e4a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP – ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B

durée 4 heures

L'usage de calculatrices est interdit

Exercice 1

R désigne l'ensemble des nombres réels et n est un entier naturel non nul.
Dans tout l'exercice, (a_n) est une suite d'éléments non nuls de **R**. On lui associe la suite (p_n) définie par : $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$. Lorsque (p_n) converge, on note p sa limite.
Lorsque (p_n) diverge vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$), on dit que (p_n) admet $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) pour limite.

Première partie

1° Donner un exemple de suite (a_n), telle que (p_n) converge vers $p = 0$.
2° Prouver que, si (p_n) converge vers p différent de 0, alors (a_n) converge vers 1.
3° On suppose dans cette question qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$a_n > 0 \ , \text{ pour } \ n > n_0 \ .$$

On pose, pour n supérieur à n_0, $q_n = \prod_{k=n_0+1}^{n} a_k$.

a) Pour n supérieur à n_0, exprimer q_n en fonction de p_n et de p_{n_0}.
b) Montrer que, si la série $\sum \ln(a_n)$ converge, alors la suite (p_n) converge et que p est non nul.
c) On suppose que la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Préciser dans chacun de ces deux cas la limite de la suite (p_n).

Dans ce qui suit, on définit u_n par : $a_n = 1 + u_n$.

Tournez la page S.V.P.

4° On suppose dans cette question que, pour tout n, on a : $u_n \geq 0$.

Démontrer que la suite (p_n) converge vers $p > 0$ si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

5° On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ converge.

a) Montrer que, si la série $\sum u_n{}^2$ converge, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

b) Montrer que, si la série $\sum u_n{}^2$ diverge, alors la suite (p_n) converge et $p = 0$.

6° Prouver que, si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

Deuxième partie

Les quatre questions qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre. On pourra les traiter en utilisant les résultats établis dans la première partie, à condition de s'y référer de manière très précise.

1° Etudier la convergence et déterminer la limite de (p_n) dans les deux cas suivants :

a) $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

b) $a_n = 1 + (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

2° On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On pose : $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{n} e^{-t^2}\,dt$. La suite (p_n) est-elle convergente ?

3° Soit (u_n) une suite de nombres réels vérifiant : $1 + u_n \neq 0$ pour $n \geq 1$. On pose :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_k) \quad , \quad v_n = \frac{u_n}{p_n} .$$

a) Pour $n > 1$, exprimer v_n en fonction de $\dfrac{1}{p_n}$ et de $\dfrac{1}{p_{n-1}}$.

b) On suppose dans cette question que la série $\sum u_n{}^2$ converge.

i) Etablir que la convergence de la série $\sum u_n$ implique la convergence de la série $\sum v_n$.

ii) La convergence de la série $\sum v_n$ implique-t-elle la convergence de la série $\sum u_n$? Justifier.

c) Déterminer une suite (u_n) telle que la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge.

4° Soit α un réel strictement positif, et $a_n = 1 + \sin\left(\frac{c}{n^\alpha}\right)$ où c est un nombre réel tel que pour tout n, a_n soit non nul.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α et c pour que (p_n) converge vers 0.

b) On suppose que : $\alpha = 1$.

Etudier la convergence de la série $\sum p_n$.

[On pourra utiliser la convergence vers un réel noté γ de la suite (t_n) où $t_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$].

Exercice 2

R désigne l'ensemble des nombres réels et n est un entier naturel, $n \geq 2$.
On introduit les notations suivantes :
$M_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $M_{n,1}(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices à n lignes, une colonne et à coefficients réels.
$GL_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbf{R})$,
$O_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbf{R})$,
$S_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbf{R})$, $S_n^+(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont toute valeur propre est positive ou nulle, $S_n^{++}(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont toute valeur propre est strictement positive,
$TS_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $M_n(\mathbf{R})$, $TS_n^{++}(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices de $TS_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.
On rappelle que $TS_n(\mathbf{R})$ est stable pour la multiplication des matrices et que si une matrice de $TS_n(\mathbf{R})$ est inversible, son inverse appartient à $TS_n(\mathbf{R})$.
Pour toute matrice M on note ${}^tM$ la transposée de M et $\det(M)$ le déterminant de M lorsque M est une matrice carrée.
E et F étant deux **R**-espaces vectoriels de dimensions finies de bases **u** et **v** respectivement et g une application linéaire de E vers F, $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(g)$ désigne la matrice de g dans les bases **u** et **v**.

1° $\mathbf{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel noté $\langle \mid \rangle$, donc si $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ sont des éléments de $\mathbf{R}^n$ on a : $\langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

$\mathbf{b} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Soit A un élément de $GL_n(\mathbf{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ tel que : $M_{\mathbf{b},\mathbf{b}}(f) = A$.

a) Pour tout i élément de $\{1, 2, ..., n\}$, on pose : $e'_i = f(e_i)$.

Prouver que $\mathbf{b}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$.

Tournez la page S.V.P.

b) Soit $\mathbf{b}'' = (e''_1, e''_2, \ldots\ldots, e''_n)$ la base orthonormale de $\mathbf{R}^n$ déduite de $\mathbf{b}'$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. On rappelle que pour tout j élément de $\{1,2,\ldots\ldots,n\}$, le sous espace vectoriel engendré par $(e'_1, e'_2, \ldots\ldots, e'_j)$ est égal au sous espace vectoriel engendré par $(e''_1, e''_2, \ldots\ldots, e''_j)$.

Etablir que pour tout j élément de $\{1,2,\ldots\ldots,n\}$ on a : $\langle e''_j | e'_j \rangle > 0$.

c) Soit Id l'application identique de $\mathbf{R}^n$. Exprimer A en fonction de $M_{\mathbf{b}'',\mathbf{b}}(Id)$ et de $M_{\mathbf{b},\mathbf{b}''}(f)$.

d) Démontrer qu'il existe U appartenant à $O_n(\mathbf{R})$ et T appartenant à $TS_n^{++}(\mathbf{R})$ tels que : $A = UT$.

e) Soit N une matrice appartenant à la fois à $O_n(\mathbf{R})$ et à $TS_n(\mathbf{R})$. Prouver que N est diagonale et que les coefficients diagonaux de N valent 1 ou -1.

En déduire l'unicité du couple (U,T) de $O_n(\mathbf{R}) \times TS_n^{++}(\mathbf{R})$ vérifiant $A = UT$.

2° Soit S une matrice de $S_n^+(\mathbf{R})$.

a) La matrice S est-elle diagonalisable ? Justifier. En déduire qu'il existe M élément de $M_n(\mathbf{R})$ tel que : $S = {}^tM\,M$.

b) On suppose que S appartient à $S_n^{++}(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe M élément de $GL_n(\mathbf{R})$ tel que : $S = {}^tM\,M$.

c) Soit M un élément de $GL_n(\mathbf{R})$ et X un élément de $M_{n,1}(\mathbf{R})$. Prouver que : ${}^tX\,{}^tM\,M\,X \geq 0$. En déduire que ${}^tM\,M$ appartient à $S_n^{++}(\mathbf{R})$.

3° Soit S une matrice de $S_n^{++}(\mathbf{R})$.

a) Déduire des questions 1° d) et 2° b) l'existence d'une matrice T de $TS_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $S = {}^tT\,T$.

b) Justifier l'unicité de cette matrice T.

c) On note s_{ij} le coefficient de S situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne de S.

i) Déduire de la question 3° a) que : $0 < \det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{ii}$.

ii) Déterminer toutes les matrices S de $S_n^{++}(\mathbf{R})$ vérifiant $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} s_{ii}$.

4° On considère M et N des éléments de $GL_n(\mathbf{R})$.

Démontrer que l'égalité ${}^tM\,M = {}^tN\,N$ est vérifiée si et seulement s'il existe V élément de $O_n(\mathbf{R})$ tel que $M = VN$.