E 3A 2005 - Mathématiques A PSI
Corrigé

Préliminaire

$u \in L(E)$ de matrice $U = (u_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ base B, U non inversible.

1. U et u sont de même rang. u est non inversible, donc non injective et il existe un élément x non nul dans $\ker u$ qui vérifie donc $u(x) = 0$.
2. Soit alors $x = (x_1, ..., x_n)$ vecteur non nul de $\ker u$. Il existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que $||x||_\infty = |x_i|$. La $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $u(x)$ dans B est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_{i,j}x_j$.

   Comme $u(x) = 0$, on a en particulier : $-u_{i,i}x_i = \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i} u_{i,j}x_j$.

   Et donc : $|u_{i,i}| \times ||x||_\infty = |u_{i,i}| \times |x_i| = \left|\displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} u_{i,j} \times x_j\right| \leq \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |u_{i,j}| \times |x_j|$.
3. Pour tout j , $|x_j| \leq ||x||_\infty$, donc $|u_{i,i}| ||x||_\infty \leq \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |u_{i,j}| ||x||_\infty$ et comme $||x||_\infty \neq 0$

   on a bien trouvé i tel que : $|u_{i,i}| \leq \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |u_{i,j}|$.
4. Comme $4 > 1$ et $4 > 3$, la condition précédente n'est pas réalisée pour la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Elle est donc inversible. (matrice à diagonale strictement dominante).

Partie 1.

Soit f l'endomorphisme de E représenté dans la base B par la matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $M = (m_{i,j})$ où :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \forall j \in \{1, ..., n\}, \quad m_{i,j} = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Question 1

1.1 M est une matrice symétrique réelle, ses valeurs propres M sont réelles et elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

On pose : $M = -2I_n + T$, avec g l'endomorphisme de E associé à la matrice $T = (t_{i,j})$. On a : $g = f + 2e$.

1.2 $\lambda \in sp(f) \Leftrightarrow \; f - \lambda e$ non inversible $\Leftrightarrow g - (\lambda + 2)e$ non inversible $\Leftrightarrow (\lambda + 2) \in sp(g)$.
Comme $f(x) = \lambda x \Leftrightarrow g(xà = (\lambda + 2)x$, on a $Ker(f - \lambda e) = Ker\,(g - (\lambda + 2)e)$.

Question 2

2.1 Soit $\mu \in sp(T)$. La matrice $T - \mu I_n$ est non inversible. D'après la question 3 du préliminaire, il existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que $|t_{i,i} - \mu| \leq \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |t_{i,j}|$.
(Les éléments de $T - \mu I_n$ sont ceux de T sauf les éléments diagonaux égaux à $t_{i,i} - \mu$).

2.2 Les éléments $t_{i,i}$ diagonaux de T sont tous nuls, et dans chaque ligne de T tous les éléments sont nuls sauf un ou deux égaux à 1.
Pour le i déterminé dans la question 2.1, on a donc $|\mu| \leq 2$ ou 1 donc $|\mu| \leq 2$.
La restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$ réalise une bijection strictement décroissante de cet intervalle dans $[-1, 1]$. Comme $\mu/2 \in [-1, 1]$, il existe $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\mu = 2\cos\alpha$.

Question 3

La question consiste à rechercher un $\alpha \in [0, \pi]$ et une suite complexe $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que : $\begin{cases} x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad x_{k-1} - 2x_k \cos\alpha + x_{k+1} = 0 \end{cases}$

3.1 Le vecteur représenté dans la base B par $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est vecteur propre de T pour la valeur propre $\mu = 2\cos\alpha$ si et seulement si il est non nul et vérifie $TX = \mu X$. On obtient donc le système :
$\begin{cases} -\mu x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_{k-1} - \mu x_k + x_{k+1} = 0 \\ x_{n-1} - \mu x_n = 0 \end{cases}$ pour tout entier k de $\{2, ..., n-1\}$.
En imposant les conditions $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$ on a l'équivalence :

$$TX = \mu X \Longleftrightarrow \forall k \in \{1, .., n\}, x_{k-1} - \mu x_k + x_{k+1} = 0$$

On est donc amené à déterminer des suites qui vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

3.2 Si $\alpha=0$, $\mu=2$.
Le polynôme caractéristique de la relation est $X^2-2X+1=(X-1)^2$.
Les suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ solution sont définies par :
$\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2$ / $\forall k\in\mathbb{N}$, $x_k=(ak+b)\times 1^k=ak+b$
Mais $x_0=x_{n+1}=0\Rightarrow b=0$ et $a(n+1)+b=0\Rightarrow a=b=0$
D'où $TX=2X\Rightarrow X=(x_1,...,x_n)=(0)$. On ne peut donc trouver de vecteur propre associé à $\mu=2$.
De même si $\alpha=\pi$, $\mu=-2$.
Le polynôme caractéristique de la relation est $X^2+2X+1=(X+1)^2$.
Les suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ solution sont définies par :
$\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2$ / $\forall k\in\mathbb{N}$, $x_k=(ak+b)\times(-1)^k$
Mais $x_0=x_{n+1}=0\Rightarrow b=0$ et $a(n+1)+b=0\Rightarrow a=b=0$
D'où $TX=2X\Rightarrow X=(x_1,...,x_n)=(0)$. On ne peut donc trouver de vecteur propre associé à $\mu=-2$.
Par suite $\alpha\in]0,\pi[$.

3.3 Soit donc $\alpha\in]0,\pi[$.
Le polynôme caractéristique de la relation est $X^2-2\cos\alpha X+1$, de discriminant $\Delta=4\cos^2\alpha-4=-4\sin^2\alpha=(2i\sin\alpha)^2$
Les racines sont donc $\dfrac{2\cos\alpha-2i\sin\alpha}{2}=e^{-i\alpha}$ et $\dfrac{2\cos\alpha+2i\sin\alpha}{2}=e^{i\alpha}$
Les suites complexes $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ solution de la relation de récurrence sont définies par : $\exists(c_1,c_2)\in\mathbb{C}^2$ /$\forall k\in\mathbb{N}$, $x_k=c_1e^{ik\alpha}+c_2e^{-ik\alpha}$.
Un vecteur $x=(x_1,...,x_n)$ solution de $g(x)=2\cos\alpha x$ vérifie $TX=2\cos\alpha X$.
Il existe donc deux éléments de $\mathbb{C}$, c_1,c_2 tels que :

$$\forall k\in\{1,2,..,n\},\quad x_k=c_1e^{ik\alpha}+c_2e^{-ik\alpha}$$

3.4 En utilisant les notations précédentes, $x_0=0\Rightarrow c_1+c_2=0$ et
$x_{n+1}=0\Rightarrow c_1e^{i(n+1)\alpha}+c_2^{-i(n+1)\alpha}=0$
On obtient $c_1(e^{i(n+1)\alpha}-e^{-i(n+1)\alpha})=0=2ic_1\sin(n+1)\alpha$.
Si $\sin(n+1)\alpha\neq 0$ on a $c_1=c_2=0$ et le seul vecteur qui vérifie $TX=2\cos\alpha X$ est le vecteur nul. Dans ce cas $2\cos\alpha$ n'est pas valeur propre.
Les valeurs possibles pour α sont solution de $\sin(n+1)\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{k\pi}{n+1}$; $k\in\mathbb{Z}$. Comme $\alpha\in]0,\pi[$, les valeurs possibles sont $\alpha_j=\dfrac{j\pi}{n+1}$, $\quad 1\leq j\leq n$.

3.5 Réciproquement , pour $j\in\{1,...,n\}$, soit $\mu_j=2\cos(\alpha_j)$.
D'après ce qui précède la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0=0$, $x_1=a\in\mathbb{R}^*$ et la relation, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $x_{k-1}-\mu_jx_k+x_{k+1}=0$, admet pour terme d'indice $n+1$ $x_{n+1}=0$. Le vecteur $x=(a,x_2,...,x_n)$ est élément de E car les x_k sont tous réels et il est non-nul. D'après les questions précédentes il vérifie $g(x)=\mu_jx$ et donc μ_j est valeur propre de g(et donc de T). Comme la fonction cos est strictement monotone sur $]0,\pi[$, les μ_j sont n valeurs propres distinctes. Comme l'espace est de dimension n , g et T sont diagonalisables, les espaces propres sont tous de dimension 1.
Pour $j\in\{1,...,n\}$, une suite (x_k) vérifiant la relation de récurrence et les relations $x_0=x_{n+1}=0$ est du type : $\forall k\in\mathbb{N}$, $x_k=c_1\left(e^{ik\alpha_j}-e^{-ik\alpha_j}\right)=2ic_1\sin(k\alpha_j)$.

Un vecteur propre de T attaché à la valeur propre $\alpha_j = 2\cos\left(\dfrac{j\pi}{n+1}\right)$ est :

$$X_j = \begin{pmatrix} \sin\alpha_j \\ \sin 2\alpha_j \\ \vdots \\ \sin n\alpha_j \end{pmatrix} \text{ obtenu avec } c_1 = \frac{1}{2i} \text{ et } a = \sin\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \neq 0.$$

$(X_1, ..., X_n)$ est une base de vecteurs propres de T.

Question 4 : Valeurs propres de M :

D'après la question 1.2, les valeurs propres de M sont les valeurs $\lambda_j = -2 + \alpha_j = -2 + 2\cos\left(\dfrac{j\pi}{n+1}\right) = -4\sin^2\dfrac{j\pi}{2(n+1)}$, $1 \leq j \leq n$, les sous-espaces propres associés sont ceux de la matrice T. Les E_{λ_j} sont tous de dimension 1.

Partie 2.

Pour tout réel r strictement positif, on considère les deux matrices :
$H = 2I_n - rM$ et $K = 2I_n + rM$ où M désigne la matrice définie à la partie 1.

Question 1. : Quelques propriétés de la matrice H.

1.1 Soit P une matrice qui diagonalise T et M. On peut prendre par exemple P de colonnes $X_1, .., X_n$, matrice des vecteurs propres dans la base canonique. On a : $M = PDP^{-1}$ avec D matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de M. On peut écrire : $H = 2I_n - rPDP^{-1} = P(2I_n - rD)P^{-1}$. La matrice $2I_n - rD$ est diagonale, H est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont égales à $2 + 4r\sin^2\left(\dfrac{j\pi}{2(n+1)}\right) > 0$, $1 \leq j \leq n$.

1.2 Les valeurs propres de H sont toutes strictement positives. 0 n'est pas valeur propre et H est inversible.

Question 2.

Soit w l'endomorphisme de E représenté dans la base B par la matrice $W = H^{-1}K$.

2.1 Notons $\Delta = 2I_n - rD$. Cette matrice semblable à H est inversible et $H = P\Delta P^{-1} \Rightarrow H^{-1} = P\Delta^{-1}P^{-1}$.
Comme $K = P(2I_n + rD)P^{-1}$, $W = P\Delta^{-1}DP^{-1}$. La matrice $\Delta^{-1}D$ est diagonale, ses éléments diagonaux sont égaux à $\dfrac{2 - 4r\sin^2\left(\frac{j\pi}{2(n+1)}\right)}{2 + 4r\sin^2\left(\frac{j\pi}{2(n+1)}\right)}$.
Les vecteurs propres sont ceux de g.

Question 3.

Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, $sp(S) = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ son spectre et s l'endomorphisme de E représenté dans la base B par la matrice S.

3.1 s est un endomorphisme autoadjoint. s est diagonalisable et il existe une base orthonormale$(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ de vecteurs propres de s attachés aux valeurs propres $\sigma_1, ..., \sigma_n$.

Pour x vecteur quelconque de E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$, on a : $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$,

$s(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\sigma_i\epsilon_i$ et $(s(x)|x) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i x_i^2$.

Notons $p = \min_{1\leq i\leq n} \sigma_i$ et $q = \max_{1\leq i\leq n} \sigma_i$.

On a : $\forall x \in E, \quad p||x||^2 \leq (s(x)|x) \leq q||x||^2$.

3.2 On note : $N(S) = \sup_{||x||\leq 1} ||s(x)||$.

Si $x \in E$ est de norme 1, en l'écrivant dans la base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, on a : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$;

et $||x||^2 = 1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. $s(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\sigma_i\varepsilon_i$ donc $||s(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 \leq M^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = M^2$

où $M = \max_{1\leq i\leq n} |\sigma_i|$.

Par suite $\sup_{||x||\leq 1} ||s(x)|| \leq M$.

Mais il existe un indice j pour leque $|\sigma_j| = 1$. En prenant $x = \varepsilon_j$ vecteur de norme 1, $||s(x)|| = M \leq \sup_{||x||\leq 1} ||s(x)||$.

La double inégalité prouve que : $N(S) = \max_{1\leq j\leq n} |\sigma_j|$.

Question 4

i) Dans la question 1.1 la matrice P qui diagonalise M peut être choisie orthogonale car M est symétrique réelle (il existe une base orthonormale de vecteurs propres).
On a alors : $W = P\Delta_1 P^{-1} = P\Delta_1 {}^tP$, avec Δ_1 matrice diagonale.
${}^tW = P^t\Delta_1 {}^tP = P\Delta_1 {}^tP = W$.

ii) Soit $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. $\quad 1 - 2r\sin^2\theta < 1 + 2r\sin^2\theta$.

Comme $1 + 2r\sin^2\theta > 0$, $\quad \dfrac{1 - 2r\sin^2\theta}{1 + 2r\sin^2\theta} < 1$.

Mais $-1 - 2r\sin^2\theta < 1 - 2r\sin^2\theta$ donc $\quad -1 < \dfrac{1 - 2r\sin^2\theta}{1 + 2r\sin^2\theta}$.

Les valeurs propres de W sont de cette forme donc $N(W) < 1$.

Question 5

N est une norme de $M_n(\mathbb{R})$ subordonnée à $|| - ||$. On vérifie facilement que pour des matrices A, B quelconques, $N(AB) \leq N(A)N(B)$. Donc $N(W^k) \leq (N(W))^k$. La norme tend vers 0 et la suite tend donc vers la matrice nulle.

Fin du sujet.