e3a – Concours ENSAM - ESTP - Archimède

Épreuve de Mathématiques A PSI
Durée 3h
Corrigé – par Michel Staïner – 22/05/2008

Questions de cours

Question 1.

1. (u_n) converge vers 0 $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge : FAUX, voir par exemple la série harmonique $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}$.
2. $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Rightarrow (u_n)$ converge vers 0 : VRAI, car si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et si S_n désigne la somme partielle de rang n, alors pour tout $n \geq 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. D'où le résultat, puisque (S_n) et (S_{n-1}) convergent vers la même limite, à savoir la somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.
3. $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature : FAUX, voir par exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n+1}$. J'ai $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, en tant que série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît vers 0, tandis que $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge, en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente.
4. $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge : FAUX, voir par exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge (ci-dessus), tandis que $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ diverge (série de Riemann).

Question 2.

Posons pour tout $n \geq 2$, $u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ et $\psi : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$. ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Donc la fonction ψ est décroissante sur $[e, +\infty[$; en particulier la suite $(|u_n|)_{n\geq 3}$ est décroissante, or elle converge vers 0 (car $\ln x \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$). Il en résulte que la série alternée $\sum_{n\geq 3} u_n$ converge. D'où, puisque les sommes partielles sont les mêmes, à une constante additive près :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \text{ converge.}}$$

Préliminaires :

1. **1.1.** Pour $n > N$ fixé, d'après l'inégalité triangulaire et par définition de N,

$$\left| \sum_{k=N+1}^{n} t_k \right| \leq \sum_{k=N+1}^{n} |t_k| \leq (n-N)\,\varepsilon \leq n\varepsilon.$$

   1.2. Soit $\delta > 0$ et $\varepsilon = \delta/2$; je fixe N comme ci-dessus et j'écris grâce au résultat précédent

$$|T_n| \leq \frac{A}{n+1} + \frac{1}{n+1} n\varepsilon \quad \text{où} \quad A = \left| \sum_{k=0}^{N} t_k \right|$$

   A étant une constante, la suite $\left(\frac{A}{n+1}\right)$ converge vers 0, je dispose donc de N' tel que $\frac{A}{n+1} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N'$. Alors, pour $n \geq N_0 = \max(N, N')$, j'ai

$$|T_n| \leq 2\varepsilon = \delta.$$

En résumé,

$$\forall \delta > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_0,\ |T_n| \leq \delta$$

et je reconnais la définition de la limite :

$$\boxed{\text{La suite } (T_n) \text{ converge vers } 0.}$$

2. Supposons ici que (t_n) converge vers T et posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = t_n - T$. Ainsi (v_n) converge vers 0 ; nous venons donc de voir que la suite (V_n) converge également vers 0, avec (V_n) définie par

$$n \in \mathbb{N},\ V_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} v_k = T_n - T.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\text{Si } (t_n) \text{ converge vers } T, \text{ alors } (T_n) \text{ converge aussi vers } T.}$$

3. **3.1.** Ici, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant que $e^{i\theta} \neq 1$ puisque $\theta \in]0, 2\pi[$,

$$\sum_{k=0}^{n} t_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{in\theta}\right) = \mathrm{Re}\, \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \cdot \frac{-2i \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{-2i \sin \frac{\theta}{2}}\right),$$

d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \frac{1}{n+1} \cos\left(n \frac{\theta}{2}\right) \frac{\sin\left((n+1)\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}.}$$

3.2. D'après le résultat précédent, les fonctions cos et sin étant bornées et $\sin(\theta/2)$ étant une constante,

$$\boxed{\text{La suite } (T_n) \text{ converge vers } 0.}$$

3.3. Nous avons ici $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{3n} = \cos n\pi = (-1)^n$. Si (t_n) convergeait, la sous-suite (t_{3n}) convergerait vers la même limite, or elle diverge.

$$\boxed{\text{La suite } (t_n) \text{ diverge.}}$$

3.4. Nous venons de prouver par un contre-exemple que la réciproque du résultat établi au **2** est fausse.

Partie 1

1. Par hypothèse, la suite (na_n) converge, elle est donc bornée, d'où l'existence de K.

2. En particulier, la suite $(|a_n|)$ est majorée par K, d'où, pour x fixé dans $[0, 1[$, $|a_n x^n| \leq K x^n$ pour tout n. Or la série géométrique $\sum x^n$ converge, puisque $|x| < 1$. Finalement,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geq 0} a_n x^n \text{ converge absolument pour tout } x \in [0, 1[.}$$

3. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1[$, j'ai

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x^k - 1\right) + \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = L - u_n + \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x^k - 1\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

d'où le résultat.

4. **4.1.** Par définition de K, pour tout n, l'ensemble $\mathcal{E}_n = \{|ka_k|,\ k \geq n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par K. Elle admet donc une borne supérieure.

4.2. Par hypothèse, (ka_k) converge vers 0 ; pour $\varepsilon > 0$ fixé je dispose donc de N tel que : $\forall k \geq N,\ |ka_k| \leq \varepsilon$, d'où par définition de la borne supérieure, $\forall n \geq N,\ 0 \leq M_n \leq \varepsilon$. Je viens de vérifier la définition de la limite

$$\boxed{\text{La suite } (M_n) \text{ converge vers } 0.}$$

5. Par définition de M_n, j'ai : $\forall k \geq n,\ |a_k| \leq \dfrac{M_n}{k} \leq \dfrac{M_n}{n}$, d'où, connaissant la somme d'une série géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leq \frac{M_n}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \leq \frac{M_n}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{M_n}{n} \cdot \frac{1}{1-x}$$

d'où la première majoration, grâce à la relation du **3** et à l'inégalité triangulaire.
Ensuite, j'utilise l'identité

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ 1 - x^k = (1-x) \sum_{j=0}^{k-1} x^j \leq (1-x) \cdot k$$

d'où la seconde majoration.

6. D'après les résultats précédents, avec $x = 1 - \dfrac{1}{n}$, j'obtiens,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| \leq \left|L - f\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |ka_k| + M_n$$

Lorsque n tend vers l'infini, le premier terme du majorant ci-dessus tend vers 0 d'après (ii), le second également d'après (i) et les préliminaires et le troisième aussi d'après la question précédente. En conclusion

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

7. Par définition de (u_n), nous venons de montrer que la série $\sum a_n$ converge et a pour somme L, autrement dit que f peut se prolonger au segment $[0,1]$ avec $f(1) = L$, ce qui fait d'après (ii) que f est alors continue à gauche en 1. Ainsi

$$\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en 1 en posant } f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = L.}$$

Partie 2

1. On peut (chercher à !) résoudre (E) sur tout intervalle où ses coefficients sont définis, soit sur tout intervalle ne contenant pas 1.

2. Sur $I =]0,1[$, le coefficient de y'' ne s'annule pas et tous les coefficients de (E) sont des fonctions continues, donc en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz,

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E) \text{ sur } I \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace affine de dimension 2.}}$$

3. Il s'agit de séries géométriques :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

En outre si $x \notin]-1,1[$ ces deux séries divergent grossièrement, le "domaine" de convergence est donc $]-1,1[$.

4. Soit $y : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la fonction somme d'une série entière, de rayon de convergence $R > 0$. Soit $r = \min(1, R)$. J'ai pour tout x de $]-r,r[$

$$xy'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n\ ,\ x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n \quad \text{et} \quad \frac{x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

d'où, par unicité du développement en série entière, y est solution de (E) sur $]-r,r[$ si et seulement si

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 4n(n-1) a_n + 4na_n - a_n = 1$$

soit si et seulement si

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Ainsi $\varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}$ est la seule solution développable en série entière possible de (E). Or cette série entière a un rayon de convergence égal à 1 (pour x non nul fixé, la règle de d'Alembert montre que $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{4n^2-1}$ converge absolument pour $|x|<1$ et diverge grossièrement pour $|x|>1$). J'ai donc démontré un peu plus que demandé :

$$\boxed{\varphi \text{ est l'unique solution développable en série entière de } (E)\text{, son rayon de convergence vaut 1.}}$$

5. 5.1. Il vient

$$\forall n \geq 1,\ \frac{\alpha}{2n-1} + \frac{\beta}{2n+1} = \frac{2n(\alpha+\beta)+\alpha-\beta}{4n^2-1},$$

donc

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2} \text{ et } \beta = -\frac{1}{2} \text{ conviennent.}}$$

5.2. Il est immédiat que le rayon de convergence de la série entière définissant h vaut 1. Donc h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et il vient

$$\forall u \in \left]-1,1\right[,\ h'(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u^{2n} = \frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right),$$

d'où, en intégrant, vu que $h(0)=0$,

$$\boxed{\forall u \in \left]-1,1\right[,\ h(u) = \ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}.}$$

5.3. Soit $x \in I$ et $u = \sqrt{x}$. Je peux écrire

$$H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{u}h(u)$$

d'où

$$\boxed{\forall x \in I,\ H(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.}$$

5.4. D'après **5.1.**, toutes les séries entières utilisées ayant un rayon de convergence égal à 1, j'ai grâce à une réindexation

$$\forall x \in I,\ \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}\right)$$

soit

$$\forall x \in I,\ \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(1 + (x-1)H(x)\right)$$

d'où grâce au résultat précédent

$$\boxed{\forall x \in I,\ \varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{x-1}{4\sqrt{x}} \ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.}$$

5.5. Pour l'étude au voisinage de 1, je réécris

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{x-1}{4\sqrt{x}} \ln\left(1+\sqrt{x}\right) + \frac{1+\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)\ln\left(1-\sqrt{x}\right)$$

où la seule forme indéterminée (lorsque x tend vers 1) est du type $t\ln t$, qui tend vers 0 lorsque $t = 1-\sqrt{x}$ tend vers 0. D'où

$$\boxed{L = \frac{1}{2}.}$$

6. 6.1. J'ai $na_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (a_n) vérifie (i). De plus, d'après la question précédente, (a_n) vérifie également (ii).

6.2. Je peux donc appliquer le résultat de la partie 1 à la fonction $f : x \mapsto -1 + \varphi(x)$ (ne pas oublier a_0 !). Nous avons vu alors que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et a pour somme $-1 + L$. Ainsi

$$\boxed{S = -\frac{1}{2}.}$$

7. D'après **5.1.** et par réindexation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right),$$

d'où après simplifications

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).}$$

Par conséquent $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, et je retrouve (en ajoutant le terme $a_0 = -1$!) $S = -\frac{1}{2}$.

Partie 3

1. Nous avons vu que la suite définie par $c_n = (-1)^n$ vérifie les hypothèses de l'énoncé, avec $h(x) = \frac{1}{1+x}$ et $H = \frac{1}{2}$. Or la série $\sum c_n$ diverge grossièrement !

2. Comme ici les c_n sont positifs, j'ai, pour p fixé dans $\mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0,1[\,,\ \sum_{n=0}^{p} c_n x^n \leq h(x)$$

d'où, par passage à la limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $\sum_{n=0}^{p} c_n \leq H$. Or cela est vrai pour tout p, donc les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum c_n$ sont majorées. Il en résulte que cette série converge. Or, en notant $u_n : x \mapsto c_n x^n$, je constate que $c_n = \sup_{[0,1]} |u_n|$. Nous venons donc de montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[0,1]$. Comme les u_n sont continues, j'en déduis que la fonction somme (qui prolonge h à $[0,1]$ et que je note encore h) est continue sur $[0,1]$. En particulier, $h(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} h(1)$ et, par unicité de la limite $H = h(1)$. Autrement dit,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 0} c_n \text{ converge et l'on a : } \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.}$$

3. D'après la partie 1, il suffit de supposer en outre que la suite (nc_n) converge vers 0 (hypothèse (i)) pour pouvoir conclure que $\sum c_n$ converge.