

## e3a PSI B - 2009 Un corrigé

### Exercice 1.

1. D'après le théorème du rang  $\ker(A)$  est de dimension  $4 - \text{rg}(A) = 1$  et est donc une droite vectorielle. En particulier, 0 est valeur propre de  $A$ .
2. Avec les hypothèse sur la somme par ligne des coefficients de  $A$ , on peut affirmer que  $(1, 1, 1, 1)$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 1.
3. 0 et 1 sont valeurs propres (et donc de multiplicité au moins 1) et  $-1$  est valeur propre double. La somme des multiplicités des valeurs propres n'excédant pas 4 (dimension de l'espace), on a toutes les valeurs propres (racines de  $P_A$ ). Comme  $P_A$  est unitaire ( $(-1)^4 = 1$ ) on a ainsi

$$P_A = X(X - 1)(X + 1)^2$$

4.  $R_k$  est de degré inférieur à 3 et s'écrit  $a_k X^3 + b_k X^2 + c_k X + d_k$ . En notant  $Q_k$  le quotient, on a  $X^k = P_A Q_k + R_k$ ; en appliquant cette égalité à 0, 1,  $-1$  et en la dérivant puis en faisant  $X = -1$ ,

$$\text{on obtient (pour } k \geq 1) \begin{cases} d_k = 0 \\ a_k + b_k + c_k + d_k = 1 \\ -a_k + b_k - c_k + d_k = (-1)^k \\ 3a_k - 2b_k + c_k = k(-1)^k \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} a_k = \frac{1+(3-2k)(-1)^k}{4} \\ b_k = \frac{1+(-1)^k}{2} \\ c_k = \frac{1+(2k-5)(-1)^k}{4} \\ d_k = 0 \end{cases} .$$

5. Comme  $P \mapsto P(A)$  est un morphisme d'algèbre et comme  $P_A$  annule  $A$  (théorème de Cayley-Hamilton) on en déduit que

$$\forall k \geq 1, A^k = R_k(A) = \frac{1 + (3 - 2k)(-1)^k}{4} A^3 + \frac{1 + (-1)^k}{2} A^2 + \frac{1 + (2k - 5)(-1)^k}{4} A$$

### Exercice 2.

1. (a) Comme on peut passer à la limite dans une égalité large,  $\forall n, \alpha \leq x_n \leq \beta$  donne  $x \in [\alpha, \beta]$ .  $f$  étant continue (et même deux fois dérivable) sur cet ensemble, elle est continue en  $x$ . En passant à la limite dans  $f(x_n) = 0$  ( $n \rightarrow +\infty$ ) on obtient  $f(x) = 0$ .
  - (b)  $f$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $[x_n, x_{n+1}]$ , l'égalité des accroissements finis donne l'existence de  $y_n \in ]x_n, x_{n+1}[$  tel que  $f(x_{n+1}) - f(x_n) = (x_{n+1} - x_n)f'(y_n)$  et donc  $f'(y_n) = 0$ .
  - (c)  $(x_n)$  et  $(x_{n+1})$  étant convergentes de limite  $x$ , on a  $y_n \rightarrow x$  par théorème d'encadrement. Par continuité de  $f'$  en  $x$  et comme  $\forall n, f'(y_n) = 0$ , on obtient  $f'(x) = 0$  en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ .
  - (d)  $f$  est donc solution du problème de Cauchy associé à  $(E)$  et aux conditions  $y(x) = y'(x) = 0$ . Par théorème de Cauchy-Lipschitz cas linéaire, ce problème admet sur  $[\alpha, \beta]$  une unique solution. Comme la fonction nulle est une solution,  $f$  est donc la fonction nulle.
2. Dans le cas général  $(x_n)$  est une suite bornée de réels. On peut en extraire une sous-suite convergente (théorème de Bolzano-Weierstrass) et se ramener au cas précédent. Le théorème précédent n'est cependant pas au programme de PSI (me semble-t-il)...
  3.  $x \mapsto \cos(x)$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de  $y'' + y = 0$  et s'annule une infinité de fois.

### Exercice 3.

Partie A : règle de Raabe-Duhamel.

1. Si  $\lambda < 0$  alors  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1^+$  et la règle de D'Alembert s'applique à la série positive  $\sum(u_n)$  pour donner sa divergence (à partir d'un certain rang,  $u_{n+1}/u_n \geq 1$  et il existe donc un rang  $n_0$  tel que  $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} > 0$  et on a même divergence grossière de la série).

2. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et ainsi

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\beta - \lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. (a) Comme  $\beta - \lambda < 0$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$  tend vers  $0^-$  et est asymptotiquement négatif. Ainsi

$$\exists N / \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

(b) Ce qui précède s'écrit  $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$  et une récurrence immédiate donne alors

$$\forall n \geq N, u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n$$

(c) Comme  $\sum v$  converge (car  $\beta > 1$ ), il en est de même de  $\sum(K v_n)$ . Par théorème de comparaison sur les séries positives, on a donc aussi la convergence de  $\sum(u_n)$ .

4. Si  $\lambda \in [0, 1[$ , on peut choisir  $\beta \in ]\lambda, 1[$ . On a alors

$$\exists N / \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

et une récurrence immédiate donne

$$\forall n \geq N, u_n \geq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n$$

Comme  $K \neq 0$  et  $\sum v$  diverge (car  $\beta < 1$ ),  $\sum(K v_n)$  diverge. Par théorème de comparaison sur les séries positives, on a donc aussi la divergence de  $\sum(u_n)$ .

5.  $\sum(x_n)$  est une série de Riemann divergente et  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Une comparaison série intégrale donne (grâce à la décroissance de  $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)^2}$  sur  $]1, +\infty[$ )

$$\forall n \geq 3, \sum_{k=3}^n y_k \leq \int_2^n \frac{dt}{t \ln(t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^n \leq \frac{1}{\ln(2)}$$

$\sum(y_n)$  est ainsi convergente (les sommes partielles forment une suite croissante et, on vient de le voir, majorée; la suite des sommes partielles converge donc). De plus  $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} = 1 + o(1/n)$  donne

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-2} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On peut ainsi être dans le cas  $\lambda = 1$  avec convergence ou divergence de la série (on a bien un contre-exemple puisque les séries proposées sont à termes  $> 0$ ).

## Partie B.

1. On a

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comme  $(w_n)$  est à terme strictement positifs, on est dans le cas précédent avec  $\lambda = \frac{1}{6} < 1$  et  $\sum(w_n)$  diverge.

2. (a)  $t \mapsto \frac{1}{(t^4+1)^n}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et équivalente à  $1/t^{4n}$  au voisinage de  $+\infty$  et donc intégrable au voisinage de  $+\infty$  par comparaison aux fonctions de Riemann ( $4n \geq 4 > 1$ ). La fonction est donc intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et son intégrale  $I_n$  sur  $\mathbb{R}^+$  existe a fortiori.
- (b) Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^n} &= \left[ \frac{t}{(1+t^4)^n} \right]_0^b + 4n \int_0^b \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}} dt \\ &= \frac{b}{(1+b^4)^n} + 4n \left( \int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^n} - \int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

Les différents termes admettent une limite quand  $b \rightarrow +\infty$  et ce passage à la limite donne

$$I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$$

- (c) On a ainsi  $\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \frac{1}{4n}$ . Comme  $\sum(I_n)$  est une série à termes  $> 0$ , on est dans le cas de la partie A avec  $\lambda = 1/4 < 1$  et  $\sum(I_n)$  diverge.
3. (a) On reconnaît les coefficients du développement de  $S(x) = (1+x)^\alpha$ . Le rayon de convergence de la série vaut 1 (on pourrait, par exemple, utiliser la règle de D'Alembert pour le voir).
- (b)  $\alpha$  n'étant pas un entier naturel, les  $a_k$  sont tous non nuls. On a

$$\forall n \geq \alpha, \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n-\alpha}{n+1} = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{\alpha+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On est dans le cadre de la partie A (suite à termes  $> 0$ ) avec  $\lambda = \alpha + 1$ . Ici,  $\alpha$  n'est pas entier naturel et donc  $\alpha + 1 \neq 1$ . Comme il y a convergence de  $\sum(a_n)$  pour  $\alpha + 1 < 1$  et divergence si  $\alpha + 1 > 1$ , il y a donc convergence si et seulement si  $\alpha > 0$ .

- (c) On a

$$\forall x \in [-1, 1], |a_n x^n| \leq |a_n|$$

On est dans le cas ( $\alpha > 0$ ) où le majorant est le terme général d'une série convergente. Ainsi,  $\sum(a_n x^n)$  converge normalement sur  $[-1, 1]$ . Comme c'est une série de fonctions continues, la somme  $S$  est continue sur  $[-1, 1]$ . On a ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x)^\alpha = 2^\alpha$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (1+x)^\alpha = 0$$

- (d) On suppose  $\alpha < -1$ . On est dans le cadre de A.1 pour  $\sum(|a_n|)$ . On y a vu qu'il y a avit divergence grossière. ( $|a_n|$ ) n'étant pas de limite nulle, il en est de même de  $(a_n)$  et  $\sum(a_n)$  diverge grossièrement elle aussi.
- (e) On a

$$\ln(|a_n|) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{|\alpha - k|}{k+1}\right)$$

Or, on remarque que (pour  $k \geq 1$ )

$$\ln\left(\frac{k-\alpha}{k+1}\right) = \ln \ln\left(1 - \frac{\alpha+1}{k+1}\right) \sim -\frac{\alpha+1}{k+1}$$

C'est le terme général d'une série divergente négative dont les sommes partielles tendent donc vers  $-\infty$ . Ceci montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$$

Ceci montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

Mais d'après 3.b,  $(|a_n|)$  décroît à partir d'un certain rang (le quotient  $|a_{n+1}|/|a_n|$  tendant vers  $1^-$ ) et la suite  $(a_n)$  est alternée (on passe de  $a_n$  à  $a_{n+1}$  en multipliant par un nombre négatif). La règle spéciale s'applique et indique que  $\sum(a_n)$  converge.

Si  $x \in [0, 1]$ , on peut de même appliquer la règle spéciale pour prouver la convergence de  $\sum(a_n x^n)$  et obtenir

$$\forall x \in [0, 1], \left| \sum_{k \geq n} a_k x^k \right| \leq |a_n x^n| \leq |a_n|$$

Le majorant est indépendant de  $x$  et de limite nulle quand  $n \rightarrow +\infty$ .  $\sum(a_n x^n)$  est donc uniformément convergente sur  $[0, 1]$  et  $S$  est donc continue sur  $[0, 1]$ . Comme en question c, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x)^\alpha = 2^\alpha$$

## Exercice 4.

- Un développement par bilinéarité donne

$$\left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq p} \lambda_i \lambda_j \langle x_i | x_j \rangle$$

Avec l'hypothèse faite, on a alors immédiatement

$$\left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i y_i \right\|$$

Supposons  $(x_1, \dots, x_p)$  libre. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des scalaires tels que  $\sum \lambda_i y_i = 0$ . Ce qui précède donne  $\sum \lambda_i x_i = 0$  et l'indépendance des  $x_i$  donne la nullité des  $\lambda_i$ . On a donc aussi l'indépendance linéaire de la famille  $(y_1, \dots, y_p)$ .

- $(x_1, \dots, x_n)$  est libre et, par cardinal et dimension, c'est une base de  $E$ . Il existe donc une unique application linéaire  $f$  telle que  $\forall i, f(x_i) = y_i$ . On a

$$\left\| f \left( \sum_{i=1}^n a_i x_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i y_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|$$

et  $f$  conserve la norme. C'est donc un automorphisme orthogonal.

- (a) On a  $p \leq n$  car la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre en dimension  $n$ . Comme on suppose  $p \neq n$ , on a ainsi  $p < n$ . On a  $\dim(F) = p$  (indépendance de  $x_i$ ) et le cours indique que

$$\dim(F^\perp) = n - \dim(F) = n - p$$

$G$  est aussi de dimension  $p$  (car  $(y_1, \dots, y_p)$  est libre d'après la question 1) et donc

$$\dim(G^\perp) = n - \dim(G) = n - p$$

(b) Dans un espace de dimension  $k$ , une famille orthonormale a au plus  $k$  éléments (car elle est libre) et il y en a une de  $k$  éléments (existence de b.o.n.). Ainsi, l'entier  $q$  convient ssi  $q - p \in [0..n - p]$  c'est à dire  $q \in [p..n]$  (le cas  $q = p$  étant discutable car il n'y a alors rien à ajouter).

Soient  $i, j \in [1..q]$ ; par symétrie des rôles, on peut supposer  $i \leq j$ . On distingue alors trois cas.

- Si  $i \leq j \leq p$  alors  $\langle x_i | x_j \rangle = \langle y_i | y_j \rangle$  par hypothèse.
- Si  $i \leq p < j$  alors  $\langle x_i | x_j \rangle = \langle y_i | y_j \rangle = 0$  ( $x_i \in F$ ,  $x_j \in F^\perp$ ,  $y_i \in G$  et  $y_j \in G^\perp$ ).
- Si  $p + 1 \leq i \leq j$  alors  $\langle x_i | x_j \rangle = \langle y_i | y_j \rangle = \delta_{i,j}$  (familles orthonormées).

On a ainsi prouvé que

$$\forall i, j \in \{1, \dots, q\}, \langle x_i | x_j \rangle = \langle y_i | y_j \rangle$$

(c) Pour  $q = n$ , on est amené au cas de la question 2. L'automorphisme orthogonal trouvé convient a fortiori si on se limite aux  $p$  premiers vecteurs.

4. Soit  $r$  le rang de la famille  $(x_1, \dots, x_p)$ . Si  $r = 0$  alors les  $x_i$  sont tous nuls, les  $y_i$  le sont donc aussi ( $\forall i, \|x_i\| = \|y_i\|$ ) et on peut choisir l'application identique pour  $f$ . On suppose donc que  $r \geq 1$ .

Quitte à renuméroter, on peut supposer que  $(x_1, \dots, x_r)$  est libre. La question 1 montre que  $(y_1, \dots, y_r)$  est libre. Notons que la famille  $(y_1, \dots, y_p)$  est aussi de rang  $r$  (en effet, les  $x$  et  $y$  jouent des rôles symétriques et on a une équivalence en question 1). Les espaces  $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  et  $G = \text{Vect}(y_1, \dots, y_r)$  ont ainsi même dimension.

En procédant comme à la question 3.c, on trouve un automorphisme orthogonal  $f$  tel que  $\forall i \in [1..r], f(x_i) = y_i$  et  $f(F^\perp) = G^\perp$ .

Soit alors  $i \geq r + 1$ ; il existe des scalaires  $\lambda_k$  tels que  $x_i = \sum_{k=1}^r \lambda_k x_k$  et

$$f(x_i) = \sum_{k=1}^r \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=1}^r \lambda_k y_k$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall j \in [1..r], \langle f(x_i) | y_j \rangle &= \sum_{k=1}^r \lambda_k \langle y_k | y_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^r \lambda_k \langle x_k | x_j \rangle \\ &= \langle x_i | x_j \rangle \\ &= \langle y_i | y_j \rangle \end{aligned}$$

On a ainsi  $f(x_i) - y_i \in G^\perp$ . Mais par ailleurs,  $f(x_i) - y_i \in G$  ( $x_i \in F$  et  $f(x_i) \in f(F) = G$ ;  $y_i \in G$ ). Finalement,  $f(x_i) - y_i = 0$ , ce qu'il restait à prouver.