm{Vect}((1,0,1))$$

2. (a) $\mathcal{C}$ est une quadrique dont la partie quadratique admet pour matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (c'est à dire $C = \frac{1}{2}B$). Ceci signifie que $\mathcal{C}$ est l'ensemble des $M = (x, y, z)$ (assimilé à une matrice colonne) tels que ${}^tMCM = 1$.

D'après la question précédente, on a $P^{-1}CP = \mathrm{diag}(0, 1, 4)$ avec $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

En posant $(X, Y, Z) = P^{-1}M$ (coordonnées de M dans la base des colonnes de P), l'appartenance de M à $\mathcal{C}$ équivaut à $Y^2 + 4Z^2 = 1$.

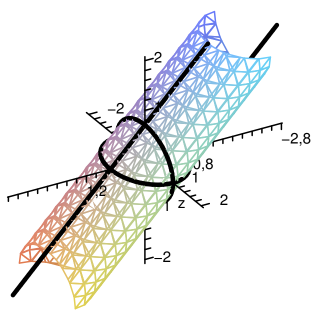
$\mathcal{C}$ est ainsi un cylindre de base elliptique et d'axe $\mathrm{Vect}((1,0,-1))$. L'ellipse "de base" se situe dans le plan $\mathrm{Vect}((0,1,0),(1,0,1))$, son centre est l'origine et ses axes sont dirigés par $(0,1,0)$ et $(1,0,1)$.

(b) Les éléments de C_1 sont les triplets $(0, y, z)$ avec $y^2 + 2z^2 = 1$. Il s'agit d'une ellipse dans le plan $x = 0$ dont les axes sont les axes des coordonées selon y et z.

Les éléments de C_2 sont les triplets $(x, 0, z)$ avec $2(x+z)^2 = 1$ c'est à dire $(x+z-1/\sqrt{2})(x+z+1/\sqrt{2}) = 0$. Il s'agit de la réunion de deux droites.

Les éléments de C_3 sont les triplets $(x, y, 0)$ avec $2x^2 + y^2 = 1$. Il s'agit d'une ellipse dans le plan $z = 0$ dont les axes sont les axes des coordonées selon x et y.

(c) Voici une représentation faite avec Maple.



3. (a) On a $P = X^3 - 10X^2 + 16X = X(X-2)(X-8)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de X^p par P s'écrit

$$X^p = P.Q_p + \alpha_p X^2 + \beta_p X + \gamma_p$$

En donnant à X les valeurs $0, 2, 4$, on obtient (pour $p \geq 1$) $\begin{cases} 0 = \gamma_p \\ 2^p = 4\alpha_p + 2\beta_p + \gamma_p \\ 8^p = 64\alpha_p + 8\beta_p + \gamma_p \end{cases}$. La résolution du système donne un reste égal à

$$\frac{8^p - 4.2^p}{48}X^2 + \frac{16.2^p - 8^p}{24}X$$

Pour $p = 0$, le reste est bien sûr égal à 1.

(b) B est diagonalisable et ses valeurs propres sont $0, 2, 8$, il est donc annulé par $X(X-2)(X-8)$ et ainsi

$$B^3 - 10B^2 + 16B = O_3$$

0 étant valeur propre de B, B n'est pas inversible.

(c) $Q \mapsto Q(B)$ étant un morphisme d'algèbre et P annulant B, B^p est égal à R_p où R_p est le reste dans la division euclidienne de X^p par P. On a ainsi

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ B^p = \frac{8^p - 4.2^p}{48}B^2 + \frac{16.2^p - 8^p}{24}B$$

(d) On a alors, pour $p \geq 1$,

$$T_p = I_3 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}(a_k B^2 + b_k B) = I_n + \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{8^k - 4.2^k}{48k!}\right) B^2 + \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{16.2^k - 8^k}{24k!}\right) B$$

et T_p est combinaison linéaire de I_3, B, B^2 (et cela reste vrai pour $T_0 = I_3$). On peut écrire l relation précédente sous la forme

$$T_p = I_3 + \frac{1}{48}\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{8^k}{k!} - 4\sum_{k=1}^{p} \frac{2^k}{k!}\right) B^2 + \frac{1}{24}\left(16\sum_{k=1}^{p} \frac{2^k}{k!} - \sum_{k=1}^{p} \frac{8^k}{k!}\right) B$$

On en déduit que

$$\lim_{p \to +\infty} T_p = I_3 + \frac{1}{48}(e^8 - 1 - 4(e^2 - 1))B^2 + \frac{1}{24}(16(e^2 - 1) - (e^8 - 1))B$$

On obtient, après calcul,

$$\lim_{p \to +\infty} T_p = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + e^8 & 0 & e^8 - 1 \\ 0 & 2e^2 & 0 \\ e^8 - 1 & 0 & e^8 + 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : plus simplement, en utilisant une matrice de passage P qui diagonalise B on a $T_p = P\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k}\mathrm{diag}(0^k, 2^k, 8^k)\right)P^{-1} \to P\mathrm{diag}(1, e^2, e^8)P^{-1}$.

Partie II.

1. La matrice de (u_1, u_2, u_3, u_4) dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice étant inversible (triangulaire à coefficients diagonaux non nuls), $\mathcal{U}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Comme $f(u_i) = u_{i+1}$, on connaît les trois premières colonnes de M. La dernière s'obtient en calculant $f(u_4) = (21, 0, 60, 0) = -9u_1 + 10u_3$. On a ainsi
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
3. Le polynôme caractéristique de f est celui de M. Le calcul donne
$$\chi_f = \det(M - xI_4) = x^4 - 10x^2 + 9 = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$$
4. Les valeurs propres de A sont les racines de χ_f et donc
$$\mathrm{Sp}(A) = \{-3, -1, 1, 3\}$$
Les sous-espaces propres étant en somme directe sont obligatoirement de dimension 1. Il suffit d'en trouver un élément pour en avoir une base. Une résolution de système au brouillon donne
$$\ker(A + 3I_4) = \mathrm{Vect}(1, -3, 3, -1),\ \ker(A + I_4) = \mathrm{Vect}(1, -1, -1, 1)$$
$$\ker(A - I_4) = \mathrm{Vect}(1, 1, -1, -1),\ \ker(A - 3I_4) = \mathrm{Vect}(1, 3, 3, 1)$$
5. En supposant que la question a un rapport avec la diagonalisation précédente, on pose
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
dont les vecteurs colonnes sont propres pour A et qui vérifie donc
$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(3, -1, 1, -3) = D$$
Un calcul élémentaire montre que $KP = I_4$ et donc $P^{-1} = K$. On a donc la relation $KAP = D$ souhaitée.
6. Le système s'écrit matriciellement $F'(t) = AF(t)$ où $F(t) = (x(t), y(t), z(t), u(t))$ (assimilé à une matrice colonne). L'ensemble des solutions de ce système est (avec le théorème de Cauchy-Lipschitz) un sous-espace vectoriel de dimension 4 de l'espace $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4)$. On vérifie immédiatement que les fonctions
$$F_1\ :\ t \mapsto e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ F_2\ :\ t \mapsto e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$F_3\ :\ t \mapsto e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ F_4\ :\ t \mapsto e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
sont des solutions (ce qui découle du fait que les vecteurs choisis sont propres pour A) quii sont indépendantes (car les vecteurs choisis le sont, ce sont les colonnes de P). Par dimension, (F_1, F_2, F_3, F_4) est une base de l'ensemble des solutions. La solution générale est donc
$$\begin{cases} x\ :\ t \mapsto c_1e^{3t} + c_2e^{-t} + c_3e^t + c_4e^{-3t} \\ y\ :\ t \mapsto 3c_1e^{3t} - c_2e^{-t} + c_3e^t - 3c_4e^{-3t} \\ z\ :\ t \mapsto 3c_1e^{3t} - c_2e^{-t} - c_3e^t + 3c_4e^{-3t} \\ z\ :\ t \mapsto c_1e^{3t} + c_2e^{-t} - c_3e^t - c_4e^{-3t} \end{cases}$$
On peut aussi retrouver ce résultat en effectuant le changement de fonction inconnue $G(t) = KF(t)$. F convient si et seulement si $G'(t) = DG(t)$. On résout ce système triangulaire et on en déduit $F(t) = PG(t)$.

Partie III.

1. On a $g(X^0) = nX \in E_n$ et $\forall k \in [1..n],\ g(X^k) = (n-k)X^{k+1} + kX^{k-1}$. Ce dernier polynôme est dans E_n (immédiat si $k < n$ et encore vrai pour $k = n$ car le coefficient devant X^{n+1} est alors nul). Par ailleurs g est linéaire et c'est finalement un endomorphisme de E_n. Le coefficient à l'intersection de la ligne i et de la colonne j de sa matrice dans $\mathcal{B}_c$ est le coefficient de X^{i-1} dans $g(X^{j-1})$. Avec les calculs précédents, ce coefficient est nul si $|i-j| \neq 1$, vaut i si $j = i+1$ et vaut $n-i+2$ si $j = i-1$. La matrice cherchée est donc la matrice A.
2. (a) $\mathcal{E}_\lambda$ est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 à coefficie,ts continus et le coefficient devant $y'(x)$ ne s'annule pas sur $]-1,1[$. On est dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz et l'ensemble des solutions est un espace vectoriel (équation homogène) de dimension 1. De plus, il est engendré par $x \mapsto e^{F(x)}$ où F est une primitive de $f\ :\ x \mapsto \frac{nx-\lambda}{x^2-1}$. Avec la remarque de l'énoncé, on écrit que
$$f(x) = \frac{n}{2}\frac{2x}{x^2-1} - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$
et on peut donc choisir
$$F(x) = \frac{n}{2}\ln(1-x^2) - \frac{\lambda}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln\left((1-x)^{\frac{n-\lambda}{2}}(1+x)^{\frac{n+\lambda}{2}}\right)$$
La solution générale de $\mathcal{E}_\lambda$ sur $]-1,1[$ est donc
$$y_c\ :\ x \mapsto c(1-x)^{\frac{n-\lambda}{2}}(1+x)^{\frac{n+\lambda}{2}}$$
(b) Il existe une solution polynomiale non nulle si et seulement si $y_0\ :\ x \mapsto (1-x)^{\frac{n-\lambda}{2}}(1+x)^{\frac{n+\lambda}{2}}$ est polynomiale.
   - On remarque que $y_0(1-t) \sim_{0^+} 2^{\frac{n+\lambda}{2}} t^{\frac{n-\lambda}{2}}$. Par ailleurs, y_0 étant polynomiale non nulle, il existe une constante $c \neq 0$ et un entier naturel d tel que $y_0(1-t) \sim_0 ct^d$. On en déduit que $t^{d-\frac{n-\lambda}{2}}$ admet une limite finie non nulle en 0 et que donc $\frac{n-\lambda}{2} = d \in \mathbb{N}$. De même, une étude de $y_0(t-1)$ montre que $\frac{n+\lambda}{2} \in \mathbb{N}$. λ est donc un entier du type $-n+2k$ avec $k \in \{0,\dots,n\}$.
   - Réciproquement, si $\lambda = -n+2k$ avec $k \in \{0,\dots,n\}$ alors $y_0(x) = (1-x)^{n-k}(1+x)^k$ est effectivement polynomiale.

   $\mathcal{E}_\lambda$ admet des solutions polynomiales non nulle si et seulement si $\lambda \in \{-n+2k/\ k = 0..n\}$.
3. Pour $k = 0..n$, posons $\lambda_k = -n+2k$ et $P_k = (1-X)^{n-k}(1+X)^k$. P_k est alors solution de $\mathcal{E}_{\lambda_k}$ sur $]-1,1[$ et donc
$$\forall x \in]-1,1[,\ -(x^2-1)P_k'(x) + 2xP_k(x) = \lambda_k P_k(x)$$
On a une égalité entre deux fonctions polynomiales qui est valable en un nombre infini de points. Les polynômes sont donc égaux et $g(P_k) = \lambda_k P_k$ (on a bien $P_k \in E_n$). On a donc trouvé $n+1$ valeurs propres pour g et comme E_n est de dimension $n+1$ et que les sous-espaces propres sont en somme directe, on a toutes les valeurs propres et des sous-espaces propres de dimension 1.
$$\mathrm{Sp}(g) = \{-n+2k/\ k = 0..n\}\ \text{ et }\ \forall k \in [|0,n|],\ \ker(g-(-n+2k)id_{E_n}) = \mathrm{Vect}((1-X)^{n-k}(1+X)^k)$$
4. A étant la matrice de g est ainsi diagonalisable (la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $n+1$).
5. A étant diagonalisable, son déterminant est le produit de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités. Ici,
$$\det(A) = \prod_{k=0}^{n}(-n+2k)$$
On peut expliciter ce terme en distinguant selon la parité de n.

- Si n est pair alors $\det(A) = 0$.
- Si n est impair, il s'écrit $n = 2p+1$ et $\det(A) = (-1)^{p+1}(1.3.\dots.(2p+1))^2$. On multiplie et divise par les entiers pairs entre 2 et$2p$ pour obtenir

$$\det(A) = (-1)^{p+1}\frac{((2p+1)!)^2}{2^{2p}(p!)^2}$$

Partie IV.

1. On a directement (il suffit de vérifier)

$$y_1 = \mathrm{ch} \quad \text{et} \quad y_2 = \mathrm{sh}$$

2. La famille $\mathcal{G}$ engendre G par définition. Pour conclure, il suffit de montrer que cette famille est libre (ce sera une base de G qui sera alors de dimension $n+1$). On considère donc des scalaires c_k tels que $\sum_{k=0}^n c_k g_k = 0$. Montrons par récurrence que les c_k sont tous nuls.
   - Initialisation : en appliquant l'identité à $x = 0$ on obtient $c_0 = 0$.
   - Hérédité : soit $p \in [0..n-1]$ tel que $c_0 = \dots = c_p = 0$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 = \sum_{k=p+1}^n c_k(\mathrm{ch}(x))^{n-k}(\mathrm{sh}(x))^k = (\mathrm{sh}(x))^{p+1}\sum_{k=p+1}^n c_k(\mathrm{ch}(x))^{n-k}(\mathrm{sh}(x))^{k-p-1}$$

   $\sum_{k=p+1}^n c_k(\mathrm{ch}(x))^{n-k}(\mathrm{sh}(x))^{k-p-1}$ est ainsi nulle sur $\mathbb{R}^*$. En faisant tendre x vers 0, on obtient $c_{p+1} = 0$.

   La famille $\mathcal{G}$ est donc libre et on conclut.

3. (a) Comme $y_1' = y_2$ et $y_2' = y_1$, on a facilement

$$\Delta(g_k) = (n-k)g_{k+1} + kg_{k-1}$$

   Si $k \in \{1, \dots, n-1\}$, c'est une combinaison linéairé d'éléments de $\mathcal{G}$ ($k+1$ et $k-1$ sont entre 0 et n). C'est encore vrai pour $k = 0$ (on obtient ng_1) et $k = n$ (on obtient ng_{n-1}). Δ est linéaire et envoie les éléments d'une base de G dans G. G est donc stable par Δ et Δ induit sur G un endomorphisme δ.

   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les éléments de $\ker(\Delta - \lambda id)$ sont les fonctions $y \in \mathcal{C}^\infty$ telles que $y' = \lambda y$. On a donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \ker(\Delta - \lambda id) = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{\lambda x})$$

   Tout réel est valeur propre de Δ et le sous-espace propre associé est de dimension 1.

   (c) En écrivant ch et sh avec des exponentielles et en développant par formule du binôme, on a

$$g_k(x) = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}e^{jx}e^{-(n-k-j)x}\right)\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}e^{jx}e^{-(k-j)x}\right)$$

   En développant, on obtient une combinaison linéaires de terme du type $e^{(2j_1-n+2j_2)x}$ avec j_1 entier entre 0 et $n-k$ et j_2 entier entre 0 et k. $m = j_1 + j_2$ est donc un entier entre 0 et n et notre terme est combinaison linéaire des φ_m pour m entier entre 0 et n. On a prouvé que

$$G = \mathrm{Vect}(\mathcal{G}) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$$

   Comme G est de dimension $n+1$ et comme $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est de dimension $\leq n+1$, on a en fait des égalités. Ainsi $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est de dimension $n+1$, $\mathcal{F}$ est libre ($n+1$ vecteurs qui engendrent un espace de dimension $n+1$) et $G = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ ($\mathcal{F}$ est donc une base de G).

(d) Un vecteur propre de Δ qui est dans G est aussi vecteur propre de δ. Ainsi, φ_m est vecteur propre pour δ associé à la valeur propre $2m-n$. On a $n+1$ valeurs propres en dimension $n+1$ et on les a donc toutes et les sous espaces propres dont de dimension 1.

$$\mathrm{sp}(\delta) = \{2m - n / \ m \in \{0, \ldots, n\} \quad \text{et} \quad \forall m \in \{0, \ldots, n\},\ \ker(\delta - id) = \mathrm{Vect}(\varphi_m)$$

(e) La question **3.a** montre que la matrice de δ dans la base $\mathcal{G}$ est la matrice A.

(f) On retrouve la diagonalisabilité de A et, par exemple, la valeur de son déterminant.