Exercice 1 (Applications du théorème de Rolle)

1. Cours...
2. Classique : On note $a_1 < a_2 < .... < a_p$ p zéros distincts de h. Pour $k \in \{1, 2, ..., p-1\}$, on applique le théorème de Rolle pour h sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$: comme $[a_k, a_{k+1}] \subset I$, h est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$, dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$ et $h(a_k) = h(a_{k+1})$ (car les deux sont nuls), il existe au moins un $\alpha_k \in]a_k, a_{k+1}$ tel que $h'(\alpha_k) = 0$.
   $\boxed{\alpha_1, ..., \alpha_{p-1} \text{ sont } p-1 \text{ zéros distincts de } h'}$ (car $a_1 < \alpha_1 < a_2 < \alpha_2 < ... < \alpha_{k-1} < a_p$).
3. *En fait b est strictement négative sur $]0, +\infty[$!*
   $a(x) = x^{30}\varphi(x)$ avec $\varphi(x) = 3x^{-50} + x^{-40} + 4x^{-20} + 2x^{-10}$.
   Par l'absurde si a s'annulait au moins 5 fois sur $]0, +\infty[$ alors φ aussi et (φ est bien dérivable sur $]0, +\infty[$) d'après 2°) φ' s'annulerait au moins 4 fois sur $]0, +\infty[$. Or :
   $\varphi'(x) = -150x^{-51} - 40x^{-41} - 80x^{-21} - 20x^{-11} = b(x)$. Contradiction.
   $\boxed{a \text{ s'annule au plus 4 fois sur }]0, +\infty[.}$
4. Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$:
   Au rang 1, une fonction f_1 s'écrit $f_1 : x \mapsto \lambda x^\alpha$ avec $\lambda \neq 0$ donc elle ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$ (donc elle s'annule au plus 0 fois).
   Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose le résultat au rang n.
   Soit alors $\alpha_1 < ... < \alpha_{n+1}$, $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}$ des réels non nuls et $f_{n+1} : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x^{\alpha_k}$.
   $f_{n+1} = x^{\alpha_{n+1}}\varphi(x)$ où $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k - \alpha_{n+1}} + \lambda_{n+1}$.
   f_{n+1} et φ ont les mêmes zéros or $\varphi'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\alpha_k - \alpha_{n+1})x^{\alpha_k - \alpha_{n+1} - 1}$.
   D'après l'hypothèse au rang n appliquée à φ' (on peut : les coefficients $\lambda_k(\alpha_k - \alpha_{n+1})$ sont non nuls et les exposants $\alpha_k - \alpha_{n+1} - 1$ sont rangés dans l'ordre strictement croissant), φ' s'annule au plus $n-1$ fois donc d'après le 2°) φ s'annule au plus n fois donc f_{n+1} aussi. C'est le résultat au rang $n+1$.$\square$
5. D'après le 4°) (on peut...) P admet au plus 3 zéros dans $]0, +\infty[$. 0 n'est pas racine de P. En considèrant pour $x > 0$, $f(x) = P(-x) = x^{400} + 7x^{201} + 4x^{101} + 1$, on a aussi au plus 3 zéros de f dont au plus trois racines de P dans $]-\infty, 0[$.
   $\boxed{P \text{ admet au plus 6 racines réelles.}}$
   Là encore l'exemple est mal choisi, f est en fait > 0 ! ! !

Exercice 2 (Inégalité d'Hadamard)

Partie A

1. $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$.
   a) Il existe P orthogonale telle que ${}^tPSP = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. De plus les valeurs propres $\lambda_k \geqslant 0$, en notant $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ et $M = Pdiag(\mu_1, ..., \mu_n)\ {}^tP$, on aura :
   ${}^tM = {}^t({}^tP)\ {}^tdiag(\mu_1, ..., \mu_n)\ {}^tP = Pdiag(\mu_1, ..., \mu_n)\ {}^tP$ (en fait M est symétrique...)
   ${}^tMM = Pdiag(\mu_1, ..., \mu_n)\ {}^tPPdiag(\mu_1, ..., \mu_n)\ {}^tP$
   $= Pdiag(\mu_1, ..., \mu_n)diag(\mu_1, ..., \mu_n)\ {}^tP$ (car ${}^tPP = I_n$)
   ${}^tMM = Pdiag(\mu_1^2, ..., \mu_n^2)\ {}^tP = Pdiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)\ {}^tP = S$
   b) *C'est du cours mais remontrons-le ici avec le a) :*
   ${}^tXSX = {}^t(MX)MX = \| MX \|^2 \geqslant 0$.
   c) $s_{i,i}$ est la i-ème coordonnée dans la base canonique $(E_1, ..., E_n)$ de la i-ème colonne C_i, comme cette base est orthonormée on a :
   $s_{i,i} = (C_i|E_i) = {}^t(SE_i)E_i = {}^tE_i\ {}^tSE_i = {}^tE_iSE_i \geqslant 0$ d'après b).
2. $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. On reprend les démonstrations précédentes avec en plus les valeurs propres $\lambda_k > 0$.
   a) On avait posé $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ et $M = Pdiag(\mu_1, ..., \mu_n)\ {}^tP$. Comme les $\mu_k > 0$, la matrice M est un produit de matrices inversibles donc inversible.
   b) *C'est du cours aussi mais remontrons-le ici avec le a) :*
   ${}^tXSX = {}^t(MX)MX = \| MX \|^2$. Ici X non nulle et M inversible donc MX est non nulle donc ${}^tXSX = \| MX \|^2 > 0$.
   c) $s_{i,i} = {}^tE_iSE_i > 0$ d'après 2.b).
3. Comme $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$, on a vu $s_{i,i} \geqslant 0$ donc $\displaystyle\prod_{i=1}^n s_{i,i} \geqslant 0$.
   Comme $S \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ au moins une des valeurs propres est nulle donc S n'est pas inversible donc $\det(S) = 0$.
   L'égalité (1) est vérifiée pour $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}) \setminus \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.
4. $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ avec $s_{i,i} = 1$.
   a) $\exp'' = \exp \geqslant 0$ donc exp est convexe sur $\mathbf{R}$. Donc (l'image de la moyenne est inférieure à la moyenne des images) : $\exp\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right) \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n \exp(x_i)$.
   En utilisant $x_i = \ln(\lambda_i)$, on obtient $\sqrt[n]{\lambda_1...\lambda_n} = \exp\left(\dfrac{1}{n}\ln(\lambda_1...\lambda_n)\right) \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i$
   b) On a $\det(S) = \lambda_1...\lambda_n$ et $\operatorname{tr}(S) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i$. Mais $\operatorname{tr}(S) = \displaystyle\sum_{i=1}^n s_{i,i} = n$ (ici $s_{i,i} = 1$).
   L'inégalité précédente donne $\det(S)^{1/n} \leqslant 1$.
   Finalement $\det(S) \leqslant 1 = \displaystyle\prod_{i=1}^n s_{i,i}$. Cette S vérifie (1).

5. $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

   a) ${}^{\mathrm{t}}XBX = {}^{\mathrm{t}}XTSTX = {}^{\mathrm{t}}(TX)S(TX)$ (car ${}^{\mathrm{t}}T = T$). La colonne TX n'est pas nulle (T inversible et $X \neq 0$) donc d'après 2°*b*) : ${}^{\mathrm{t}}XBX > 0$.

   b) B est symétrique (${}^{\mathrm{t}}B = {}^{\mathrm{t}}T\ {}^{\mathrm{t}}S\ {}^{\mathrm{t}}T = TST$) et si $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ il existe une X non nulle tel que $BX = \lambda X$.
   Alors $0 < {}^{\mathrm{t}}XBX = {}^{\mathrm{t}}X\lambda X = \lambda \parallel X \parallel^2$. Comme $\parallel X \parallel > 0$ on en déduit $\lambda > 0$. $\boxed{B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}).}$

   c) Les coefficients $b_{i,j}$ de B vérifie $b_{i,j} = \dfrac{1}{\sqrt{s_{i,i}}} s_{i,j} \dfrac{1}{\sqrt{s_{j,j}}}$. En particulier les $b_{i,i} = 1$.
   Donc (1) est vraie pour B donc $\det(T)\det(S)\det(T) \leqslant 1$ comme $\det(T)^2 = 1/\prod_{i=1}^n s_{i,i}$ on en déduit (1) pour la matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Partie B

1. La matrice $S = {}^{\mathrm{t}}AA$ est symétrique réelle et ses valeurs propres λ sont positives car en utilisant X non nulle telle que $SX = \lambda X$ on obtient ${}^{\mathrm{t}}XSX = \lambda\, {}^{\mathrm{t}}XX = \lambda \parallel X \parallel^2$ et d'autre part ${}^{\mathrm{t}}XSX = {}^{\mathrm{t}}(AX)AX = \parallel AX \parallel^2$ donc $\lambda = \dfrac{\parallel AX \parallel^2}{\parallel X \parallel^2} \geqslant 0$.
   On peut appliquer (1) à $S = {}^{\mathrm{t}}AA$.

2. On a donc $\det({}^{\mathrm{t}}AA) = \displaystyle\prod_{i=1}^n s_{i,i}$ où $s_{i,i} = \displaystyle\sum_{k=1}^n ({}^{\mathrm{t}}A)_{i,k} a_{k,i} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2$.

   Or $\det({}^{\mathrm{t}}AA) = \det({}^{\mathrm{t}}A)\det(A) = \det(A)^2$, on a donc $|\det(A)| \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^n \sqrt{\sum_{k=1}^n a_{k,i}^2}$ (inégalité d'Hadamard).

Partie C

1. D'après les conditions sur les suites a et b on obtient $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

   A est triangulaire avec sur la diagonale des nombres non nuls ($a_0 \neq 0$) donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$.
   On peut aussi dire $\det(A) = a_0^n \neq 0$.

2. D'après les formules de Cramer $b_n = \dfrac{\det(A')}{\det(A)}$ où A' est obtenue à partir de A en remplaçant la dernière colonne par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. En,particulier $|a_n|r^n \to 0$ donc partir d'un certain rang $|a_n|r^n \leqslant 1$ puis $0 \leqslant a_n^2 r^{2n} \leqslant |a_n|r^n$ par comparaison la série de terme général $a_n^2 r^{2n}$ converge.

   $C^2 = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|r^n\right)^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 r^{2n} + 2R$ où R est une somme (pour $n < m$) de termes du type $|a_n|r^n|a_m|r^m$ positifs d'où $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 r^{2n} \leqslant C^2}$.

Remarque : On peut détailler avec le produit de Cauchy :

$C^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k||a_{n-k} \geqslant 0$.

D'où $C^2 \geqslant 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n} r^{2n}$ et enfin $c_{2n} \geqslant 0 + |a_n a_{2n-n}| + 0 = a_n^2$...

4. On a vu $|b_n| = \dfrac{1}{|a_0|^{n+1}} |\det(A')|$.

   Avec les opérations $L_i \to r^{i-1} L_i$ on a $\det(A') = \dfrac{1}{r^0 \cdot r \cdots r^{n-1} \cdot r^n} \det(A'') = \dfrac{1}{r^{n(n+1)/2}} \det(A'')$.

   En nommant $C_1, ..., C_{n+1}$ les colonnes de A'', on a $|\det(A'')| \leqslant \prod_{k=1}^{n=1} \| C_k \|$.

   Or $C_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\| C_{n+1} \| = 1$.

   $C_1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 r \\ \vdots \\ a_n r^n \end{pmatrix}$ donc $\| C_1 \| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2 r^{2k}} \leqslant C$. De même pour $k = 1$ à n :

   $C_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 r^{k-1} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} r^n \end{pmatrix} = r^{k-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 \\ \vdots \\ a_{n-k+1} r^{n-k+1} \end{pmatrix}$ donc $\| C_k \| = r^{k-1} \sqrt{\sum_{i=0}^{n-k+1} a_i^2 r^{2i}} \leqslant r^{k-1} C$.

   $|\det(A'')| \leqslant r^0 \cdot r \cdots r^{n-1} \cdot C^n \cdot 1$.

   Finalement $\boxed{|b_n| \leqslant \dfrac{1}{|a_0|^{n+1}} \dfrac{1}{r^n} C^n = \dfrac{1}{|a_0|} \alpha^n \text{ avec } \alpha = \dfrac{C}{r}.}$

5. On écrit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 \neq 0$ et un rayon de convergence R_f non nul donc il existe un $r > 0$ (par exemple $r = R/2$) tel que la série $\sum |a_n| r^n$ converge.

   On choisit alors la suite $(b_n)_n$ comme précédemment et on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Le rayon de convergence R_g de g est non nul car au moins égal à $1/\alpha$ (cf. $|b_n| \leqslant \dfrac{1}{|a_0|} \alpha^n$).

   D'après le produit de Cauchy pour $|x| \leqslant \min(R_f, R_g)$, on aura

   $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec $c_0 = a_0 b_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1, c_n = 0$ donc $f(x)g(x) = 1$.

   Ainsi $\dfrac{1}{f(x)} = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec un rayon de convergence non nul

   donc $\boxed{\dfrac{1}{f} \text{ est développable en série entière au voisinage de 0.}}$

Exercice 3 (Intégrale à paramètre)

$f(x,t)=\mathrm{e}^{-x\,\mathrm{ch}(t)}$ et $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\,\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

1. On sait que $\mathrm{e}^{-x}=\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^p}\right)$ ($\lim_{x\to+\infty}x^p\,\mathrm{e}^{-x}=0$).

   Comme $\lim_{t\to+\infty}a(t)=+\infty$, on a (par substitution) $\mathrm{e}^{-a(t)}=\underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{a(t)^p}\right)$

2. Pour $x\in\mathbf{R}$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue positive sur $[0,+\infty[$.

   Pour $x\leqslant 0$, on a pour tout t : $1\leqslant f(x,t)$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x,t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

   Pour $x>0$, $x\,\mathrm{ch}(t)\to_{t\to+\infty}+\infty$ d'où $f(x,t)=\underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\right)$ (d'après 1°) avec $p=1$ et x est fixé). Avec $\mathrm{ch}(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t$ on a $f(x,t)=\underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(\mathrm{e}^{-t})$. Or $t\mapsto\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbf{R}^+$ donc $t\mapsto f(x,t)$ aussi.

   $\boxed{\text{Le domaine de définition de } F \text{ est }]0,+\infty[.}$

3. Pour $x>0$ et $t\in[0,+\infty[$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{e}^{-x\,\mathrm{ch}(t)}$.
   Pour t fixé, $x\mapsto-\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{e}^{-x\,\mathrm{ch}(t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   Pour t fixé, $t\mapsto-\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{e}^{-x\,\mathrm{ch}(t)}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et elle est intégrable d'après 1°) avec $p=2$: $\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{e}^{-x\,\mathrm{ch}(t)}=\underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\right)=\underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(\mathrm{e}^{-t})$.
   Domination sur un segment $[a,b]$ de $]0,+\infty[$:
   Pour $x\in[a,b]$, on a pour tout $t\in[0,+\infty[$: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{e}^{-x\,\mathrm{ch}(t)}\leqslant\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{ch}(t)}$.

   On a vu que $t\mapsto\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{ch}(t)}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (car $a>0$), f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

   Finalement, $\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$.

   De même : Pour $x>0$ et $t\in[0,+\infty[$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=\mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{e}^{-x\,\mathrm{ch}(t)}$. On procède de la même façon (avec le lemme pour $p=3$...) pour prouver que

   $\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[}$.

4. Pour $x>0$, $F''(x)-F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}(\mathrm{ch}^2(t)-1)\,\mathrm{e}^{-x\,\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$. On remarque que $\mathrm{ch}^2(t)-1=\mathrm{sh}^2(t)$ et on effectue une intégration par parties sur un segment $[0,b]$ en posant $u'(t)=\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{e}^{-x\,\mathrm{ch}(t)}, u(t)=-\dfrac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-x\,\mathrm{ch}(t)}$ et

   $v(t)=\mathrm{sh}(t), v'(t)=\mathrm{ch}(t)$: $u(t)v(t)=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-x\,\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{sh}(t)$ est nul en 0 et est de limite nulle quand $b\to+\infty$ (car négligeable devant $\dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)}$ par exemple).

   Après passage à la limite quand $b\to+\infty$, on obtient :
   $F''(x)-F(x)=0+\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{e}^{-x\,\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{x}F'(x)$.

   $\boxed{F \text{ est solution sur }]0,+\infty[\text{ de } y''+\tfrac{1}{x}y'-y=0 \quad (E).}$

5. *Etude en 0*

   a) Soit $0 < x < 1$. Pour $u > 1$, on pose $g(u) = \mathrm{e}^{-xu}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \dfrac{1}{u}\right)$. g est continue sur $]1, +\infty[$. Comme $x > 0$, on a :
   $|g(u)| \leqslant \left|\dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \dfrac{1}{u}\right| = \left|\dfrac{u-\sqrt{u^2-1}}{u\sqrt{u^2-1}}\right| = \dfrac{1}{(u+\sqrt{u^2-1})u\sqrt{u^2-1}} = \varphi(u)$.
   $\varphi(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^3}$ donc φ est intégrable sur $[2, +\infty[$ et $\varphi(u) \underset{u\to1^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{(u-1)^{1/2}}$ donc φ est intégrable sur $]1, 2]$.
   Donc g est intégrable sur $]1, +\infty[$ de plus $|H(x)| \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u$.
   $\boxed{H \text{ est définie et bornée sur }]0,1[.}$

   b) Pour $v \in [x, 1] \subset]0, 1]$, on a $\mathrm{e}^{-v} \leqslant 1$ et d'autre part $\mathrm{e}^{-v} \leqslant 1 - v$ (soit par étude de $v \mapsto \mathrm{e}^{-v} - 1 - v$ soit en citant $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ qui peut se montrer par convexité de exp...).
   $0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-v} \leqslant v$ donc $(v > 0)$ $0 \leqslant \dfrac{1}{v} - \dfrac{\mathrm{e}^{-v}}{v} \leqslant 1$ et en intégrant de x à 1 $(x < 1)$:
   $0 \leqslant -\ln(x) - K(x) \leqslant 1 - x \leqslant 1$.
   $-\ln(x) - K(x) = \mathcal{O}_{x\to0}(1) = \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(\ln(x))$ donc $\boxed{K(x) \underset{x\to0}{\sim} -\ln(x).}$
   On peut aussi écrire $(-\ln(x) > 0)$: $0 \leqslant 1 - \dfrac{K(x)}{-\ln(x)} \leqslant \dfrac{1}{-\ln(x)}$ et conclure par le théorème d'encadrement $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{K(x)}{-\ln(x)} = 1$.

   c) Changement de variable $u = \mathrm{ch}(t)$ pour $t \in [0, +\infty[$ ($\mathcal{C}^1$ difféomorphisme etc.), u varie de 1 à $+\infty$ et de $t = \mathrm{Arg\,ch}(u)$, $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}\mathrm{d}u$, donc $\boxed{F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-xu}\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u}$.

   d) $H(x) = F(x) - \displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-xu}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = F(x) - \int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-v}\frac{1}{v}\,\mathrm{d}v$ en posant $v = xu$.
   $F(x) = H(x) + K(x)$, or H est bornée et $K(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$ donc :
   $\boxed{F(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x).}$

6. Soit (x_n) une suite (de réels > 1) tendant vers $+\infty$.
   $x_nF(x_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x_n\,\mathrm{e}^{-x_n\,\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$.
   Pour t fixé, $\lim_n \varphi_n(t) = 0$ (croissances comparées). La suite de fonctions (φ_n) converge simplement sur $[1, +\infty[$ vers la fonction nulle.
   Domination : $\varphi_n(t) = x_n\,\mathrm{e}^{-x_n\,\mathrm{ch}(t)} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}x_n\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{e}^{-x_n\,\mathrm{ch}(t)}$.
   Or $u \mapsto u\,\mathrm{e}^{-u}$ est continue sur $[0, +\infty[$ de limite nulle en $+\infty$ donc bornée sur $[0, +\infty[$, en notant $M = \sup_{u\in[0,+\infty[} u\,\mathrm{e}^{-u}$ on obtient $0 \leqslant \varphi_n(t) \leqslant M\dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$.
   La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, le théorème de convergence dominée s'applique :

$\lim_n x_n F(x_n) = \int_0^{+\infty} \lim_n \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

Par caractérisation séquentielle de la limite : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0}$.

De même : $x_nF'(x_n) = \int_0^{+\infty} -x_n\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{e}^{-x_n\,\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \Psi_n(t)\,\mathrm{d}t.$

Pour t fixé, $\lim_n \Psi_n(t) = 0$ (croissances comparées). La suite de fonctions (Ψ_n) converge simplement sur $[1, +\infty[$ vers la fonction nulle.

Domination : $\Psi_n(t) = -\dfrac{1}{x_n\,\mathrm{ch}(t)} x_n^2\,\mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{e}^{-x_n\,\mathrm{ch}(t)}$.

Or $u \mapsto u^2\,\mathrm{e}^{-u}$ est continue sur $[0, +\infty[$ de limite nulle en $+\infty$ donc bornée sur $[0, +\infty[$, en notant $M_2 = \sup_{u\in[0,+\infty[} u\,\mathrm{e}^{-u}$ on obtient $0 \leqslant |\Psi_n(t)| \leqslant M_2 \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$.

D'où (convergence dominée puis caractérisation séquentielle de la limite) : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} xF'(x) = 0}$.

7. *Utilisation du Wronskien*

   a) $W'(x) = F(x)G''(x) + 0F'(x)G'(x) - F''(x)G(x)$

   $= F(x)(G(x) - \dfrac{1}{x}G'(x)) + (\dfrac{1}{x}F'(x) - F(x))G(x) = -\dfrac{1}{x}(F(x)G'(x) - F'(x)G(x))$

   $\boxed{\text{Pour } x > 0,\ W'(x) = -\dfrac{1}{x}W(x)}$.

   Donc il existe α tel que pour tout $x > 0$, $W(x) = \alpha\exp(-\ln(x)) = \alpha\dfrac{1}{x}$.

   Or $xW(x) = xF(x) \times G(x) - xF'(x) \times G(x) \to_{x\to+\infty} 0$ donc $\alpha = 0$ d'où

   $\boxed{\text{Pour } x > 0,\ W(x) = 0}$.

   b) F, G sont solutions sur $]0, +\infty[$ de (E), équation linéaire d'ordre 2, et leur wronskien est nul, elles sont donc colinéaires. Comme F n'est pas la fonction nulle, il existe λ telle que $G = \lambda F$ c'est-à-dire pour tout $x > 0$, $G(x) = \lambda F(x)$.