Exercice 1.

A.1. On a

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est donc une série absolument convergente. Les sommes partielles de cette série formant la suite (u_n-u_1), la suite (u_n) est donc convergente.

A.2.a. h_x est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec

$$\forall t>0,\ h_x'(t)=\frac{1-x\ln(t)}{t^{x+1}}$$

On en déduit le tableau de variation suivant

t	0	$e^{1/x}$	$+\infty$
$h_x(t)$	$\nearrow$	$\searrow$	0

A.2.b. h_1 est décroissante sur $[e,+\infty[$ et donc sur $[3,+\infty[$. Ainsi,

$$\forall n\geq 3,\ \forall t\in[n,n+1],\ \frac{\ln(t)}{t}\leq\frac{\ln(n)}{n}$$

$$\forall n\geq 4,\ \forall t\in[n-1,n],\ \frac{\ln(n)}{n}\leq\frac{\ln(t)}{t}$$

En intégrant ces inégalités respectivement sur $[n,n+1]$ et $[n-1,n]$, on obtient les inégalités demandées.

A.3.c. En particulier, on a (en sommant)

$$\left[\frac{1}{2}\ln(t)^2\right]_3^n=\int_3^n\frac{\ln(t)}{t}\,dt\leq\sum_{k=3}^n\frac{\ln(k)}{k}$$

Le minorant étant de limite infinie, $\sum\frac{\ln(n)}{n}$ diverge (la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$).
Remarque : plus simplement, on a $\frac{\ln(n)}{n}\geq\frac{1}{n}$ *qui donne aussi la divergence.*
Par ailleurs, $(-1)^n\frac{ln(n)}{n}$ est le terme général d'une suite alternée qui, en module, décroît à partir du rang 3 et qui est de limite nulle (croissances comparées). Par règle spéciale, c'est le terme général d'une série convergente.

B.1.a. On a

$$a_{n+1}-a_n=\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\frac{1}{2}\left((\ln(n+1))^2-(\ln(n))^2\right)$$

Par ailleurs, la seconde inégalité de la question 2.b donne (en explicitant l'intégrale comme on l'a fait plus haut en changeant n en $n+1$ avec donc $n\geq 3$)

$$\forall n\geq 3,\ \frac{1}{2}\left((\ln(n+1))^2-(\ln(n))^2\right)\geq\frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

On obtient donc

$$\forall n\geq 3,\ a_{n+1}-a_n\leq 0$$

et la suite (a_n) décroît à partir du rang 3.

B.1.b. En utilisant cette fois la première inégalité de $A.2.b$ (et en sommant), on a

$$t_n = \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \geq \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt \geq \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^{n} \frac{\ln(t)}{t}\, dt$$

et donc

$$\forall n \geq 3,\ a_n \geq \frac{\ln(2)}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2}$$

La suite (a_n) est donc minorée. Etant décroissante, elle converge.

B.2. On découpe S_{2n} en deux parties contenant respectivement les indices pairs et impairs.

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}$$

Dans la seconde somme, on ajoute les termes pairs :

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2)+\ln(k)}{k} - t_{2n}$$

En scindant la première somme, on a donc

$$S_{2n} = t_n - t_{2n} + \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

B.3. On fait intervenir les suites u_n et a_n :

$$S_{2n} = (u_n + \ln(n))\ln(2) + a_n + \frac{(\ln(n))^2}{2} - a_{2n} - \frac{(\ln(2n))^2}{2}$$

En écrivant que

$$\frac{(\ln(2n))^2}{2} = \frac{(\ln(n)+\ln(2))^2}{2} = \frac{(\ln(n))^2}{2} + \ln(n)\ln(2) + \frac{(\ln(2))^2}{2}$$

on a donc

$$S_{2n} = u_n \ln(2) + (a_n - a_{2n}) - \frac{(\ln(2))^2}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}$$

(S_{2n}) étant une extraite de la suite convergente (S_n) qui converge vers S, on a donc

$$S = \gamma \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}$$

C.1.a. On a

$$v_n'(x) = -\frac{\ln(n)}{n^x} + \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} = h_x(n+1) - h_x(n)$$

Soit $x \geq 1$. h_x décroît sur $[e^{1/x}, +\infty[$ et donc sur $[e, +\infty[$ (puisque $e^{1/x} \leq e$). On en déduit que v_n' est négative sur $[1, +\infty[$ pour $n \geq 3$ et donc

$$\forall n \geq 3,\ \forall x \geq 1,\ 0 \leq v_n(x) \leq v_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Ainsi, $\|v_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ est le terme général d'une série convergente et $\sum v_n$ converge normalement sur $[1, +\infty$.

C.1.b. Soit $n \geq 1$.

- L'application $t \mapsto \frac{1}{t^x} = e^{-x\ln(t)}$ est continue sur $[n, n+1]$ pour tout $x \geq 1$.
- L'application $x \mapsto \frac{1}{t^x}$ est continue sur $[1, +\infty[$ pour tout $t \in [n, n+1]$.
- Pour $t \in [n, n+1]$ et $x \geq 1$, $\left|\frac{1}{t^x}\right| \leq \frac{1}{t}$ et le majorant est indépendant de x et intégrable sur $[n, n+1]$ (fonction continue sur ce SEGMENT).

Le théorème de régularité des intégrales à paramètres indique que $x \mapsto \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Par ailleurs, $x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x\ln(n)}$ est aussi continue sur $[1, +\infty[$ et donc

$$w_n \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[)$$

Remarque : on peut aussi expliciter w_n en calculant l'intégrale. Apparaît un problème en 1 qui se résout sans peine avec un DL.
Si $x \geq 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ décroît sur $[n, n+1]$ et on a donc

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \geq \frac{1}{n^x}$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall x \geq 1,\ \forall n \geq 1,\ 0 \leq w_n(x) \leq v_n(x)$$

Ainsi, $\|w_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leq \|v_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ et la normale convergence de $\sum v_n$ sur $[1, +\infty[$ entraîne celle de $\sum w_n$. Il y a, en particulier, uniforme convergence sur $[1, +\infty[$ et comme les w_n sont continues, il en est de même de la somme W.

C.1.c. Par relation de Chasles, on a

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x}$$

L'intégrale se calcule immédiatement et, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\forall x > 1,\ W(x) = F(x) + \frac{1}{1-x}$$

Par continuité de W en 1^+, on a donc

$$\lim_{x \to 1^+} \left(F(x) + \frac{1}{1-x}\right) = W(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)\right)$$

On remarque enfin que, par telescopage,

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N+1) = u_N - \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \underset{N \to +\infty}{\to} \gamma$$

et on conclut que

$$\lim_{x \to 1^+} \left(F(x) + \frac{1}{1-x}\right) = \gamma$$

C.2.a. Soit $x > 0$. La suite $(\phi_n(x))$ est alternée et de limite nulle. En outre, $(|\phi_n(x)|)$ décroît. La règle spéciale indique alors que $\sum \phi_n(x)$ converge.

C.2.b. On a $\phi_n'(x) = (-1)^n h_x(n)$ qui est le terme général d'une suite alternée de limite nulle pour $x > 0$ (croissances comparées) et décroissante à partir du rang $E(e^{1/x}) + 1$.
Soit $a > 0$ et $n_0 = E(e^{1/a}) + 1$. Pour tout $x \geq a$, $(\phi_n'(x))$ vérifie les hypothèses de la règle spéciale à partir du rang n_0. On a donc

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \geq a,\ \left|\sum_{k\geq n} \phi_k'(x)\right| \leq |\phi_n'(x)| \leq \frac{\ln(n)}{n^a}$$

Le majorant étant de limite nulle et indépendant de x, on a montré que $\sum \phi_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
Remarque : il est essentiel que n_0 soit lui aussi indépendant de x.

C.2.c. Les questions précédentes permettent d'utiliser le théorème de régularité des sommes de séries avec $\sum \phi_n$ (ϕ_n est de classe C^1). On a $\phi \in C^1(\mathbb{R}^{+*})$ avec

$$\forall x > 0,\ \phi'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}$$

En particulier,

$$\phi'(1) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} = S$$

C.3.a. Dans $\phi(x)$, on sépare les termes d'indice pair et impair. Toutes les séries écrites étant convergentes (on passe par des sommes finies et on fait tendre la borne vers l'infini), on a

$$\forall x > 1,\ \phi(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^x} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^x}$$

On ajoute à la seconde somme les termes de la première pour obtenir

$$\forall x > 1,\ \phi(x) = -2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^x} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} = -2^{1-x}F(x) + F(x)$$

C.3.b. On a

$$1 - 2^h = 1 - e^{h\ln(2)} = -h\ln(2) - \frac{h^2(\ln(2))^2}{2} + o_0(h^2)$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$1 - 2^{1-x} = (x-1)\ln(2) - \frac{(x-1)^2(\ln(2))^2}{2} + o_1((x-1)^2)$$

Par ailleurs, la question $C.1.c$ donne

$$F(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o_1(1)$$

en faisant le produit, on obtient

$$\phi(x) = (1 - 2^{1-x})F(x) = \ln(2) + \left(\gamma\ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}\right)(x-1) + o_1(x-1)$$

Avec la formule de Taylor-Young, et par unicité des DL, on a donc

$$S = \phi'(1) = \gamma\ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}$$

Exercice 2.

1. de manière immédiate,
$$P_k(x_i) = \delta_{k,i} = \begin{cases} 1 & \text{si} \;\; k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Supposons $\sum \alpha_k P_k = 0$. En prenant la valeur en x_j, on obtient $\alpha_j = 0$. La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est donc libre. Elle est, par ailleurs, constituée de polynômes de degré n et est donc une famille de $\mathbb{R}_n[X]$. Par cardinal et dimension, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.a. Si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe donc des scalaires α_k tels que $Q = \sum \alpha_k P_k$. La valeur en x_j donne $Q(x_j) = \alpha_j$. Ainsi,
$$Q = \sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$$

3.b. Avec $Q_m = x^m$ ($m \in \{0, 1, \dots, n\}$) on a donc
$$Q_m(0) = \sum_{k=0}^{n} x_k^m P_k(0)$$
et donc
$$s_0 = 1 \;\; \text{et} \;\; \forall m \in \{1, ..n\}, \; s_m = 0$$

4.a. On a $Q_1(x_j) = Q(x_j) - Q(x_j) = 0$ et Q_1 a donc au moins $n+1$ racines réelles (les x_j).

4.b. i. Prenons $Q = X^{n+1}$ et donc $Q_1 = X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} x_k^{n+1} P_k$. La valeur en $x = 0$ donne $s_{n+1} = -Q_1(0)$. Or, Q_1 est de degré $n+1$ et on en connaît $n+1$ racines. On peut le factoriser sous la forme
$$Q_1 = c \prod_{k=0}^{n} (X - x_k)$$
où c est un réel qui est le coefficient dominant de Q_1. Comme les P_k sont de degré $n < n+1$, on a $c = 1$ et donc
$$s_{n+1} = -Q_1(0) = \prod_{k=1}^{n} (-x_k) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n} x_k$$

ii. On choisit cette fois $Q = X^{n+2}$. on a alors $s_{n+2} = -Q_1(0)$ avec
$$Q_1 = X^{n+2} - \sum_{k=0}^{n} x_k^{n+2} P_k$$
Il existe cette fois des scalaires c et d tels que
$$Q_1 = (cX + d) \prod_{k=0}^{n} (X - x_k)$$
En étudiant le coefficient de X^{n+2}, on obtient $c = 1$. En étudiant alors le coefficient de X^{n+1}, on obtient
$$0 = d - \sum_{k=0}^{n} x_k$$
On en déduit alors que
$$s_{n+2} = -Q_1(0) = -d \prod_{k=0}^{n} (-x_k) = (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right) \left(\prod_{k=0}^{n} x_k \right)$$

5.a. On a $|x_k - x_j| \geq |k-j|$ (puisque les x_i sont des entiers ordonnés). Ainsi,

$$|y_k| = \prod_{j=0}^{k-1} |x_k - x_j| \prod_{j=k+1}^{n} |x_k - x_j] \geq \prod_{j=0}^{k-1} |k-j| \prod_{j=k+1}^{n} |k-j| = k!(n-k)!$$

5.b. P_k est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $1/y_k$. En regardant le coefficient de X^n dans l'égalité de la question 3.a on obtient donc (puisque Q est unitaire de degré n)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{Q(x_k)}{y_k} = 1$$

5.c. L'inégalité triangulaire donne

$$1 \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|Q(x_k)|}{|y_k|} \leq M \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{|y_k|}$$

La question 5.a donne aussi une majoration de $1/|y_k|$ qui permet d'écrire

$$1 \leq M \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} C_n^k$$

Ainsi, avec la formule du binôme,

$$M \geq n! \frac{1}{2^n}$$