Epreuve de Mathématiques A PSI

durée : 3 heures

Partie I : Expression des solutions de (L).

1. L'ensemble des solutions de (L_0) est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2. Une base est formée par les deux fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$. Une autre base est formée des fonctions $x \mapsto sh(x)$ et $x \mapsto ch(x)$.
2. L'ensemble des solutions de (L) est un espace affine de direction l'ensemble des solutions de (L_0).
3. $h(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^{x-t} - e^{t-x}}{2} b(t)dt = e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{2} b(t)dt - e^{-x} \int_0^x \frac{e^t}{2} b(t)dt$
   Par dérivation simple,comme b est continue, pour tout $x \in [0,1]$:
   $h'(x) = e^x \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{2} b(t)dt + e^x \frac{e^{-x}b(x)}{2} + e^{-x} \int_0^x \frac{e^t}{2} b(t)dt - e^{-x} \frac{e^x b(x)}{2}$
   $h'(x) = e^x \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{2} b(t)dt + e^{-x} \int_0^x \frac{e^t}{2} b(t)dt$
   De mê me :
   $h"(x) = e^x \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{2} b(t)dt - e^{-x} \int_0^x \frac{e^t}{2} b(t)dt + b(x)$
   Et, pour tout $x \in [0,1]$, $h"(x) - h(x) = b(x)$. h est solution de (L).
4. Les solutions de (L) s'écrivent donc sous la forme :
   $$\forall x \in [0,1], y(x) = Ach(x) + Bsh(x) + h(x)$$
   où A et B sont des constantes réelles.
5. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et s une solution (L). Il existe deux réels A, B tels que, pour tout x de $[0,1]$, $s(x) = Ach(x) + Bsh(x) + h(x)$.
   La condition $\left\{ \begin{array}{c} s(0) = \alpha sh(1) \\ \text{et} \\ s(1) = \beta sh(1) \end{array} \right. \Leftrightarrow$
   $$\left\{ \begin{array}{c} s(0) = \alpha sh(1) = A \\ \\ s(1) = \beta sh(1) = Ach(1) + Bsh(1) + \int_0^1 sh(1-t)\, b(t)\, dt \end{array} \right.$$
   Système qui permet de déterminer A, B donc s de manière unique.

Partie 2 : Développement en série de Fourier de la fonction H.

On fixe x dans $[0,1]$ et soit φ la fonction impaire, 2-périodique, définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall t \in [0,1], \varphi(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{sh(1-x)}{sh(1)} sh(t) \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant x \\ \frac{sh(x)}{sh(1)} sh(1-t) \text{ si x} \leqslant t \leqslant 1 \end{array} \right.$$

1. Pour $x = 1/4$ on a :
   φ est croissante sur $[0, 1/4]$ (de la forme $t \mapsto ksh(t)$), décroissante sur $[1/4, 1]$,

continue en 1/4. $\varphi(0)=\varphi(1)=0$. La valeur maximum sur $[0,]$ est $\varphi(1/4)\simeq 0,18$. Par imparité on connaît donc complètement φ sur $[-1,1]$, puis par 2-périodicité sur $[-2,2]$.

2. φ est impaire donc, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n(\varphi)=0$.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(\varphi)=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}\varphi(t)\sin(n\omega t)dt$ avec $T=2$ et $\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$.
   Comme φ est impaire : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(\varphi)=2\displaystyle\int_0^1\varphi(t)\sin(n\pi t)dt$ On obtient :
   $$b_n(\varphi)=2\int_0^x\frac{sh(1-x)}{sh(1)}sh(t)\sin(n\pi t)dt+2\int_x^1\frac{sh(x)}{sh(1)}sh(1-t)\sin(n\pi t)dt$$
   Après calculs (! !) : $b_n(\varphi)=\dfrac{2\sin(\pi nx)}{n^2\pi^2+1}$
3. On vérifie que la fonction φ est continue sur $]0,1[$(pas de problème en $t=x$) ; comme $\varphi(0)=0$, elle est continue sur $]-1,1[$. Comme $\varphi(1)=\varphi(-1)=0$ le prolongement périodique reste continu. De plus la fonction est de classe c^1 par morceaux. La série de Fourier de φ converge normalement vers φ.
4. Par suite, pour x fixé, $\forall t\in[0,1]$, $\varphi(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2+1}\sin(\pi nt)$
   Vu la définition de φ on a bien :
   $$\forall(x,t)\in[0,1]^2,\ H(x,t)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\pi nx)\sin(\pi nt)}{n^2\pi^2+1}$$

Partie 3 : Etude d'un endomorphisme auto-adjoint défini par H.

Soit Ψ l'application qui à tout élément f de E associe $\Psi(f)$ définie par :
$$\forall x\in[0,1],\Psi(f)(x)=\int_0^1 H(x,t)f(t)dt$$

1. Il faut montrer que, pour tout $f\in E$, $\Psi(f)$ est bien définie et est une fonction continue.
   Par hypothèse H est continue sur le fermé borné $(0,1]^2$ de $\mathbb{R}^2$. Elle est donc bornée sur $[0,1]^2$. Notons M tel que $\forall(x,t)\in[0,1]^2$, $|H(x,t)|\le M$.
   Soit alors $f\in E$; montrons que toutes les hypothèses du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre sont réunies :
   $\forall x\in[0,1]$, $t\mapsto H(x,t)f(t)$ est continue donc intégrable sur l'intervalle $[0,1]$
   $\forall t\in[0,1]$, $x\mapsto H(x,t)f(t)$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$
   $\forall x\in[0,1]$,$\forall t\in[0,1]$, $|H(x,t)f(t)|\le M|f(t)|\le M||f||_\infty$
   avec $||f||_\infty=\displaystyle\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$. La fonction constante $t\mapsto M||f||_\infty$ est intégrable sur $[0,1]$. L'hypothèse de domination est vérifiée.
   $\Psi(f)$ existe et est continue sur $[0,1]$. $\Psi(f)\in E$.
   La linéarité de Ψ est évidente. Ψ est un endomorphisme de E.

2. $f \in E$, $x \in [0,1]$: d'après l'expression de H trouvée en 4

$$\Psi(f)(x) = 2\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n x)}{n^2\pi^2+1}\sin(\pi n t)dt\right) f(t))dt$$

Pour x fixé notons $g_n : t \mapsto \dfrac{\sin(\pi n x)}{n^2\pi^2+1}\sin(\pi n t)f(t)$
Les g_n sont des fonctions continues et intégrables sur $[0,1]$.
La série $\sum g_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $t \mapsto H(x,t)f(t)$ qui est continue donc intégrable sur $[0,1]$.
De plus $v_n = \displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|dt \leq \int_0^1 \frac{|f(t)|}{n^2\pi^2+1}dt = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
La série $\sum v_n$ est convergente. On a donc : $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^1 g_n(t)dt\right)$
On a donc, pour tout x :

$$\Psi(f)(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n x)}{n^2\pi^2+1}\left(\int_0^1 f(t)\sin(\pi n t)dt\right)$$

3. Soit $G \in L(E)$. G est auto-adjoint ssi $\forall (f,g) \in E^2$, $(G(f)|g) = (f|G(g))$
$\forall (f,g) \in E^2$, $(\Psi(f)|g) = \displaystyle\int_0^1 \Psi(f(x))g(x)dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 H(x,t)f(t)dt\right) g(x)dx$
Les applications sont continues, le théorème de Fubini permet d'écrire :

$$(\Psi(f)|g) = \int_0^1\int_0^1 H(x,t)f(t)g(x)dxdt = \int_0^1\int_0^1 H(u,v)f(v)g(u)dudv = (f|\Psi(g))$$

Ψ est un endomorphisme auto-adjoint de E.

4. En reprenant l'expression de la question 2 :

$$\forall f \in E, \quad (\Psi(f)|f) = \int_0^1 \left(2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n x)}{n^2\pi^2+1}\right)\left(\int_0^1 f(t)\sin(\pi n t)dt\right) f(x)dx$$

$$\forall f \in E, \quad (\Psi(f)|f) = 2\left(\int_0^1 f(t)\sin(\pi n t)dt\right)\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n x)}{n^2\pi^2+1}\right) f(x)dx$$

Le même raisonnement que la question 2 donne :

$$(\Psi(f)|f) = 2\left(\int_0^1 f(t)\sin(\pi n t)dt\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \frac{\sin(\pi n x)}{n^2\pi^2+1}f(x)dx\right)$$

$$(\Psi(f)|f) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\int_0^1 f(t)\sin(\pi n t)dt \times \int_0^1 \sin(\pi n x)f(x)dx}{n^2\pi^2+1}\right)$$

$$(\Psi(f)|f) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\int_0^1 f(t)\sin(\pi n t)dt\right)^2}{n^2\pi^2+1} \geq 0$$

5. Soit $u \in E$ tel que $(\Psi(u)|u) = 0$.

5.1 La somme précédente est composée de termes positifs ; sa nullité entraîne que tous les termes sont nuls. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 u(x)\sin(\pi n x)dx = 0$

5.2 L'énoncé indique :
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$, impaire et 2-périodique telle que :

$$F : x \in (0,1] \mapsto F(x) = \begin{cases} u(x) \text{ si } x \in]0,1] \\ 2 \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

Comme F est supposée impaire, il y a une erreur et on prendra donc $F(0) = 0$ et $F(-1) = F(1) = 2$
Les coefficients de Fourier se calculent comme dans la question 2 de la partie 2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(F) = 0$;
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(F) = 2\displaystyle\int_0^1 F(t)\sin(n\pi t)dt = 2\int_0^1 u(t)\sin(n\pi t)dt = 0$
Les coefficients de Fourier de F sont tous nuls ; F est continue par morceaux, la relation de Parseval nous permet d'écrire :
$\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-1}^1 F^2(x)dx = 0 = \frac{2}{2}\int_0^1 F^2(x)dx = \int_0^1 u^2(x)dx.$

5.3 Si u vérifie $(\Psi(u)|u) = 0$ alors, comme u est continue sur $[0,1]$, $\int_{]0,1[} u^2(t)dt = \int_{[0,1]} u^2(t)dt = 0$. La positivité et la continuité entraînent u^2 donc u nulle sur $[0,1]$. Par contraposée :
Pour toute fonction v différente de la fonction nulle, $(\Psi(v)|v) > 0$.

5.4 Soit λ une valeur propre de Ψ et v un vecteur propre associé.
v est non nulle et $(\Psi(v)|v) = (\lambda v|v) = \lambda||v||^2 > 0$; comme $||v|| > 0$, $\lambda > 0$.

6. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction f_m définie par : :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_m(x) = \sin(\pi m x)$$

6.1 $\displaystyle\int_0^1 \sin(\pi p x)\sin(\pi q x)dx = \int_0^1 \frac{\cos((p+q)\pi x) + \cos((p-q)\pi x)}{2}dx.$
Si $p \neq q$, $\displaystyle\int_0^1 \sin(\pi p x)\sin(\pi q x)dx = \left[\frac{\sin((p+q)\pi x)}{2(p+q)} + \frac{\sin((p-q)\pi x)}{2(p-q)}\right]_0^1$
Si $p \neq q$, $(f_p, f_q) = \displaystyle\int_0^1 \sin(\pi p x)\sin(\pi q x)dx = 0$
Si $p = q$, $(f_p, f_q) = \dfrac{1}{2}$

6.2 Soit $m \in \mathbb{N}^*$,en utilisant la formule de la question 2, pour tout x :

$$\Psi(f_m)(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n x)}{n^2\pi^2+1}\left(\int_0^1 f_m(t)\sin(\pi n t)dt\right) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\pi n x)}{n^2\pi^2+1}(f_m|f_n)$$

$$\Psi(f_m)(x) = 2\frac{(f_m|f_m)}{m^2\pi^2+1}\sin(\pi m x) \qquad \Psi(f_m) = \frac{f_m}{m^2\pi^2+1}$$

7. Soit λ une valeur propre de Ψ et f_λ un vecteur propre associé.

   7.1 Soit s la solution de l'équation $y" - y = f$ vérifiant les conditions de la partie 1 question 5 avec $\alpha = \beta = 0$. s est de classe c^2 sur $(0, 1]$.
   Pour tout x : $s(x) = \alpha sh(1-x) + \beta sh(x) - \Psi(f)(x) = -\Psi(f)(x)$
   $\Psi(f) = -s$ est donc également de classe c^2. Comme $\lambda > 0$, si f_λ est un vecteur propre associé, $f_\lambda = \frac{1}{\lambda}\Psi(f_\lambda)$ est donc aussi de classe c^2.

   7.2 Si $\alpha = \beta = 0$, $s = -\Psi(f)$ vérifie $s" - s = f$ avec $s(0) = s(1) = 0$.
   Donc si $\Psi(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$, $\lambda \neq 0$ on a :
   $(-\lambda f_\lambda)'' - (-\lambda) f_\lambda = f_\lambda$ avec $f_\lambda(0) = f_\lambda(1) = 0$.

   f_λ est solution du problème : $\begin{cases} y''(x) - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

   7.3 Si $\lambda = 1$ était valeur propre, pour f_1 associée, $f_1'' = 0 \Rightarrow f_1$ affine.
   La condition $f_1(0) = f_1(1) = 0$ entraîne $f_1 = 0$. Contradiction.
   1 n'est pas valeur propre de Ψ.

   7.4 Notons $c = 1 - \dfrac{1}{\lambda}0$. Si $c > 0$, la solution générale de $y'' - cy =$ est :
   $y(x) = ae^{\sqrt{c}x} + be^{-\sqrt{c}x}$
   La condition $y(0) = 0 = y(1)$ implique $a = b = 0$. Seule la fonction nulle est solution, on ne peut trouver de vecteur propre. λ ne peut être valeur propre dans ce cas.

   7.5 Lorsque $1 - \dfrac{1}{\lambda} < 0$, soit $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{\lambda} - 1}$.
   La solution générale de $y'' + \omega^2 y = 0$ est $y(x) = a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)$.
   $y(0) = 0 \Rightarrow b = 0$ et avec $b = 0$, $y(1) = 0 \Rightarrow a\sin(\omega) = 0$.
   Si $\sin(\omega) \neq 0$, $b = 0$ et seule la fonction nulle est solution. λ n'est pas valeur propre.
   Les valeurs propres éventuelles sont donc telles que ω est de la forme $\omega = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   Dans ce cas $\lambda = \dfrac{1}{1+\omega^2} = \dfrac{1}{1+k^2\pi^2}$ et $f_\lambda = bf_k$.
   Les valeurs propres sont donc de la forme $\lambda = \dfrac{1}{m^2\pi^2+1}$,$m \in \mathbb{N}^*$ (1 n'est pas valeur propre donc $m \neq 0$).

   7.6 Comme on a vu que les fonctions f_m étaient vecteurs propres, on a déterminé ainsi toutes les valeurs propres.

   $$sp(\Psi) = \{\frac{1}{m^2\pi^2+1}/m \in \mathbb{N}^*\}$$

   Les espaces propres sont des droites vectorielles de vecteur directeur les fonctions f_m.

Partie 4 : Calcul de la norme de l'endomorphisme Ψ.

1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $||f_m|| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. $h_m = \sqrt{2} f_m$.
2. La question 2 de la partie précédente donne :

   2.1
$$\forall f \in E, \quad \Psi(f) = 2\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(f_m|f)}{m^2\pi^2+1} f_m.$$
$$\forall f \in E, \quad \Psi(f) = 2\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(h_m/\sqrt{2}|f)}{m^2\pi^2+1} h_m/\sqrt{2}.$$
$$\forall f \in E, \quad \Psi(f) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(h_m|f)}{m^2\pi^2+1} h_m.$$

   2.2 Soit pour $f \in E$, F la fonction impaire, 2-périodique égale à f sur $]0,1[$ et telle que $F(1) = 0$. Comme dans l'étude faite pour la fonction u la relation de Parseval appliquée à F donne :
$$\forall f \in E, \quad ||f||^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} (h_m|f)^2.$$

3. En utilisant la formule de 2.1 et avec les raisonnements vus précédemment, pour tout entier p :
   $(\Psi(f)|h_p) = \dfrac{(h_p|f)}{p^2\pi^2+1}(h_p|h_p) = \dfrac{(h_p|f)}{p^2\pi^2+1}$.
   En appliquant la formule précédente à $\Psi(f)$:
$$\forall f \in E, \quad ||\Psi(f)||^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(h_m|f)^2}{(m^2\pi^2+1)^2} \leq \frac{\sum_{m=1}^{+\infty}(h_m|f)^2}{(\pi^2+1)^2} = \frac{||f||^2}{(\pi^2+1)^2}.$$
4. Soit $K = \dfrac{1}{\pi^2+1}$.
   $\forall (f,g) \in E^2$, $||\Psi - f) - \Psi(g)|| = ||\Psi(f-g)|| \leq K||f-g||$.
   L'application est lipchitzienne donc Ψ est un endomorphisme continu de $(E, ||\ \ ||)$.
5. Pour tout f de norme 1, $||\Psi(f)|| \leq \dfrac{1}{\pi^2+1}$
   Mais h_1 est de norme 1 et $\Psi(h_1) = \dfrac{h_1}{\pi^2+1}$
   Donc : $\sup\limits_{||f||=1} ||\Psi(f)|| = \dfrac{1}{\pi^2+1}$.

Fin du problème.