e3a - PSI - 2010
Un corrigé de l'épreuve B

Exercice 1.

Partie A.

1.a. Au vu de la question suivante, on ne doit pas mentionner un calcul de déterminant triangulaire par blocs. Pour la première relation ainsi que la seconde, on peut faire des développements successifs selon la première colonne (n fois). Pour la troisième, on développe cette fois successivement (n fois) par rapport à la dernière colonne.

1.b. Il suffit de remarquer que

$$\begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$

puis d'utiliser la propriété de morphisme multiplicatif du déterminant pour obtenir, avec la question précédente,

$$\det(\begin{pmatrix} A & B \\ O_n & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D)$$

1.c. En utilisant l'invariance du déterminant par transposition, on obtient alors

$$\det(\begin{pmatrix} A & O_n \\ C & D \end{pmatrix}) = \det(A)\det(D)$$

2. On a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ O_n & D \end{pmatrix}$$

et donc (avec la propriété de morphisme multiplicatif du déterminantet la question 1) $\det(M)\det(D) = \det(AD - BC)\det(D)$. Si D est inversible, on peut simplifier par $\det(D) \neq 0$ et obtenir

$$\det(M) = \det(AD - BC)$$

3.a. Soit S le spectre complexe de D (c'est un ensemble de cardinal fini $\leq n$). Si $x \notin S$ alors D_x est inversible et donc (question précédente) $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$.

3.b. Comme S est fini, il existe $r > 0$ tel que $]0, r[\cap S = \emptyset$. On a ainsi

$$\forall x \in]0, r[,\ \det(M_x) = \det(AD_x - BC)$$

Le passage au déterminant étant continu, on peut faire tendre r vers 0 pour obtenir

$$\det(M) = \det(AD - BC)$$

On a bien sûr utilisé $D_r \to D$ quand $r \to 0$ qui donne $M_r \to M$ et $AD_r - BC \to AD - BC$.

Partie B.

1. Il est important de prendre garde à l'ordre des vecteurs choisi pour la base canonique. A part cela, on doit juste exprimer $R_A(E_{i,j})$ ou $L_A(E_{i,j})$ et mettre les coordonnées en colonnes. Le calcul donne

$$Mat(R_A, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Mat(L_A, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$$

2. On écrit les matrices précédentes par blocs

$$Mat(R_A, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} aI_2 & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Mat(L_A, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ 0 & {}^tA \end{pmatrix}$$

Il suffit alors de combiner ces matrices pour obtenir

$$M_A = \begin{pmatrix} aI_2 - q^tA & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 - q^tA \end{pmatrix}$$

3.a. Comme cI_2 et $dI_2 - q^tA$ commutent, on peut utiliser la formule de la partie A :

$$\begin{aligned} \det(M_A) &= \det((aI_2 - q^tA)(dI_2 - q^tA) - bcI_2) \\ &= \det((ab - bc)I_2 - q(a+d)^tA + q^2({}^tA)^2) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\tilde{A}$ étant la transposée de la comatrice de A on a (formule de cours que l'on peut vérifier à la main pour cette matrice de taille 2)

$$A\tilde{A} = \det(A)I_2$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \det(A)\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2) &= \det(A\tilde{A} + q^2A^2 - q(a+d)A) \\ &= \det((ad - bc)I_2 - q(a+d)A + q^2A^2) \end{aligned}$$

Le déterminant étant invariant par transposition, on conclut que

$$\det(M_A) = \det(A)\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2)$$

3.b. On a

$$\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2) = \det(\begin{pmatrix} (q-1)(qa-d) & b(q-1)(q+1) \\ c(q-1)(q+1) & (q-1)(qd-a) \end{pmatrix})$$

Par multilinéarité du déterminant on a ainsi

$$\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2) = (1-q)^2\det(\begin{pmatrix} -qa+d & -b(q+1) \\ -c(q+1) & -qd+a \end{pmatrix})$$

et avec la question précédente,

$$\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\det(\begin{pmatrix} d-qa & -(1+q)b \\ -(1+q)c & a-qd \end{pmatrix})$$

3.c. On a maintenant

$$\det(\begin{pmatrix} -qa+d & -b(q+1) \\ -c(q+1) & -qd+a \end{pmatrix}) = (1+q)^2(ad-bc) - q(a+d)^2 = (1+q)^2\det(A) - q(\mathrm{Tr}(A))^2$$

et la question précédente donne

$$\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\left((1+q)^2\det(A) - q(\mathrm{Tr}(A))^2\right)$$

4.a. $P_A(X) = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta$ et donc $\mathrm{Tr}(A) = \alpha+\beta$ et $\det(A) = \alpha\beta$. La question précédente donne alors

$$\det(M_A) = (1-q)^2\alpha\beta((1+q)^2\alpha\beta - q(\alpha+\beta)^2) = (1-q)^2\alpha\beta((1+q^2)\alpha\beta - q\alpha^2 - q\beta^2)$$

Il reste à remarquer que $P_A(q\alpha)P_A(q\beta) = (q-1)^2\alpha\beta(q\beta-\alpha)(q\alpha-\beta)$ et à développer le dernier produit pour conclure que

$$\det(M_A) = P_A(q\alpha)P_A(q\beta)$$

4.b. On travaille en deux temps.
- S'il existe $B \neq 0$ telle que $AB = qBA$ alors $(R_A - qL_A)(B) = 0$ et donc $R_A - qL_A$ est non inversible. Son déterminant est nul et donc $P_A(q\alpha) = 0$ ou $P_A(q\beta) = 0$ c'est à dire $q\alpha \in \{\alpha, \beta\}$ ou $q\beta \in \{\alpha, \beta\}$. Si $\det(A) \neq 0$ alors α et β sont non nuls (0 non valeur propre de A) et $q\alpha \neq \alpha$, $q\beta \neq \beta$ ($q \neq 1$). La condition devient alors $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.
  Finalement, on a $\det(A) = 0$ ou $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.
- Réciproquement, si cette condition a lieu alors $\det(M_A) = 0$ et $R_A - qL_A$ n'est pas inversible. Il existe $B \neq 0$ dans son noyau et ceci s'écrit $AB = qBA$.

5. Distinguons trois cas.
- 0 est valeur propre simple de A. Dans ce cas, il existe une autre valeur propre complexe $\alpha \neq 0$ et A est diagonalisable, semblable à $\text{diag}(\alpha, 0)$ (deux sous-espaces propres qui sont des droites).
- 0 est valeur propre double. Dans ce cas, $P_A = X^2$ et $A^2 = 0$ (Cayley-Hamilton). Comme $A \neq 0$, il existe un vecteur colonne E_1 tel que $E_2 = AE_1 \neq 0$. Si $c_1E_1 + c_2E_2 = 0$ alors (on compose par A) $c_1E_2 = 0$ et donc $c_1 = 0$ (car $E_2 \neq 0$) puis $c_2E_2 = 0$ et donc $c_2 = 0$. La famille (E_1, E_2) est libre et est une base de $\mathbb{R}^2$ (identifié à l'espaces des matrices unicolonnes). Dans cete base, l'endomorphisme canoniquement associé à A est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et A est donc semblable à cette matrice.
- Si 0 n'est pas valeur propre de A alors $\det(A) \neq 0$ et $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$. Comme $q \neq 1$, on a $\alpha \neq \beta$ et on a deux valeur propres. A est diagonalisable et semblable à $\text{diag}(\alpha, \beta)$.

Exercice 2.

Partie A.

1.a. On procède par récurrence sur n.
- C'est vrai initialement car $a_0 = a \geq 0$ et $b_0 = 1 \geq 0$.
- Si c'est vrai à un rang $n \geq 0$ alors a_{n+1} et b_{n+1} sont postifs comme moyennes arithmétique et géométrique de tels nombres.

1.b. On a directement

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n - 2\sqrt{a_nb_n}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2$$

2. En particulier, on a

$$\forall n \geq 0,\ a_{n+1} - b_{n+1} \geq 0$$

et on en déduit que

$$\forall n \geq 0,\ a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + b_{n+1}) \leq a_{n+1}$$

$$\forall n \geq 0,\ b_{n+2} = \sqrt{a_{n+1} + b_{n+1}} \geq \sqrt{b_{n+1}^2} = |b_{n+1}| = b_{n+1}$$

En décalant les indices on a donc

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$$

3. On a cette fois $a_n - b_n = (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})$. On part de $\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n} \geq \sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}$ que l'on multiplie par $\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \geq 0$ (quand $n \geq 1$) pour en conclure que

$$\forall n \geq 1,\ (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \leq a_n - b_n$$

En combinant $1.b$ et l'inégalité précédente, on a donc

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

Une récurrence immédiate donne alors

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq a_n - b_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}(a_1 - b_1)$$

Enfin, $a_1 - b_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{a}-1)^2$ et $|\sqrt{a}-1| \leq \sqrt{a}+1$. On multiplie par $|\sqrt{a}-1|$ pour en déduire que $|\sqrt{a}-1|^2 \leq |(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)| = |1-a|$ et en conclure $a_1 - b_1 = \frac{1}{2}|1-a|$. Avec ce qui précède,

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq a_n - b_n \leq \frac{1}{2^n}|1-a|$$

4. $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont respectivement décroissante et croissante. D'après la question précédente, $a_n - b_n \to 0$. Les suites sont donc adjacentes et donc convergentes de même limite.

Partie B.

1. D'après la partie A, pour tout $x \geq 0$ les suites $(a_n(x))_{n\geq 1}$ et $(b_n(x))_{n\geq 1}$ sont adjacentes et donc convergente de même limite notée $f(x)$. Ceci signifie exactement que (a_n) et (b_n) convergent simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une même fonction f.

2.a. On vérifie que $b_1(0) = 0$ et que donc (récurrence immédiate) $b_n(0) = 0$ quand $n \geq 1$. A la limite, on obtient

$$f(0) = 0$$

De même, $\forall n,\ a_n(1) = 1$ et

$$f(1) = 1$$

2.b. Les suites étant adjacentes à partir du rang 1, on a

$$\forall x \geq 0,\ \forall n \geq 1,\ \sqrt{x} = b_1(x) \leq b_n(x) \leq a_n(x) \leq a_1(x) = \frac{1+x}{2}$$

3. D'après la question $A.3$, on a

$$\forall x \geq 0,\ \forall n \geq 1,\ 0 \leq a_n(x) - b_n(x) \leq \frac{1}{2^n}|1-x|$$

Mais, à nouveau, les suites sont adjacentes à partir du rang 1 et

$$\forall x \geq 0,\ \forall n \geq 1,\ \begin{cases} 0 \leq a_n(x) - f(x) \leq a_n(x) - b_n(x) \\ 0 \leq f(x) - b_n(x) \leq a_n(x) - b_n(x) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall x \in [0, A],\ \forall n \geq 1,\ \begin{cases} 0 \leq a_n(x) - f(x) \leq \frac{1}{2^n}(1+A) \\ 0 \leq f(x) - b_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}(1+A) \end{cases}$$

Le majorant est indépendant de $x \in [0, A]$ et est de limite nulle. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \|a_n - f\|_{\infty,[0,A]} = \lim_{n\to+\infty} \|b_n - f\|_{\infty,[0,A]} = 0$$

et les suites de fonctions $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur $[0, A]$ (vers f).

4. Comme une récurrence immédiate donne la continuité des a_n, le théorème de régularité des limites de suites de fonctions donne la continuité de f sur $[0, +\infty[$ (puisque l'on a convergence uniforme sur tout segment de cet ensemble).

Partie C.

1. φ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $\alpha^2, \beta^2 > 0$) et équivalente en $\pm\infty$ à $\frac{1}{t^2}$ (et donc intégrable aux voisinages des infinis par comparaison aux fonctions de Riemann). C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. On utilise le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- On a vu que $\forall x > 0,\ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+1)}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $t \geq 0$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+1)}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x \mapsto -\frac{x}{(t^2+x^2)^{3/2}\sqrt{t^2+1}}$.
- Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$. On a

$$\forall x \in [a,b],\ \forall t \geq 0,\ \left|\frac{x}{(t^2+x^2)^{3/2}\sqrt{t^2+1}}\right| \leq \frac{b}{(t^2+a^2)^{3/2}\sqrt{t^2+1}}$$

Le majorant est indépendant de x, c'est une fonction de t qui est continue sur $\mathbb{R}^+$, équivalente à $\frac{b}{t^4}$ au voisinage de $+\infty$ et donc intégrable sur un tel voisinage. C'est finalement une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème s'applique et donne $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ avec

$$\forall x > 0,\ g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(t^2+x^2)^{3/2}\sqrt{t^2+1}}\ dt$$

3.a. S_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec $S_x'(t) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{t^2}\right) > 0$. S_x est ainsi strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, étant continue sur cet intervalle, réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans l'ensemble $]\lim_0 S_x, \lim_{+\infty} S_x[= \mathbb{R}$.

3.b. On peut ainsi effectuer le changement de variable proposé. Si $s = S_{\alpha\beta}(t)$ alors formellement $ds = \frac{t^2+\alpha\beta}{2t^2}\ dt$, $s^2+\alpha\beta = \frac{1}{4}\left(t+\frac{\alpha\beta}{t}\right)^2 = \frac{1}{4t^2}(t^2+\alpha\beta)^2$ et $s^2 + (\frac{\alpha+\beta}{2})^2 = \frac{1}{4t^2}(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)$ et ainsi

$$\frac{ds}{\sqrt{(s^2+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2)(s^2+\alpha\beta)}} = 2\frac{dt}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}$$

En tenant compte des nouvelles bornes ($\lim_0 S_{\alpha\beta} = -\infty$ et $\lim_{+\infty} S_{\alpha\beta} = +\infty$) on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2)(s^2+\alpha\beta)}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}$$

3.c. La fonction sous l'intégrale dans le membre de gauche est paire et sont intégrale sur $\mathbb{R}$ est donc le double de celle sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2)(s^2+\alpha\beta)}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+\alpha^2)(t^2+\beta^2)}}$$

Partie D.

1. C'est vrai pour $n = 0$ par définition de g. Si c'est vrai au rang n, cela reste vrai au rang $n+1$ avec la question *C.3.c*. Par récurrence, c'est donc vrai tout le temps.

2.a. (a_n) et (b_n) convergeant simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers f, on a immédiatement

$$\lim_{n\to+\infty} h_n(t) = \frac{1}{t^2+f(x)^2}$$

pour tout $t > 0$ et $x \geq 0$ (c'est valable même si $x = 0$).

2.b. Les suites $(a_n(x))$ et $(b_n(x))$ étant adjacentes à partir du rang 1, $\sqrt{x} = b_1(x) \leq b_n(x) \leq a_n(x)$ pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$. Pour tout $t > 0$ on a alors $\sqrt{(t^2 + a_n(x)^2)(t^2 + b_n(x)^2)} \geq t^2 + x > 0$ et donc

$$0 < h_n(t) \leq \frac{1}{t^2 + x}$$

Ceci est valable pour $x \geq 0$ et $t > 0$.

2.c. (h_n) est simpement convergente sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers $t \mapsto \frac{1}{t^2+f(x)^2}$. De plus, la question précédente donne une domination de $|h_n|$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ par une fonction indépendante de n et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ quand $x > 0$ ($t \mapsto \frac{1}{t^2+x}$ est alors continue sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente à $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$). Le théorème de convergence dominée s'applique et donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t)\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + f(x)^2} = \left[\frac{1}{f(x)} \arctan\left(\frac{t}{f(x)}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2f(x)}$$

2.d. Avec la question $D.1$, on a donc (en faisant tendre n vers $+\infty$)

$$\forall x > 0,\ g(x) = \frac{\pi}{2f(x)}$$

$f = \frac{\pi}{2g}$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ par théorèmes généraux (comme g).