e3a - PSI - 2010
Un corrigé de l'épreuve A

Applications directes du cours.

1. Si f est paire alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$. En dérivant, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = f'(x)$$

et f' est donc impaire.

2. Si f est impaire alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$. En dérivant, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = -f'(x)$$

et f' est donc paire.

3. On a $H^2 = H$ et H est donc une symétrie vectorielle. On a donc $\ker(H+Id) \oplus \ker(H-Id) = E$ ce qui signifie que l'ensemble des fonctions de E qui sont paires et celui des fonctions de E qui sont impaires sont supplémentaires dans E et donne la décomposition demandée. On peut d'ailleurs expliciter cette décomposition :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = p(x) + i(x)$$

p est paire et i est impaire.

4. La réciproque de la question 1 est vraie. Supposons en effet que f' soit impaire. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\ dt$$

Le changement de variable $u = -t$ donne alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0) + \int_0^{-x} f'(-u)\ du = f(0) - \int_{-x}^0 (-f'(u))\ du = f(0) + \int_{-x}^0 f'(u)\ du = f(-x)$$

et la fonction f est paire.

Soit $f\ :\ x \mapsto 1 + x$. $f'\ :\ x \mapsto 1$ est paire mais $f(-1) = 0 \neq -f(1) = -2$ et f n'est pas impaire.

5. Raisonnons par analyse et synthèse.

- Soit f une fonction convenable. Comme en question 3.2 on écrit $f = p + i$ avec p paire et i impaire. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (p''(x) + p(x)) + (i''(x) - i(x)) = 1 + \sin(2x)$$

  $p'' + p$ est paire et $i'' + i$ est impaire. Par unicité de la décomposition de 3.2, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p''(x) + p(x) = 1 \quad \text{et} \quad i''(x) - i(x) = \sin(2x)$$

  On sait résoudre ces équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et il existe des constantes a, b, c, d telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = 1 + a\cos(x) + b\sin(x) \quad \text{et} \quad i(x) = -\frac{1}{5}\sin(2x) + c\,\mathrm{ch}(x) + d\,\mathrm{sh}(x)$$

  La parité de p impose $b = 0$ et l'imparité de i impose $c = 0$. Toute solution est donc du type

$$x \mapsto 1 - \frac{1}{5}\sin(2x) + a\cos(x) + d\,\mathrm{sh}(2x)$$

- On vérifie réciproquement que pour tout choix de a et d la fonction ci-dessus est solution.

Préliminaires.

1. La linéarité de la dérivation entraîne celle de φ. La dérivée d'un élément de E étant dans E et E étant un espace vectoriel, $\varphi(E) \subset E$. On a donc

$$\varphi \in \mathcal{L}(E)$$

2. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour toute fonction continue f, il existe une fonction deux fois dérivable y telle que $y'' + \lambda y = f$. Si $f \in \mathcal{C}^\infty$ alors on montre par récurrence que $y \in \mathcal{C}^n$ pour tout n et donc $y \in E$. Ainsi

$$\forall h \in E,\ \exists y \in\ E/\ \varphi(y) = h$$

3. La question précédente indique que φ est surjective de E dans E (tout élément de E admet au moins un antécédent dans E.

4. Le noyau de φ est l'ensemble des solutions (toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donc dans E) de $y''+\lambda y = 0$. Le cours nous indique q'uil s'agit d'un espace vectoriel de dimension 2.

5. $y'' + \lambda y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 + \lambda = 0$.
- Si $\lambda < 0$ alors $\ker(\phi) = \mathrm{Vect}(x \mapsto \cos(\sqrt{-\lambda}x), x \mapsto \sin(\sqrt{-\lambda}x))$.
- Si $\lambda = 0$ alors $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x)$.
- Si $\lambda > 0$ alors $\ker(\phi) = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{ch}(\sqrt{\lambda}x), x \mapsto \mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}x))$.

6. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous indique que l'ensemble des solutions de $y'' + \lambda y = 1/2$ est un epace-affine dirigé par $\ker(\varphi)$.
- Si $\lambda \neq 0$ alors $x \mapsto \frac{1}{2\lambda}$ est solution particulière et l'ensemble des solutions est donc

$$(x \mapsto \frac{1}{2\lambda}) + \ker(\varphi)$$

- Si $\lambda = 0$ alors $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ est solution particulière et l'ensemble des solutions est donc

$$(x \mapsto \frac{x^2}{4}) + \mathrm{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x)$$

7.1. On doit encore distinguer les cas.
- Si $\lambda < 0$, tous les élements du noyau sont bornés :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \ker(\varphi) = \ker(\varphi) = \mathrm{Vect}(x \mapsto \cos(\sqrt{-\lambda}x), x \mapsto \sin(\sqrt{-\lambda}x))$$

- Si $\lambda = 0$ alors un élément de $\ker(\varphi)$ est du type $x \mapsto ax + b$. S'il est borné alors $a = 0$ et réciproquement. Ainsi,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \ker(\varphi) = \mathrm{Vect}(x \mapsto 1)$$

- Si $\lambda < 0$ alors un élément de $\ker(\varphi)$ est du type $ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$. S'il est bornée alors $a = 0$ (en regardant la limite en $+\infty$) et $b = 0$ (en regardant la limite en $-\infty$). Ainsi

$$\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \ker(\varphi) = \{0\}$$

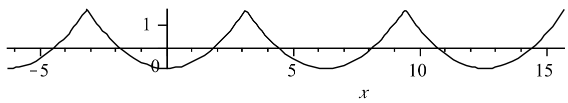
7.2. $\mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\ker(\varphi)$ sont ainsi en somme directe si et seulement si $\lambda < 0$.

7.3. Procédons par analyse. Si f et g existent alors $x \mapsto x - g(x)$ est un élément de $\ker(\varphi)$ et il existe donc a et b tels que $x - g(x)e = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$. En divisant par x^2 et en prenant la limite en $+\infty$, on obtient $a = 0$. De même on a $b = 0$ (comportement en $-\infty$). Ainsi, $\forall x,\ g(x) = x$ et g n'est pas bornée ! Une telle décomposition n'existe pas.

7.4. Si $\lambda \geq 0$, les espaces ne sont pas en somme directe et donc pas supplémentaires. Si $\lambda < 0$, la question précédente montre que $x \mapsto x$ ne se décompose pas sur ces espaces qui, à nouveau, ne sont pas supplémentaires.

Partie I.

1.1. Notons qu'il y a a priori un problème de définition puisque l'énoncé impose, outre la périodicité, une valeur en π ET $-\pi$. Comme celles-ci sont les mêmes, la définition est quand même licite.



1.2. Par parité de f, les coefficients en sinus sont nuls :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = 0$$

Pour les coefficients en cosinus, des intégrations par parties donnent

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Enfin on a

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

1.3. f est continue et de lasse $\mathcal{C}^1$ par morceaux (dérivable à dérivée continue sauf aux points $\pi + 2k\pi$ où il y a une dérivée à droite et gauche) et la série de Fourier de f est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

1.4. Avec $x = 0$, on obtient la convergence de la série proposée et

$$\beta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = f(0) = -\frac{\pi^2}{12}$$

1.5. La série $\sum((-1)^n/n^2)$ vérifie les hypothèses de la règle spéciale (suite alternée qui décroît en module vers 0) et on a donc

$$\left|\sum_{n=1}^{q} \frac{(-1)^n}{n^2} - \beta\right| \le \frac{1}{(q+1)^2}$$

Il suffit donc de choisir $q > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$ pour avoir l'ingéalité demandée. On peut prendre

$$q = E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

1.6. Dans le résultat de 1.3, on choisit maintenant $x = \pi$ pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = f(\pi) = \frac{\pi^2}{6}$$

1.7. f est dérivale à droite et gauche en π avec

$$f'_g(\pi) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f'_d(\pi) = -\frac{\pi}{2}$$

Ce résultat s'obtient en dérivant f et en prenant les limites en π^- et π^+ (ou $(-\pi)^+$) et grâce à un corollaire des accroissements finis.

En particulier, f n'est pas dérivable en π et n'est a fortiori pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2.1. Soit $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2+a^2}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n(x)| \le \frac{1}{n^2}$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente et $\sum(u_n)$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Les u_n étant toutes continues, le théorème de régularité des sommes de séries de fonctions indique que h est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2.2. Avec la question 1.3 on a $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ avec

$$v_n(x) = (-1)^n \cos(nx) \left(\frac{1}{n^2+a^2} - \frac{1}{n^2} \right) = (-1)^{n+1} \frac{a^2 \cos(nx)}{n^2(a^2+n^2)}$$

2.3. Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des sommes de séries de fonctions.
- Pour tout n, v_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- $\sum(v_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (de somme simple égale à $h - f$).
- Pour tout réel x et tout entier $n \ge 1$, on a

$$|v'_n(x)| \le \frac{a^2}{n(n^2+a^2)} \quad \text{et} \quad |v''_n(x)| \le \frac{a^2}{n^2+a^2}$$

Dans les deux cas, les majorants sont indépendants de x et sont les termes généraux de séries convergentes. Ainsi, $\sum(v'_n)$ et $\sum(v''_n)$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique et indique que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = h - f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ ses deux premières dérivées s'obtenant en "dérivant terme à terme".

2.4. f et $h - f$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\pi, \pi[$, il en est de même pour h par théorèmes généraux.

3. En reprenant les conclusions de 2.3, on a

$$\forall x \in]-\pi, \pi[,\ h''(x) - f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v''_n(x) = a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{a^2+n^2} = a^2 h(x)$$

c'est à dire que h est solution sur $]-\pi, \pi[$ de

$$y'' - a^2 y = \frac{1}{2}$$

Avec la question 6 des préliminaires, on en déduit qu'il existe des constantes c et d telles que

$$\forall x \in]-\pi, \pi[,\ h(x) = -\frac{1}{2a^2} + c\,\mathrm{ch}(ax) + d\,\mathrm{sh}(ax)$$

4. On a
$$\forall x\in]-\pi,\pi[,\ h'(x)-f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}v_n'(x)$$
Avec $x=0$, on en déduit que
$$h'(0)=f'(0)=0$$
En faisant tendre x vers π (et grâce à un corollaire des accroissements finis pour l'existence des dérivées à gauche) on a aussi
$$h_g'(\pi)=f_g'(\pi)+\sum_{n=1}^{+\infty}v_n'(\pi)=f_g'(\pi)=\frac{\pi}{2}$$

5. h est paire d'après sa définition et donc, avec les notations introduites en 3, $c=0$:
$$\forall x\in]-\pi,\pi[,\ h(x)=-\frac{1}{2a^2}+c\mathrm{ch}(ax)$$
En dérivant cette relation et en faisant tendre x vers π, on obtient $\frac{\pi}{2}=ac\mathrm{sh}(a\pi)$ ce qui donne la valeur de c et
$$\forall x\in]-\pi,\pi[,\ h(x)=\frac{\pi\mathrm{ch}(ax)}{2a\mathrm{sh}(a\pi)}-\frac{1}{2a^2}$$

6. h ainsi que la fonction dans le seond membre sont continues sur $\mathbb{R}$. L'identité précédente est donc encore valable en $\pm\pi$ par passage à la limite.

7. Pour $x=\pi$, on obtient
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi\mathrm{ch}(a\pi)}{2a\mathrm{sh}(a\pi)}-\frac{1}{2a^2}$$

8. Soit $w_n\ :\ a\mapsto\frac{1}{n^2+a^2}$. $\sum(w_n)$ est constituée de fonctions continues et converge normalement sur $\mathbb{R}$ (puisque $|w_n(a)|\le\frac{1}{n^2}$). Sa somme est donc continue sur $\mathbb{R}$. On peut donc passer à la limite $a\to 0$ dans la question précédente pour obtenir
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi\mathrm{ch}(a\pi)}{2a\mathrm{sh}(a\pi)}-\frac{1}{2a^2}\right)=\lim_{a\to 0}\frac{a\pi\mathrm{ch}(a\pi)-\mathrm{sh}(a\pi)}{2a^2\mathrm{sh}(a\pi)}$$
Or, au voisinage de 0, $a\pi\mathrm{ch}(a\pi)-\mathrm{sh}(a\pi)=a\pi(1+a^2\pi^2/2+o(a^2))-(a\pi+o(a^2))\sim\frac{a^3\pi^3}{2}$ et $2a^2\mathrm{sh}(a\pi)\sim 2a^3\pi$. On retrouve ainsi
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Partie II.

1. $f_a\ :\ x\mapsto\frac{\sin(ax)}{e^x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a donc des problèmes aux voisinages de 0 et de $+\infty$.
Au voisinage de 0, $f_a(x)\to a$ et f_a est prolongeable par continuité en 0.
Au voisinage de $+\infty$, $|f_a(x)|\le\frac{1}{e^x-1}\sim e^{-x}=o(1/x^2)$ est intégrable.
Finalement, f_a est intégrable sur $\mathbb{R}$ et son intégrale existe a fortiori.

2. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $x\mapsto e^{-kx}\sin(ax)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dominée par $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$. C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et J_k existe bien. On a
$$\int_0^t e^{-kx}\sin(ax)\,dx=\mathrm{Im}\left(\int_0^t e^{(-k+ia)x}\,dx\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{-k+ia}\left(e^{(-k+ia)t}-1\right)\right)$$

En faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J_k = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{k - ia}\right) = \frac{a}{k^2 + a^2}$$

3. En utilisant une somme géométrique de raison $-e^{-x}$, on peut écrire que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}\sin(ax)}{1 - e^{-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(k+1)x}\sin(ax)$$

Par ailleurs, la question précédente indique que

$$a\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a^2 + (k+1)^2} = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-(k+1)x}\sin(ax)\ dx$$

En intégrant la première relation et en soustrayant alors la seconde, on obtient

$$R_n = \int_0^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-(k+1)x}\sin(ax)\ dx$$

Sous l'intégrale, on reconnaît une somme géométrique et on obtient

$$R_n = \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x}\frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\ dx$$

4. $f_a\ :\ x \mapsto \frac{\sin(ax)}{e^x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de limite nulle en $+\infty$ (voir question 1 de cette partie). C'est donc une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$ et

$$|R_n| \le \|f_a\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x}\ dx = \frac{\|f_a\|_\infty}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

5. On divise par a dans la relation de la question et on fait tendre n vers $+\infty$ pour obtenir

$$\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + (k+1)^2} = \frac{\pi \mathrm{ch}(a\pi)}{2a\mathrm{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}$$

la dernière identité provenant de la question 7 de la partie I.