

e3a PSI 2006
épreuve B : corrigé

Exercice 1.

1. Par un développement par rapport à la dernière colonne, on voit que la fonction $f : x \mapsto V(a_1, \dots, a_{n-1}, x)$ est polynomiale de degré $\leq n$, le coefficient de x^n étant $V(a_1, \dots, a_{n-1})$. Par ailleurs, $\forall i \in [1..n-1]$, $f(a_i) = 0$ (deux colonnes égales). Distinguons deux cas.

- Si a_1, \dots, a_{n-1} sont deux à deux distincts alors on peut factoriser $f(x)$ par chaque $x - a_i$ et, connaissant degré et coefficient de x^n , on a donc

$$f(x) = V(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i)$$

- Sinon, l'identité reste vraie ($0 = 0$).

Dans tous les cas, on a bien

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \prod_{1 \leq i \leq n-1} (a_n - a_i)$$

On prouve alors par récurrence sur n que

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

- $V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$ et le résultat est vrai au rang 2.
- Soit $n \geq 3$ tel que le résultat est vrai au rang $n-1$. On l'obtient au rang n avec la première partie de la question.

2. La famille proposée est de cardinal $n+1$ et E est de dimension $n+1$. Il suffit donc, pour conclure, de montrer que la famille proposée est libre. Pour cela, on montre que le déterminant des $n+1$ polynômes $P_i = (X - \lambda_i)^n$ est nul. Quand on l'exprime dans la base $(X^n, \dots, X, 1)$ de \mathbb{C}^n , ce déterminant a pour coefficient générique (intersection des ligne i et colonne j)

$$\binom{n}{i-1} \lambda_{j-1}^{i-1}$$

On factorise la ligne i par $\binom{n}{i-1}$ et le déterminant vaut donc

$$V(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \prod_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1}$$

Les λ_k étant deux à deux distincts, ce déterminant est non nul et on peut conclure.

- 3.a. Pour α assez petit, les n réels αx_i sont dans $] -\pi, \pi[$ (il suffit de choisir $\alpha = \frac{\pi}{2} \min\{1/|x_i| \mid i \in [1..n]\}$). Comme $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est injective sur $] -\pi, \pi[$, on a alors $e^{i\alpha x_1}, \dots, e^{i\alpha x_n}$ deux à deux distincts.

- 3.b. Il suffit de choisir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{i\alpha x_1} & e^{i\alpha x_2} & \dots & e^{i\alpha x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{i\alpha(n-1)x_1} & e^{i\alpha(n-1)x_2} & \dots & e^{i\alpha(n-1)x_n} \end{pmatrix}$$

c'est à dire la matrice dont le terme à l'intersection des ligne k et colonne j vaut $e^{i\alpha(k-1)x_j}$. On a

$$\det(A) = V(e^{i\alpha x_1}, e^{i\alpha x_2}, \dots, e^{i\alpha x_n})$$

qui est non nul (les $e^{i\alpha x_k}$ étant deux à deux distincts) et $A(t)$ est donc inversible.

3.c. Chaque coordonnée de $Y(t)$ tend vers L quand $t \rightarrow +\infty$. Or $X(t) = A^{-1}Y(t)$ et donc chaque coordonnée de $X(t)$ admet aussi une limite quand $t \rightarrow +\infty$ (la i -ème admet pour limite L fois la somme des coefficients de la ligne i de A^{-1}). $X(t)$ a donc une limite quand $t \rightarrow +\infty$.

Soit $h_k : t \mapsto e^{ix_k t}$. On a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, h_k \left(\frac{2p\pi}{x_k} \right) = 1, h_k \left(\frac{2p\pi + \pi/2}{x_k} \right) = i$$

Si $c_k \neq 0$, $c_k h_k$ n'admet donc pas de limite en $+\infty$ (on a deux suites qui tendent vers $+\infty$ et dont les images par h_k tendent vers des limites différentes).

Comme ici $\forall k$, $c_k h_k$ a une limite en l'infini, c'est que tous les c_k sont nuls.

Exercice 2.

1. On a

$$E_{a,b}E_{i,j} = \delta_{b,i}E_{a,j}$$

où $\delta_{u,v}$ vaut 0 si $u \neq v$ et 1 si $u = v$. On en déduit que

$$CE_{i,j} = \sum_{k=1}^n c_{k,i}E_{k,j} \quad \text{et} \quad E_{i,j}C = \sum_{k=1}^n c_{j,k}E_{i,k}$$

Autrement dit, les colonnes de $CE_{i,j}$ sont toutes nulles sauf la j -ème où l'on trouve la i -ème de C . et les lignes de $E_{i,j}C$ sont toutes nulles sauf la i -ème où l'on trouve la j -ème de C .

Si $\forall M, CM = MC$ alors $\forall i, j, CE_{i,j} = E_{i,j}C$. Le calcul précédent indique alors que

$$\forall i, j, \sum_{k=1}^n c_{k,i}E_{k,j} = \sum_{k=1}^n c_{j,k}E_{i,k}$$

Les $E_{u,v}$ formant une famille libre, on a donc $c_{i,i} = c_{j,j}$ et $\forall k \neq i, c_{k,i} = 0$. C est donc une matrice diagonale avec des coefficients diagonaux égaux. Elle est du type aI_n .

2. On a

$$\text{tr}({}^tMN) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j}n_{i,j}$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ correspond donc au produit scalaire canonique quand on identifie E et $\mathbb{R}^{(n^2)}$.

3. Pour tous M et N de E , on a (en utilisant $\text{tr}(UV) = \text{tr}(VU)$)

$$\langle f(M) | N \rangle = \text{tr}({}^tB^tM^tAN) = \text{tr}({}^tM^tAN^tB) = \langle M | {}^tAN^tB \rangle$$

Par définition de l'adjoint, on a donc

$$f^*(N) = {}^tAN^tB$$

4.a. On suppose f orthogonal et on a donc $f^* \circ = Id$. Ainsi

$$\forall M \in E, {}^tAAMB^tB = M$$

En prenant $M = I_n$, on obtient que ${}^t A A B^t B = I_n$ c'est à dire que ${}^t A A$ et $B^t B$ sont inversibles et que l'une est l'inverse de l'autre.

On a donc

$$\forall M \in E, {}^t A A M = M (B^t B)^{-1} = M {}^t A A$$

et la question 2 indique l'existence de $a \in \mathbb{R}$ tel que ${}^t A A = a I_n$. En passant à la trace, on voit que

$$a = \frac{1}{n} \|A\|^2 > 0$$

On a alors $B^t B = ({}^t A A)^{-1} = \frac{1}{a} I_n$.

4.b. - Si $A = \lambda \Omega_1$ et $B = \frac{1}{\lambda} \Omega_2$ avec $\lambda > 0$ et $\Omega_i \in O_n(\mathbb{R})$ alors

$${}^t A A = \lambda^2 I_n \quad \text{et} \quad B^t B = \frac{1}{\lambda^2} I_n$$

On en déduit que

$$\forall M \in E, {}^t A A M B^t B = M$$

c'est à dire $f^* \circ f = Id$ et f est un endomorphisme orthogonal.

- Réciproquement, si f est un endomorphisme orthogonal alors on a vu qu'il existe $a > 0$ tel que

$${}^t A A = a I_n \quad \text{et} \quad B^t B = \frac{1}{a} I_n$$

Posons $\Omega_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} A$ et $\Omega_2 = \sqrt{a} B$. Ce sont des matrices orthogonales qui vérifient $A = \lambda \Omega_1$ et $B = \frac{1}{\lambda} \Omega_2$

Exercice 3.

1.a. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g_x : t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur \mathbb{R}^+ . Elle présente des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 0 et de $+\infty$. Par croissances comparées, $g_x(t) = o_{+\infty}(1/t^2)$ et g_x est intégrable au voisinage de $+\infty$. En outre, $g_x(t) \sim_0 t^{x-1}$ et g_x est intégrable au voisinage de 0 ssi $x > 0$. g_x est donc intégrable sur \mathbb{R}^+ ssi $x > 0$. Enfin, comme g_x est positive, intégrabilité et existence d'intégrale sont des notions équivalentes et le domaine de Γ est donc \mathbb{R}^{+*} .

Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ donne

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

1.b. $\exp'' = \exp$ est positive et \exp est donc convexe sur \mathbb{R} . Son graphe reste au dessus de la tangente en $(0, 1)$ et on a donc

$$\forall u \in \mathbb{R}, e^u \geq 1 + u$$

Montrons maintenant que l'on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour étudier la suite de terme général $\int_0^\infty f_n$.

- Pour tout n , f_n est une fonction continue sur \mathbb{R}^{+*} .
- Soit $t > 0$. Pour n assez grand $f_n(t) = \exp(n \ln(1 - t/n)) t^{x-1} \rightarrow e^{-t} t^{x-1}$ quand $n \rightarrow +\infty$. Ainsi, (f_n) converge simplement sur \mathbb{R}^{+*} vers $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ qui est elle aussi continue sur \mathbb{R}^{+*} .
- On a (en utilisant la première partie de la question et la croissance de $u \mapsto u^n$ sur \mathbb{R}^+)

$$\forall t \in]0, n], |f_n(t)| \leq t^{x-1} e^{-t}$$

et la majoration reste valable sur $[n, +\infty[$. Le majorant est intégrable sur \mathbb{R}^+ (question 1).

L'interversion est donc licite et donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \Gamma(x)$$

1.c. Le changement de variable $u = t/n$ donne

$$\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = n^x I_n(x)$$

Par ailleurs, une intégration par parties donne (pour tout $a \in]0, 1[$)

$$\int_a^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \left[\frac{t^x}{x} (1-t)^n \right]_a^1 + \frac{n}{x} \int_a^1 (1-t)^{n-1} t^x dt$$

Pour $x > 0$, le terme tout intégré tend vers 0 quand $a \rightarrow 0$. Les intégrales admettent une limite (question 1) et le passage à la limite donne

$$I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1)$$

1.d. Une récurrence assez aisée donne alors

$$\forall n \geq 0, I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} I_0(x+n)$$

Or, $I_0(x+n) = \frac{1}{x+n}$ et donc

$$\int_0^{+\infty} f_n = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n)}$$

La question 1.b indique alors que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

2.a. Une intégration par parties donne

$$a_n = [t(1-t^p)^n]_0^1 + np \int_0^1 t^p (1-t^p)^{n-1} dt$$

Le terme "tout intégré" est nul. En écrivant $t^p = t^p - 1 + 1$ dans l'intégrale, on obtient

$$a_n = np(a_{n-1} - a_n)$$

2.b. On a donc $a_n = \frac{np}{1+np}$ et une récurrence aisée donne

$$a_n = \frac{n! p^n}{\prod_{k=1}^n (1+kp)}$$

2.c. On transforme l'égalité précédente en factorisant chaque terme du dénominateur par p :

$$a_n = \frac{n!}{(1+1/p)(2+1/p)\dots(n+1/p)} = \frac{n! n^{1/p}}{(1/p)(1+1/p)(2+1/p)\dots(n+1/p)} \frac{1}{pn^{1/p}}$$

D'après 1.d, la première fraction tend vers $\Gamma(1/p)$ et on a donc

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{pn^{1/p}}$$

2.d. $\forall t \in [c, 1]$, $c^p \leq t^p$ et donc $0 \leq 1 - t^p \leq 1 - c^p$ et enfin (croissance de $u \mapsto u^n$ sur \mathbb{R}^+)
 $0 \leq (1 - t^p)^n \leq (1 - c^p)^n$. On en déduit que

$$0 \leq a_n - a_n(c) = \int_c^1 (1 - t^p)^n dt \leq (1 - c^p)^n \int_c^1 dt \leq (1 - c^p)^n$$

Comme $1 - c^p \in [0, 1[$, le majorant est, par croissances comparées, négligeable devant $n^{-1/p}$ quand $n \rightarrow +\infty$. On a donc $a_n - a_n(c) = o(a_n)$ (puisque $a_n = O(n^{-1/p})$) c'est à dire

$$a_n(c) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n$$

3.a.i. La fonction $t \mapsto x^p$ étant de limite nulle en 0 (puisque $p > 0$), il existe $c_1 \in]0, 1[$ tel que $c_1^p \leq 1/\lambda_2$. La fonction $t \mapsto \lambda - \varepsilon(t)$ étant de limite λ en 0, il existe c_2 tel que $\forall t \in [0, c_2]$, $\lambda_1 \leq \lambda - \varepsilon(t) \leq \lambda_2$. On a alors $\forall t \in [0, c_2]$, $1 - \lambda_2 t^p \leq g(t) \leq 1 - \lambda_1 t^p$. Si on pose $c = \min(c_1, c_2)$ on a alors

$$\forall t \in [0, c], 0 \leq 1 - \lambda_2 t^p \leq 1 - \lambda_2 t^p \leq g(t) \leq 1 - \lambda_1 t^p$$

3.a.ii. La fonction $v \mapsto v^n$ étant croissante sur \mathbb{R}^+ , on a alors

$$\forall t \in [0, c], (1 - \lambda_2 t^p)^n \leq (g(t))^n \leq (1 - \lambda_1 t^p)^n$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et c , il vient

$$\int_0^c (1 - \lambda_2 t^p)^n dt \leq u_n - \int_c^1 (g(t))^n dt \leq \int_0^c (1 - \lambda_1 t^p)^n dt$$

Par décroissance de g^n (composée de g décroissante et de $v \mapsto v^n$ croissante) on a $\int_c^1 (g(t))^n dt \leq (1 - c)(g(c))^n \leq (g(c))^n$ et finalement

$$\int_0^c (1 - \lambda_2 t^p)^n dt \leq u_n \leq (g(c))^n + \int_0^c (1 - \lambda_1 t^p)^n dt$$

3.a.iii. En posant $u = \lambda_2^{1/p} t$ dans la première intégrale ci-dessus et $u = \lambda_1^{1/p} t$ dans la seconde, on en déduit exactement que

$$\frac{1}{\lambda_2^{1/p}} a_n(c \lambda_2^{1/p}) \leq u_n \leq (g(c))^n + \frac{1}{\lambda_1^{1/p}} a_n(c \lambda_1^{1/p})$$

3.b. Etat donné un choix de λ_1, λ_2 , on trouve un c (dépendant des λ_i) comme ci-dessus et on a

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_2}\right)^{1/p} \frac{a_n(c \lambda_2^{1/p})}{a_n} \leq \frac{\lambda^{1/p} u_n}{a_n} \leq \frac{(g(c))^n \lambda^{1/p}}{a_n} + \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{1/p} \frac{a_n(c \lambda_1^{1/p})}{a_n}$$

Soit $\varepsilon_1 > 0$.

- Comme $\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{1/p}$ tend vers 1 quand λ_1 s'approche de λ , on peut choisir λ_1 tel que cette quantité soit plus petite que $1 + \varepsilon_1$.
- Comme $\left(\frac{\lambda}{\lambda_2}\right)^{1/p}$ tend vers 1 quand λ_2 s'approche de λ , on peut choisir λ_1 tel que cette quantité soit plus grande que $1 - \varepsilon_1$.

λ_1 et λ_2 (et donc c) sont maintenant fixé.

- $\frac{a_n(c\lambda_1^{1/p})}{a_n} \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$ (question 2.d) et il existe donc n_0 tel que pour $n \geq n_0$ cette quantité soit plus petite que $1 + \varepsilon_1$.
- $\frac{a_n(c\lambda_2^{1/p})}{a_n} \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$ (question 2.d) et il existe donc n_1 tel que pour $n \geq n_1$ cette quantité soit plus grande que $1 - \varepsilon_1$.
- Comme $g(t) - 1 \sim_0 -\lambda t^p$, g est strictement inférieure à 1 sur un voisinage de 0 et donc aussi sur $]0, 1[$ par décroissance. Ainsi, $g(c) \in [0, 1[$ et par croissances comparées (compte-tenu de l'équivalent de 2.c) $\frac{(g(c))^n \lambda^{1/p}}{a_n} \rightarrow 0$. Pour $n \geq n_3$, cette quantité est plus petite que ε_1 .

On a alors

$$\forall n \geq n_3, (1 - \varepsilon_1)^2 \leq \frac{\lambda^{1/p} u_n}{a_n} \leq \varepsilon_1 + (1 + \varepsilon_1)^2$$

ou encore

$$\forall n \geq n_3, \varepsilon_1(-2 + \varepsilon_1) \leq \frac{\lambda^{1/p} u_n}{a_n} - 1 \leq \varepsilon_1(3 + \varepsilon_1)$$

Majorant et minorant pouvant être rendu aussi proche de zéro que l'on veut, on a donc la quantité centrale qui tend vers 0 c'est à dire

$$u_n \sim \frac{a_n}{\lambda^{1/p}} \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{p(n\lambda)^{1/p}}$$

- 4.a. $g : t \mapsto \left(\frac{t}{sh(t)}\right)^n$ est continue sur $]0, 1[$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur 1). Son intégrale sur le segment $[0, 1]$ est donc parfaitement définie.
- 4.b. On a g (prolongée en 0 par la valeur 1) qui est continue sur $[0, 1]$. En outre

$$\frac{t}{sh(t)} = \frac{1}{1 + t^2/6 + o_0(t^2)} = 1 - \frac{t^2}{6} + o_0(t^2)$$

et on est donc dans le cadre de la question 3 avec $\lambda = 1/6$ et $p = 2$. Pour utiliser la question 3, il suffit de montrer que g est décroissante. Or,

$$\forall t > 0, g'(t) = \frac{sh(t) - t.ch(t)}{sh^2(t)}$$

et, par concavité de th sur \mathbb{R}^+ , on a $\forall t \geq 0, th(t) \leq t$. On en déduit que g' est négative sur \mathbb{R}^+ et donc décroissante sur \mathbb{R}^+ . Enfin, comme g est de limite nulle en l'infini, elle reste positive sur \mathbb{R}^+ et g va donc de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

La question 3 s'applique et donne

$$v_n \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2(n/6)^{1/2}} = \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$$