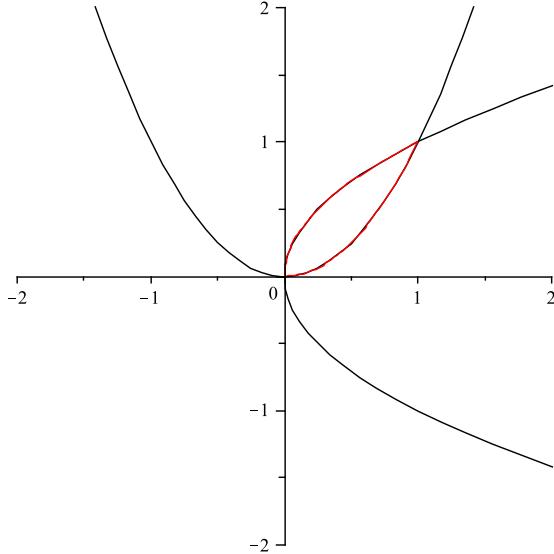


e3a PSI A - 2009

Un corrigé

Applications simples du cours.

1.1. G est l'intersection de “l'intérieur” de deux paraboles.



1.2. On peut paramétriser γ par

$$(x(t), y(t)) = \begin{cases} (t^2, -t) & \text{si } t \in [-1, 0] \\ (t, t^2) & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases}$$

On en déduit que

$$\int_{\gamma} V = \int_{-1}^0 ((-2t^3 - t^4)2t) + 2t^2(-1) dt + \int_0^1 ((2t^3 - t^2) + (t + t^4)(2t)) dt = \frac{1}{30}$$

1.3. Si on utilise la formule de Green-Riemann, on obtient

$$\int_{\gamma} V = \iint_G (1 - 2x) dx dy$$

On a $G = \{(x, y) / x \in [0, 1], y \in [x^2, \sqrt{x}]\}$. Par théorème de Fubini (appliqué à une fonction continue sur un compact) on a donc

$$\int_{\gamma} V = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy \right) dx = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{30}$$

2.1. D'après la formule de Green-Riemann, on $\int_{\gamma} V = 0$ dans le cas envisagé.

2.2. Soit $f : (x, y) \mapsto \cos(xy)$. f étant de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

En posant $P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y \sin(xy)$ et $Q = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x \sin(xy)$ on a donc la relation voulue.

3.1. En utilisant la formule de Green-Riemann on a

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\gamma} x \, dy = \iint dxdy \\ A_2 &= - \int_{\gamma} y \, dx = \iint dxdy \\ A_3 &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x \, dy - y \, dx) = \iint dxdy \end{aligned}$$

et ces trois quantités sont égales à l'aire délimitée par γ .

3.2. Notons $M(t) = (x(t), y(t)) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$; on a

$$M(t+2\pi) = M(t), \quad M(t+\pi) = \text{sym}_0(M(t)), \quad M(-t) = \text{sym}_{(Ox)}(M(t)), \quad M(\pi/2-t) = \text{sym}_{x=y}(M(t))$$

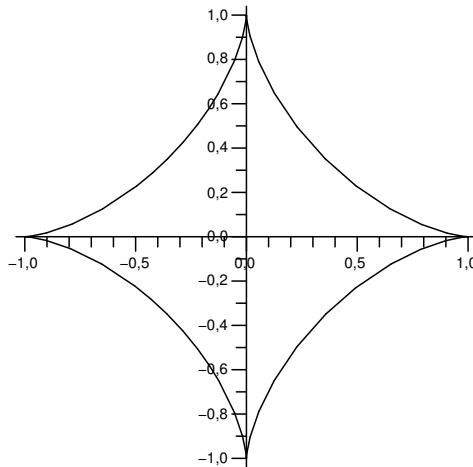
On peut donc faire une étude sur $[0, \pi/4]$ puis une symétrie par rapport à la première bissectrice (courbe sur $[0, \pi/2]$) puis une symétrie d'axe Ox (courbe sur $[-\pi/2, \pi/2]$) puis une symétrie par rapport à l'origine (courbe sur $[-\pi/2, 3\pi/2]$ et donc en entier puisqu'il y a 2π -périodicité). On a

$$\forall t \in [0, \pi/4], \quad x'(t) = -3 \sin(t) \cos^2(t) \leq 0, \quad y'(t) = 3 \cos(t) \sin^2(t) \geq 0$$

et x décroît sur $[0, \pi/4]$ alors que y croît. Le seul point d'annulation commun est en 0 (point stationnaire). Comme

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(1 - \frac{t^2}{2} + o_0(t^2)\right)^3 = 1 - \frac{3}{2}t^2 + o_0(t^2) \\ y(t) &= (t + o_0(t))^3 = o_0(t^2) \end{aligned}$$

la tangente en $M(0)$ est portée par $(x''(0), y''(0)) = (-3, 0)$ et est horizontale. D'après les symétries détectées, on a un point de rebroussement de première espèce. On obtient la courbe suivante



3.3. On peut utiliser l'une des formules de 3.1 pour obtenir l'aire. Elle vaut

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3 \cos^4(t) \sin^2(t) + 3 \sin^4(t) \cos^2(t)) \, dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin^2(t) \, dt$$

AVec la formule du sinus double,

$$\mathcal{A} = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) \, dt = \frac{3}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(4t)) \, dt = \frac{3\pi}{8}$$

Problème.

Préliminaires.

1. La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est concave sur $[0, \pi/2]$ (sa dérivée seconde, $-\sin$, est négative sur cet intervalle). Son graphe est donc situé au dessus de la corde $[(0, 0), (\pi/2, 1)]$ et en dessous de la première bissectrice (tangente à l'origine). Ceci s'écrit

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$$

2.1. φ est continue sur $]0, 1]$ et de limite 1 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 (avec $\varphi(0) = 1$).

2.2. Une intégration par parties (les fonctions étant C^1 sur $[1, +\infty[$, celle-ci est licite) donne

$$\forall x \geq 1, \phi(x) = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

2.3. $\left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ est de limite nulle quand $x \rightarrow +\infty$. $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et dominée par $1/t^2$; elle est donc intégrable sur $[1, +\infty[$. A fortiori, son intégrale entre 1 et x admet une limite quand $x \rightarrow +\infty$. On peut donc écrire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

2.4. Pour tout $x > 0$, on a $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^1 \varphi + \phi(x)$ admet une limite quand $x \rightarrow +\infty$ et on peut écrire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt + \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

1 Une première façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1. Par théorèmes généraux, P et Q sont de classe C^∞ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et donc, en particulier, de classe C^1 sur tout domaine U (ouvert selon le programme) de \mathbb{R}^2 qui ne contient pas $(0, 0)$.
2. Avec les hypothèses faites, on peut utiliser le théorème de Green-Riemann. Or, un calcul donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2 + y^2)^2} ((-x^2 + y^2 + yx^2 + y^3) \cos(x) - (x^3 + xy^2 + 2xy) \sin(x)) \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\int_\gamma V = 0$$

3.1. On a

$$\begin{aligned} P(x(\theta), y(\theta)) &= \frac{e^{-y(\theta)}}{\rho} (\sin(x(\theta)) \cos(\theta) - \cos(x(\theta)) \sin(\theta)) \\ P(x(\theta), y(\theta)) &= \frac{e^{-y(\theta)}}{\rho} (\cos(x(\theta)) \cos(\theta) + \sin(x(\theta)) \sin(\theta)) \end{aligned}$$

On multiplie la première quantité par $-\rho \sin(\theta)$ et la seconde par $\rho \cos(\theta)$ pour obtenir

$$A_\rho = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-y(\theta)}}{\rho} \cos(x(\theta)) d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-\rho \sin(\theta)} \cos(\rho \cos(\theta)) d\theta$$

3.2. On veut utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall \rho \in \mathbb{R}^+$, $\theta \mapsto e^{-\rho \sin(\theta)} \cos(\rho \cos(\theta))$ est continue sur $[0, \pi/2]$.
- $\forall \theta \in [0, \pi/2]$, $\rho \mapsto e^{-\rho \sin(\theta)} \cos(\rho \cos(\theta))$ est continue sur \mathbb{R}^+ .
- $\forall \rho \geq 0$, $\forall \theta \in [0, \pi/2]$, $|e^{-\rho \sin(\theta)} \cos(\rho \cos(\theta))| \leq 1$. Le majorant est une fonction intégrable sur $[0, \pi/2]$ (continue sur ce segment).

Le théorème s'applique et indique que $\rho \mapsto A_\rho$ est continue sur \mathbb{R}^+ . En particulier,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} A_\rho = A_0 = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

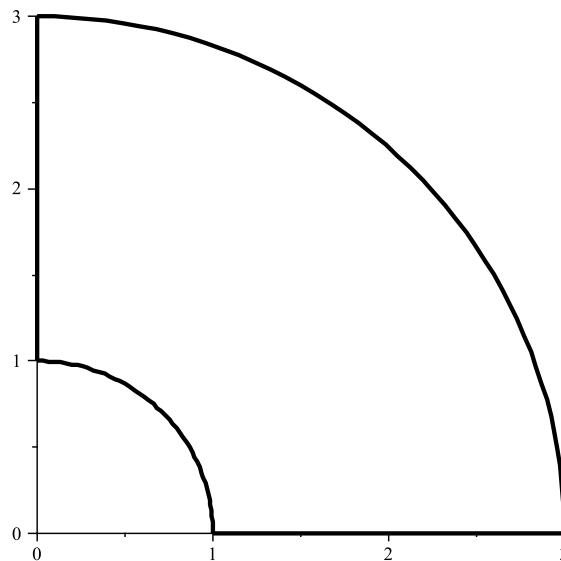
3.3. En utilisant la première question des préliminaires, on a

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \left|e^{-\rho \sin(\theta)} \cos(\rho \cos(\theta))\right| \leq e^{-\rho \sin(\theta)} \leq e^{-\frac{2\rho}{\pi} \theta}$$

On en déduit que

$$|A_\rho| \leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\rho}{\pi} \theta} d\theta = -\frac{\pi}{2\rho} \left[e^{-\frac{2\rho}{\pi} \theta}\right]_0^{\pi/2} \leq \frac{\pi}{2\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} 0$$

4.1. Le dessin est fait ici avec $r = 1$ et $R = 3$.



4.2. γ_1 est paramétré par $t \in [r, R] \mapsto (t, 0)$ et ainsi

$$\int_{\gamma_1} V = \int_r^R P(t, 0) dt = \int_r^R \frac{\sin(t)}{t} dt$$

4.3. γ_3 est paramétré par $t \in [-R, -r] \mapsto (0, -t)$ et ainsi

$$\int_{\gamma_3} V = - \int_{-R}^{-r} Q(0, -t) dt = 0$$

4.4. D'après la question 2, $\int_{\Gamma} V = 0$. Par ailleurs (en prenant garde au fait que γ_4 est parcouru dans le sens horaire)

$$\int_{\gamma_2} V = A_R \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_4} V = -A_r$$

Avec les deux questions précédentes, on a donc

$$0 = \int_r^R \frac{\sin(t)}{t} dt + A_R - A_r$$

Il reste à faire tendre r vers 0^+ et R vers $+\infty$ (on a vu l'existence des limites) pour obtenir

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

2 Une deuxième façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1.1. $f_n : t \mapsto \frac{\cos(t) \sin(2nt)}{\sin(t)}$ et $g_n : t \mapsto \frac{\sin(2nt)}{t}$ sont continues sur $[0, \pi/2]$ et prolongeables par continuité en 0 (par $f_n(0) = 2n$ et $g_n(0) = 2n$). Ce sont donc des fonctions intégrables sur le segment $[0, \pi/2]$ et u_n et v_n existent a fortiori.

1.2. La formule $\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos(\frac{a+b}{2}) \sin(\frac{a-b}{2})$ indique que

$$u_{n+1} - u_n = 2 \int_0^{\pi/2} \cos((2n+1)t) \cos(t) dt$$

La formule $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$ indique alors que

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos((2n+2)t) + \cos(2nt)) dt$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = 0$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc constante et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 = \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

2. Une intégration par parties donne

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, H_m = \left[h(t) \frac{e^{imt}}{im} \right]_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{im} \int_{\alpha}^{\beta} h'(t) e^{imt} dt$$

Ainsi, on a

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, |H_m| \leq \frac{|h(\alpha) + h(\beta)|}{m} + \frac{|\beta - \alpha|}{m} \|h'\|_{\infty, [\alpha, \beta]}$$

ceci étant licite car h' est continue sur le segment $[\alpha, \beta]$. On a alors immédiatement

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} H_m = 0$$

3. h est une fonction continue sur $[0, \pi/2]$ et

$$h(t) = \frac{\sin(t) - t \cos(t)}{t \sin(t)} = \frac{(t + o(t^2)) - (t + o(t^2))}{t^2 + o(t^2)} = \frac{o(1)}{1 + o(1)}$$

On en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$$

et h est prolongable par continuité en posant $h(0) = 0$. On a alors une fonction continue sur $[0, 1]$ et de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi/2]$ avec

$$\forall t > 0, h'(t) = \frac{t^2 - \sin^2(t)}{t^2 \sin^2(t)} = \frac{(t - \sin(t))(t + \sin(t))}{t^2 \sin^2(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{(t^3/6)(2t)}{t^4} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{1}{3}$$

Par un corollaire des accroissements finis, on en déduit que h est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi/2]$ avec $h'(0) = 1/3$.

4.1. On remarque que $v_n - u_n = \int_0^{\pi/2} h(t) \sin(2nt) dt$. D'après le lemme de Riemann-Lebesgue (en passant la partie imaginaire) on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

4.2. Le changement de variable $x = 2nt$ donne

$$v_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ (on a l'existence des différentes quantités avec ce qui précède) on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$$

3 Une troisième façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1. Un simple calcul de dérivée montre que

$$x \mapsto -\frac{e^{-\alpha x}}{1 + \alpha^2} (\cos(x) + \alpha \sin(x))$$

est une primitive sur \mathbb{R} de $x \mapsto \sin(x)e^{-\alpha x}$.

2. Avec le théorème de Fubini (sur un pavé et utilisé avec une fonction de classe \mathcal{C}^1) on a

$$J = \int_0^u \left(\int_0^u \sin(x)e^{-xy} dy \right) dx = \int_0^u \left[-\frac{\sin(x)}{x} e^{-xy} \right]_{y=0}^{y=u} dx = \int_0^u \frac{\sin(x)}{x} (1 - e^{ux}) dx$$

mais aussi

$$\begin{aligned} J &= \int_0^u \left(\int_0^u \sin(x)e^{-xy} dx \right) dy = \int_0^u \left[-\frac{e^{-yx}}{1 + y^2} (\cos(x) + y \sin(x)) \right]_{x=0}^{x=u} dy \\ &= \int_0^u \frac{1 - e^{yu}(\cos(u) + y \sin(u))}{1 + y^2} dy \end{aligned}$$

L'égalité demandée s'en déduit.

3.1. Comme $|\sin(x)/x| \leq 1$, on a

$$K_1 \leq \int_0^u e^{-xu} dx = \frac{1 - e^{-u^2}}{u} \xrightarrow[u \rightarrow +\infty]{} 0$$

3.2. On a aussi

$$|K_2| \leq \int_0^u \frac{1 + y}{1 + y^2} e^{-yu} dy$$

$\frac{1+y}{1+y^2}$ est continue sur \mathbb{R}^+ et de limite nulle en $+\infty$. C'est donc une fonction bornée sur \mathbb{R}^+ . Soit M un majorant de son module.

$$|K_2| \leq M \int_0^u e^{-yu} dy = M \frac{1 - e^{-u^2}}{u} \xrightarrow[u \rightarrow +\infty]{} 0$$

3.3. La question 2 donne

$$\int_0^u \frac{\sin(x)}{x} dx = K_1(u) + \int_0^u \frac{dy}{1 + y^2} - K_2(u)$$

En faisant tendre u vers $+\infty$ ($\int_0^u \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan(u)$) on a alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

4.1. $x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{x^2}$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} , prolongeable par continuité en 0 (par la valeur 1) et dominée par $1/x^2$ (donc intégrable au voisinage de $+\infty$). C'est donc une fonction intégrable sur \mathbb{R}^+ et son intégrale sur \mathbb{R}^+ existe a fortiori.

4.2. Par un calcul similaire à celui de la question 2.2 des préliminaires, on a (en primitivant \sin en $1 - \cos$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx$$

En posant $t = x/2$, on en déduit que

$$\frac{\pi}{2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2t)}{4t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$$