e3a PSIA 2007
un corrigé

1 Quelques calculs préliminaires.

1. *Remarque : au vu des questions 2 et 3, on sait que les valeurs propres vont être -1 et 2. C'est en le sachant que l'on agit comme suit. On aurait aussi pu calculer le polynôme caractéristique et faire des résolutions de systèmes.*
On remarque que

$$A+I_3=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3\\ -3 & 4 & -4\\ -3 & 4 & 4\end{pmatrix} \text{ et } A-2I_3=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3\\ -3 & 1 & -4\\ -3 & 4 & -7\end{pmatrix}$$

Il est alors visible que $(0,1,1)\in\ker(A+I_3)$ et $(-1,1,1)\in\ker(A-2I_3)$. -1 et 2 sont valeurs propres et comme la trace de A est nulle, la "troisième" valeur propre de A vaut -1. 2 est valeur propre simple et donc

$$\ker(A-2I_3)=Vect((-1,1,1))$$

$A+I_3$ est de rang au moins 2 (colonnes 1 et 2 indépendantes). Le noyau étant de dimsnion au moins 1, ce rang vaut 2 et

$$\ker(A+I_3)=Vect((0,1,1))$$

2. Le calcul donne

$$(A+I_3)^2=9\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

C'est une matrice de rang 1 (colonnes toutes proportionnelles à la première) et $(1,1,0),(0,1,1)$ sont des éléments indépendants du noyau. Par théorème du rang, ce noyau est de dimension 2 et donc

$$\ker((A+I_3)^2)=Vect((1,1,0),(0,1,1))$$

Pour montrer que $\ker((A+I_3)^2)$ et $\ker(A-2I_3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^3$, il suffit de montrer que la concaténées de bases de ces sous-espace donne une base de $\mathbb{C}^3$. On forme donc

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Comme $\det(P)=1$, P est inversible et on a bien

$$\ker((A+I_3)^2)\oplus\ker(A-2I_3)=\mathbb{C}^3$$

3. $\ker((A+I_3)^2)$ étant de dimension 2, il possède un élément e_2 qui n'est pas dans le noyau de $A+I_3$. Si on pose $e_1=(A+I_3)e_2$ on obtient un élement non nul du noyau de $A+I_3$. Cet élément n'est pas colinéaire à e_2 (qui n'est pas dans ce noyau) et (e_1,e_2) est libre dans $\ker((A+I_3)^3)$ (e_1 est aussi dans cet ensemble puisqu'il est dans $\ker(A+I_3)$). On note enfin e_3 un élément non nul de $\ker(A-2I_3)$. Avec la question précédente, (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{C}^3$ et, par construction

$$Ae_1=-e_1,\ Ae_2=e_1-e_2,\ Ae_3=2e_3$$

L'endomorphisme canoniquement associé à A est, dans cette base représenté par $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.
A est donc semblable à cette matrice.
Remarque : avec la matrice P de la question précédente, on a aussi $P^{-1}AP$ qui a la forme voulue.

2 Quelques propriétés de la matrice $J(0)$.

1. Les $n-1$ premières colonnes de $J(0)$ sont clairement indépendantes. La dernière est nulle et donc combinaison des $n-1$ premières. Le rang de $J(0)$ vaut donc $n-1$.

2.1. Soit j l'endomorphisme canoniquement associé à J et $(u_1,\dots,u_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On a alors

$$\forall l\in[1..n-1],\ j(e_l)=e_{l+1}\ \text{ et }\ j(e_n)=0$$

On en déduit alors, en itérant, que pour $k\in[1..n-1]$,

$$\forall l\in[1,n-k],\ j^k(e_l)=e_{l+k}\ \text{ et }\ \forall l\in[n-k+1,n],\ j^k(e_l)=0$$

On en déduit que $J(0)^k=\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\ \vdots & & & & & & \vdots\\ 0 & & & & & & \vdots\\ 1 & \ddots & & & & & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$ où la diagonale de 1 commence sur la ligne $k+1$. On peut aussi écrire que

$$\forall i,j\in[1..n],\ (J(0)^k)_{i,j}=\delta_{j+k,j}$$

On remarque que cei est encore valable si $k=0$ (on obtient alors la matrice I_n).
On en déduit aussi que $j^n(e_l)=0$ pour tout l et que donc $J(0)^n=O_n$ et donc (on continue à multiplier par $J(0)$ et on obtient toujours la matrice nulle) :

$$\forall k\geq n,\ J(0)^k=O_n$$

2.2. Soit $k\geq 1$ (l'énoncé oublie de préciser que l'exposant n'est pas nul). $(J(0)^k)^n=J(0)^{nk}=O_n$ car $nk\geq n$. $J(0)^k$ est donc nilpotente.

3. Dans la somme définissant $\alpha(J(0))$, il n'y a qu'un nombre fini de matrices non nulles et on vient de les calculer :

$$\alpha(J(0))=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ \frac{1}{1!} & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \frac{1}{1!} & 1\end{pmatrix}=(v_{i,j})\ \text{ avec }\ v_{i,j}=\begin{cases} 0 \text{ si } i\leq j-1\\ \frac{1}{(i-j)!} \text{ si } i\geq j\end{cases}$$

$U=\alpha(J(0))-I_n$ est la même matrice où l'on a remplacé les 1 diagonaux par des zéros.

4. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. On peut trouver des entiers p et q tels que $A^p=B^q=O_n$. Soient α,β deux scalaires. Comme A et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme pour obtenir

$$(\alpha A+\beta B)^{p+q}=\sum_{k=0}^{p+q}\binom{p+q}{k}\alpha^k\beta^{p+q-k}A^kB^{p+q-k}$$

Si $k\geq p$, $A^k=A^pA^{k-p}$ est nulle et si $k\leq p$ alors $p+q-k\geq q$ et c'est alors B^{p+q-k} qui est nulle. Ainsi, tous les termes de la somme sont nuls et $(A+B)^{p+q}=O_n$. $\alpha A+\beta B$ est nilpotente.
On en déduit par récurrence que pour tout p, une combinaison linéaire de p matrices nilpotentes qui commutent deux à deux est encore une matrice nilpotente.

5. On a
$$U = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} J^k$$
qui est une combinaison linéaire de matrices nilpotentes qui commutent deux à deux. Avec la question précédente, U est nilpotente.
Les $n-1$ premières colonnes de U sont indépendantes (famille "échelonnée" dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$) et la dernière est nulle (et donc combinaison des précédentes). U est donc de rang $n-1$.

3 Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

1. Soient $i, j \in \mathbb{N}$, on a
$$\forall x \in E,\ u^{i+j}(x) = u^j(u^i(x))$$
Si $u^i(x) = 0$ alors $u^{i+j}(x) = u^j(0) = 0$ et on a donc l'inclusion
$$\ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j})$$

2. En particulier, la suite $(\ker(u^m))_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion et, en passant aux dimension, la suite $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée par la dimension de E, elle converge. Et comme elle est constituée d'entiers, elle est stationnaire à partir d'un certaine rang. Il existe donc un entier m_0 tel que $t_{m_0} = t_{m_0+1}$ et l'ensemble $\{m \in \mathbb{N}/\ t_m = t_{m+1}\}$ est donc non vide. Comme il est inclus dans $\mathbb{N}$, il possède un minimum (ce qui est mieux qu'une borne inférieure). On peut poser
$$r = \min\{m \in \mathbb{N}/\ t_m = t_{m+1}\}$$

3. Par définition de r, si $m < r$ alors $t_m \neq t_{m+1}$. On a donc $\ker(u^m) \subset \ker(u_{m+1})$ et les sous-espaces n'ayant pas même dimension, l'inclusion est stricte.
r étant un minimum, on a $t_r = t_{r+1}$. Comme $\ker(u^r) \subset \ker(u_{r+1})$ et comme on a égalité des dimensions, on a donc $\ker(u^r) = \ker(u_{r+1})$.
Enfin, on montre par récurrence sur l'entier m que l'affirmation
$$\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$$
est vraie pour tout $m \geq r$.
- Initialisation : on a vu que le résultat était vrai pour $m = r$.
- Etape de récurrence : soit $m \geq r$ tel que le résultat est vrai jusqu'au rang m. Soit $x \in \ker(u^{m+2})$; on a $u^{m+1}(u(x)) = 0$ et donc $u(x) \in \ker(u^{m+1})$. Par hypothèse de récurrence, $\ker(u^m) = \ker(u_{m+1})$ et donc $u^m(u(x)) = 0$ c'est à dire $x \in \ker(u^{m+1})$. On a prouvé que $\ker(u^{m+2}) \subset \ker(u_{m+1})$ et comme l'inclusion réciproque a déjà été prouvée, on a l'égalité et le résultat au rang $m+1$.

4 Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$.

1.1. On a
$$\mathrm{Im}(w) = v^q(\mathrm{Im}(v^p)) = \mathrm{Im}(v^{p+q})$$

1.2. $w(x) = 0$ équivaut $x \in \mathrm{Im}(v^p)$ et $w(x) = 0$ c'est à dire à $x \in \mathrm{Im}(v^p)$ et $v^q(x) = 0$. On a donc
$$\ker(w) = \mathrm{Im}(v^p) \cap \ker(v^q) \subset \ker(v^q)$$

1.3. D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Im}(w)) + \dim(\ker(w)) = \dim(\mathrm{Im}(v^p))$$

En utilisant les deux questions précédentes, on a donc

$$\dim(\mathrm{Im}(v^p)) \leq \dim(\ker(v^q)) + \dim(\mathrm{Im}(v^{p+q}))$$

Le théorème du rang donne aussi

$$\dim(\mathrm{Im}(v^p)) = \dim(E) - \dim(\ker(v^p))$$

$$\dim(\mathrm{Im}(v^{p+q})) = \dim(E) - \dim(\ker(v^{p+q}))$$

En injectant ces relations dans l'inégalité, on obtient

$$\dim(\ker(v^{p+q})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))$$

1.4. On prouve le résultat demandé par récurrence sur i.
- Initialisation : le résultat est vrai pour $i = 1$ car v est de rang $n-1$ et donc $\dim(\ker(v)) = 1$ (l'inégalité est une égalité).
- Etape de récurrence : soit $i \in [1..n-1]$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang i. La question précédente indique que

$$\dim(\ker(v^{i+1})) \leq \dim(\ker(v^i)) + \dim(\ker(v))$$

Comme $\ker(v)$ est de dimension 1 et comme le résultat est vrai au rang i, on a donc

$$\dim(\ker(v^{i+1})) \leq i + 1$$

ce qui prouve le résultat au rang $i+1$.

1.5. v étant nilpotente, on a $v^n = 0$ et $\dim(\ker(v^n)) = n$. D'après la partie 3 la suite $(\dim(\ker(v^i)))_{i\in\mathbb{N}}$ commence par croître strictement puis stationne à la valeur n. D'après la question précédente, elle ne peut donc pas stationner avant le rang n et on a

$$1 = \dim(\ker(v)) < \dim(\ker(v^2)) < \cdots < \dim(\ker(v^n)) \leq n$$

Pour que ces inégalité puissent avoir lieu, on doit nécessairement avoir

$$\forall i \in [1..n],\ \dim(\ker(v^i)) = i$$

2. Comme $\ker(v^{n-1})$ est de dimension $n-1$, il n'est pas égal à E et $v \neq \theta$.

3. Il existe donc $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$. Montrons que $(e, v(e), \ldots, v^{n-1}(e))$ est libre. Pour cela, on suppose que

$$\alpha_0 e + \alpha_1 v(e) + \cdots + \alpha_{n-1} v^{n-1}(e) = 0$$

On a bien sur $v^k = \theta$ pour tout $k \geq N$.
En composant par v^{n-1}, on a alors $\alpha_0 v^{n-1}(e) = 0$ et donc $\alpha_0 = 0$.
Si on compose par v^{n-2}, on obtient de même $\alpha_1 = 0$. C'est donc un processus récurrent qui nous permet de montrer la nullité de tous les α_i.
La famille est libre et possède $n = \dim(E)$ éléments : c'est une base de E.

4. La matrice de v dans cette base est tout simplement $J(0)$.

5. Si v et w sont deux endomorphismes nilpotents de rang $n-1$ alors il existe des bases dans lesquelles ces deux endomorphismes sont représentés par $J(0)$. Les matrices de ces endomorphismes sont donc semblables (transitivité de la relation de similitude).
Il est difficile de savoir ce qu'attend l'énoncé à la question "déterminer tous les endomorphismes nilpotents d'ordre $n-1$". On peut, per exemple, dire que ce sont ceux dont la matrice dans la base canonique est semblable à $J(0)$.

5 Résolution de l'équation $J(\mu) = \alpha(X)$.

1. L'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est continue (par exemple, elle est linéaire et on est en dimension finie. On en déduit que

$$P^{-1}\alpha(M)P = P^{-1}\left(\lim_{k\to+\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{M^m}{m!}\right)P = \lim_{k\to+\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{P^{-1}M^mP}{m!}$$

Or, $P^{-1}M^mP = (P^{-1}MP)^m$ (résultat connu que l'on retrouve sans peine par récurrence sur m) et donc

$$P^{-1}\alpha(M)P = \alpha\left(P^{-1}MP\right)$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z = x + iy$ son écriture algébrique. $e^z = z^x e^{iy}$ admet e^x comme module et y est un de ses arguments.
- On a $e^z = i = e^{i\pi/2}$ si et seulement si $e^x = 1$ et $y = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. La première équation admet $\left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i/\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ comme ensemble de solutions.
- On a $e^z = -1 = e^{i\pi}$ si et seulement si $e^x = 1$ et $y = \pi[2\pi]$. La première équation admet $\{(\pi + 2k\pi)\, i/\ k \in \mathbb{Z}\}$ comme ensemble de solutions.
- On a $-3-4i = 5\left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)$. Soit $\theta_0 = \arccos(3/5)$; $\theta_0 \in [0,\pi]$ et $\cos(\theta_0) = 3/5, \sin(\theta_0) = 5/5)$. On a ainsi $e^z = -3 - 4i = 5e^{i(\theta_0+\pi)}$ si et seulement si $e^x = 5$ et $y = \theta_0 + \pi[2\pi]$. La première équation admet $\{\ln(5) + (\theta_0 + \pi + 2k\pi)\, i/\ k \in \mathbb{Z}\}$ comme ensemble de solutions.

3. De manière plus générale, e^z est non nul (module e^x non nul).
- $e^z = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{C}$.
- $e^z = \mu = |\mu| e^{i\arg(u)}$ a lieu si et seulement si $e^x = |\mu|$ et $y = \arg(u)[2\pi]$. Les solutions sont donc les $z = \ln(|\mu|) + i(\arg(u) + 2k\pi)$ où k varie dans $\mathbb{Z}$.

4.1. On a

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(sI_n)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{m}\frac{s^k}{k!}\right) I_n$$

En passant à la limite, on en déduit que

$$\alpha(sI_n) = e^s I_n = \mu I_n$$

4.2. sI_n et $J(0)$ commutent et donc

$$\alpha(J(s)) = \alpha(sI_n)\alpha(J(0)) = \mu\alpha(J(0))$$

4.3. Avec les notations de la partie 2, $\mu(\alpha(J(0)) - I_n) = \mu U$ et on a vu que cette matrice est nilpotente. Elle est aussi de rang $n-1$ car U l'est et $\mu \neq 0$.

4.4. $\mu(\alpha(J(0)) - I_n) = \alpha(J(s)) - \mu I_n$ est nilpotente de rang $n-1$ et donc semblable à $J(0)$. Il existe donc une matrice inversible Q telle que

$$Q^{-1}\left(\alpha(J(s)) - \mu I_n\right) Q = J(0)$$

On en déduit alors que

$$Q^{-1}\alpha(J(s))Q = J(0) + \mu I_n = J(\mu)$$

5. Avec la question 1, on a donc

$$\alpha\left(Q^{-1}J(s)Q\right) = J(\mu)$$

et donc $X = Q^{-1}J(s)Q$ est une solution de l'équation $\alpha(X) = J(\mu)$.

6. Comme la transposition est continue, $\alpha({}^tM) = {}^t\alpha(M)$ et donc $X = {}^t\left(Q^{-1}J(s)Q\right)$ est une solution de l'équation $\alpha(X) = {}^tJ(\mu)$.

7.1. On est dans le cas $n = 2$. Dans ce cas, $\mu U = \mu J(0)$ et $Q = diag(1, \mu)$ convient. On a aussi $T_1 = {}^tJ(i)$ et on est dans le cas $\mu = i$ et on peut prendre $s = i\pi/2$. D'après la question 6, la matrice

$$X_1 = {}^t(diag(1, \mu)\alpha(J(i\pi/2))diag(1, 1/\mu))$$

est solution de $\alpha(X) = T_1$. Le calcul donne

$$X_1 = \begin{pmatrix} i\pi/2 & -1 \\ 0 & i\pi/2 \end{pmatrix}$$

7.2.1 On est dans le cas $n = 2$ et $\mu = -1$. $Q = diag(1, -1)$ convient et le même calcul qu'à la question précédente donne

$$\alpha(B_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad B_1 = \begin{pmatrix} i\pi & -1 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix}$$

7.2.2 Un calcul par bloc permet de montrer (par récurrence que)

$$\forall k \in \mathbb{N},\ H^k = \begin{pmatrix} B_1^k & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & (\ln(2))^k \end{pmatrix}$$

En divisant par $k!$, en sommant et en passant à la limite, on a donc

$$\alpha(H) = \begin{pmatrix} \alpha(B_1) & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7.2.3 On a trouvé en question $I.3$ une matrice P telle que $P^{-1}AP = \alpha(H)$. On a donc $A = P\alpha(H)P^{-1} = \alpha(PHP^{-1})$. On peut donc choisir

$$X_2 = PHP^{-1} = \begin{pmatrix} \ln(2) & i\pi - \ln(2) & -i\pi + \ln(2) \\ i\pi - \ln(2) & -1 - \ln(2) & i\pi + 1 - \ln(2) \\ i\pi - \ln(2) & -i\pi - 1 + \ln(2) & 2i\pi + 1 - \ln(2) \end{pmatrix}$$