2003 – e4a (PSI) – Maths B
corrigé – par Michel Staïner, le 29/06/2003

Exercice 1

Je note que, par hypothèse, les a_n — et donc les p_n — sont tous non nuls.

Première partie

1° Pour (a_n) constante, (p_n) est une suite géométrique : si $\forall k \in \mathbf{N} \quad a_k = 1/2$, alors $\forall n \in \mathbf{N} \quad p_n = 1/2^n$.

$$\boxed{\text{En choisissant } a_k = 1/2 \text{ pour tout } k,\ (p_n) \text{ converge vers } p = 0.}$$

2° Je suppose que (p_n) converge vers $p \neq 0$; les p_n étant non nuls, j'ai

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad a_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{p}{p} = 1.$$

$$\boxed{\text{Si } (p_n) \text{ converge vers } p \text{ différent de } 0, \text{ alors } (a_n) \text{ converge vers } 1.}$$

3° a) Soit $n > n_0$; avec les notations de l'énoncé, j'ai :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n_0} a_k \cdot \prod_{k=n_0+1}^{n} a_k = p_{n_0} \cdot q_n,$$

d'où, p_{n_0} étant non nul,

$$\boxed{\text{Pour } n > n_0,\ q_n = \frac{p_n}{p_{n_0}}.}$$

b) Je suppose que la série $\sum \ln a_n$ converge ($\ln a_n$ étant défini au moins pour $n > n_0$). Je remarque que

$$\forall n > n_0 \quad \ln q_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} \ln a_n$$

et j'en déduis que la suite $(\ln q_n)$ converge ; soit ℓ sa limite. Par continuité de la fonction exponentielle, il en résulte que la suite (q_n) converge vers e^ℓ et donc, d'après a), la suite (p_n) converge vers $p = p_{n_0} \cdot e^\ell$. Or cette dernière limite est non nulle, puisque p_{n_0} est non nul et $e^\ell > 0$.

$$\boxed{\text{Si la série } \sum \ln a_n \text{ converge, alors la suite } (p_n) \text{ converge vers un réel } p \text{ non nul.}}$$

c) Je suppose que la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln a_n$ diverge vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$). Alors, comme ci-dessus, la suite $(\ln q_n)$ admet pour limite $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) et donc la suite (q_n) admet pour limite $+\infty$ (*resp.* 0). Par conséquent :

Si la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln a_n$ diverge vers $+\infty$, alors (p_n) diverge, vers $+\infty$ si $p_{n_0} > 0$ et vers $-\infty$ si $p_{n_0} < 0$, tandis que, si la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln a_n$ diverge vers $-\infty$, alors (p_n) converge vers 0.

4° Ici, pour tout n, $u_n \geq 0$, $a_n \geq 1$ et $\ln p_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln a_k$;

– je suppose dans un premier temps que (p_n) converge vers $p > 0$. Alors, par continuité de la fonction ln, $(\ln p_n)$ converge (vers $\ln p$) et d'après la relation précédente la série $\sum \ln a_n$ converge. De plus, (a_n) converge vers 1 (*cf.* 1°), donc (u_n) converge vers 0 ; il en résulte $\ln a_n \sim u_n$. Par conséquent, les deux séries à termes positifs $\sum \ln a_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature, d'où la convergence de $\sum u_n$.

– réciproquement, je suppose que la série $\sum u_n$ converge. Alors la suite (u_n) converge vers 0, donc $\ln a_n \sim u_n$ et $\sum \ln a_n$ converge. J'en déduis que la suite $(\ln p_n)$ converge vers un réel ℓ et donc (p_n) converge vers $p = e^\ell > 0$.

En conclusion,

$$\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p > 0 \text{ si et seulement si la série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

5° Puisqu'ici $\sum u_n$ converge, en particulier (u_n) converge vers 0 et donc

$$\ln a_n = \ln(1 + u_n) = u_n + v_n \quad \text{où} \quad v_n \sim -\frac{u_n^2}{2}.$$

a) Si $\sum u_n^2$ converge, alors $\ln a_n$ apparaît comme la somme des termes généraux de deux séries convergentes, donc $\sum \ln a_n$ converge, d'où d'après 3° b) :

$$\boxed{\text{Si } \sum u_n^2 \text{ converge, alors } (p_n) \text{ converge vers } p \neq 0.}$$

b) Si maintenant $\sum u_n^2$ diverge, la suite des sommes partielles de $\sum v_n$ diverge vers $-\infty$, donc, puisque $\sum u_n$ converge, la suite des sommes partielles de $\sum \ln a_n$ diverge vers $-\infty$, d'où d'après 3° c) :

$$\boxed{\text{Si } \sum u_n^2 \text{ diverge, alors } (p_n) \text{ converge vers } p = 0.}$$

6° Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors en particulier $\sum u_n$ converge et (u_n) converge vers 0, donc $u_n^2 = o\left(|u_n|\right)$. Des théorèmes sur la comparaison des séries à termes positifs, je déduis que $\sum u_n^2$ converge. Je peux donc appliquer le résultat du 5° a) :

$$\boxed{\text{Si } \sum u_n \text{ est absolument convergente, alors } (p_n) \text{ converge vers } p \neq 0.}$$

<u>Deuxième partie</u>

1° a) Ici, $\sum \ln a_n$ diverge vers $+\infty$ (par comparaison à la série harmonique), donc le I.3° c) s'applique :

$$\boxed{\text{Pour } a_n = 1 + \frac{1}{n},\ (p_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$$

b) Ici, $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$, $u_n^2 = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$. Il est clair que $\sum u_n^2$ diverge, par comparaison à la série harmonique. Quant à $\sum u_n$, il s'agit d'une série alternée, dont la valeur absolue du terme général tend vers 0 $\left(\ln n = o\left(\sqrt{n}\right)\right)$; pour montrer que c'est en décroissant, je considère la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, qui est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^{+*}$, avec

$$\forall x > 0 \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x^{3/2}} - \frac{\ln x}{2x^{3/2}} = \frac{2 - \ln x}{2x^{3/2}}.$$

Ainsi φ décroît sur $\left[e^2, +\infty\right[$ et la série $\displaystyle\sum_{n \geq 8} u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Donc $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^2$ diverge, j'applique le I.5° b) :

$$\boxed{\text{Pour } a_n = 1 + (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}},\ (p_n) \text{ converge vers } 0.}$$

2° Ici,

$$u_n = a_n - 1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_n^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t \ ;$$

en remarquant que $1 \leq t/n$ pour tout $t \geq n$ (!), j'obtiens :

$$\forall X > n \quad \int_n^X e^{-t^2} \mathrm{d}t \leq \int_n^X \frac{t}{n} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{e^{-n^2} - e^{-X^2}}{2n}$$

d'où, en faisant tendre X vers $+\infty$,

$$|u_n| \leq \frac{e^{-n^2}}{n\sqrt{\pi}}.$$

Il en résulte, compte tenu des croissances comparées des fonctions puissances et exponentielles, que $|u_n| = o\left(1/n^2\right)$. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente, par comparaison à une série de Riemann ($2 > 1$!). Donc le I.6° s'applique :

$$\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p \text{ non nul.}}$$

3° D'après l'hypothèse, les p_n sont tous non nuls.

a) Soit $n > 1$; j'ai par définition

$$1 + u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{p_n} + v_n = \frac{1}{p_{n-1}}.$$

$$\boxed{\text{Pour } n > 1,\ v_n = \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}.}$$

J'ai donc — après l'hécatombe — pour $n > 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_n}$.

b) i) Si $\sum u_n$ converge, comme $\sum u_n^2$ converge également par hypothèse, le I.5° a) s'applique : (p_n) converge vers p non nul, donc $(1/p_n)$ converge vers $1/p$; alors d'après la relation précédente la suite des sommes partielles de $\sum v_n$ converge :

$$\boxed{\text{Si } \sum u_n \text{ converge, alors } \sum v_n \text{ converge également.}}$$

ii) Par contre, avec par exemple $u_n = 1/n$, on a vu au 1° a) que (p_n) diverge vers $+\infty$, donc $(1/p_n)$ converge vers 0 et $\sum v_n$ converge, alors que la série harmonique $\sum u_n$ diverge :

$$\boxed{\text{La convergence de } \sum v_n \text{ n'implique pas la convergence de } \sum u_n.}$$

c) Avec $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ comme au 1° b), j'ai vu que (p_n) converge vers 0 et donc $(1/p_n)$ diverge et il en est de même de $\sum v_n$ d'après la relation du a).

$$\boxed{\text{Pour } u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}},\ \sum u_n \text{ converge et } \sum v_n \text{ diverge.}}$$

4° a) Comme $\alpha > 0$, j'ai $u_n = \sin \dfrac{c}{n^\alpha} \sim \dfrac{c}{n^\alpha}$. Pour $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, par comparaison à une série de Riemann et donc (p_n) converge vers p non nul, d'après I.6°. Pour $\alpha \leq 1$, la suite des sommes partielles de $\sum 1/n^\alpha$ diverge vers $+\infty$ et donc la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ admet pour limite $\operatorname{sgn}(c) \cdot \infty$. Or les a_n sont strictement positifs à partir d'un certain rang et $\ln a_n \sim u_n$; ainsi le I.3° s'applique et (p_n) converge vers 0 si et seulement si $c < 0$. En conclusion

$$\boxed{(p_n) \text{ converge vers 0 si et seulement si } \alpha \leq 1 \text{ et } c < 0.}$$

b) Ici $\alpha = 1$; d'après ce qui précède,

$$\boxed{\text{Si } c \geq 0, \text{ alors } \sum p_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

Je suppose donc $c = -b$, où $b > 0$ et j'écris, pour $n \geq 1$:

$$\ln p_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \sin\frac{b}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[\ln\left(1 - \sin\frac{b}{k}\right) + \frac{b}{k}\right] - b\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) - b\ln n.$$

Or, grâce aux développements limités en 0 de $\ln(1-x)$ et de $\sin x$:

$$\ln\left(1 - \sin\frac{b}{k}\right) + \frac{b}{k} = -\sin\frac{b}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) + \frac{b}{k} = O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

qui est donc le terme général d'une série absolument convergente. D'après le rappel de l'énoncé, j'en déduis que la suite $(\ln p_n + b\ln n)$ converge. Soit ℓ sa limite. Par continuité de l'exponentielle, la suite $\left(p_n \cdot n^b\right)$ converge vers e^ℓ, qui est non nul, d'où

$$p_n \sim \frac{e^\ell}{n^b}.$$

Par comparaison à une série de Riemann, $\sum p_n$ converge si et seulement si $b > 1$. En conclusion :

$$\boxed{\sum p_n \text{ converge si et seulement si } c < -1.}$$

Exercice 2

1° a) Puisque A est inversible, f est un automorphisme de $\mathbf{R}^n$ et transforme donc toute base en une base, par conséquent :

$$\boxed{\mathbf{b}' \text{ est une base de } \mathbf{R}^n.}$$

b) Selon l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt, je pose $v_1 = e'_1$ et, pour tout j dans $[\![2, n]\!]$, $v_j = e'_j - p_{j-1}\left(e'_j\right)$ où p_{j-1} est la projection orthogonale sur Vect $\left(e'_1, \ldots, e'_{j-1}\right)$; j'ai alors, pour tout j dans $[\![1, n]\!]$, $e''_j = \dfrac{1}{\|v_j\|} \cdot v_j$. Je remarque que, pour $j \geq 2$:

$$\left\langle v_j | e'_j \right\rangle = \left\langle e'_j - p_{j-1}\left(e'_j\right) | e'_j \right\rangle = \left\| e'_j - p_{j-1}\left(e'_j\right) \right\|^2 \quad \text{car } \left\langle e'_j - p_{j-1}\left(e'_j\right) | p_{j-1}\left(e'_j\right) \right\rangle = 0,$$

or $e'_j \notin$ Vect $\left(e'_1, \ldots, e'_{j-1}\right)$ (une base est une famille libre), donc $e'_j \neq p_{j-1}\left(e'_j\right)$ (l'ensemble des vecteurs invariants d'un projecteur est son image), d'où

$$\left\langle e''_j | e'_j \right\rangle = \frac{1}{\|v_j\|} \left\langle v_j | e'_j \right\rangle > 0,$$

cela pour tout $j \geq 2$, mais c'est immédiat pour $j = 1$:

$$\boxed{\text{Pour tout } j \text{ dans } [\![1, n]\!],\ \left\langle e''_j | e'_j \right\rangle > 0.}$$

c) Comme $f = Id \circ f$, j'ai la relation matricielle : $M_{\mathbf{b},\mathbf{b}}(f) = M_{\mathbf{b}'',\mathbf{b}}(Id) \times M_{\mathbf{b},\mathbf{b}''}(f)$; autrement dit

$$\boxed{A = M_{\mathbf{b}'',\mathbf{b}}(Id) \times M_{\mathbf{b},\mathbf{b}''}(f).}$$

d) Puisque **b et b''** sont deux bases orthonormales, $U = M_{\mathbf{b}'',\mathbf{b}}(Id)$ est une matrice orthogonale. Par ailleurs, la j-ième colonne de $T = M_{\mathbf{b},\mathbf{b}''}(f)$ contient les coordonnées dans la base orthonormale $\mathbf{b}''$ du vecteur $f(e_j) = e'_j$, c'est-à-dire que $T = (t_{i,j})$ avec, pour tout (i,j), $t_{i,j} = \left\langle e''_i | e'_j \right\rangle$. D'après a), les éléments diagonaux de T sont strictement positifs. Enfin, pour $i > 1$, e''_i est orthogonal à Vect $\left(e''_1, \ldots, e''_{i-1}\right)$, qui n'est autre que Vect $\left(e'_1, \ldots, e'_{i-1}\right)$ par construction ; par conséquent, $i > j \Rightarrow t_{i,j} = 0$. Autrement dit T est triangulaire supérieure.

$$\boxed{\text{Il existe } U \in O_n(\mathbf{R}) \text{ et } T \in TS_n^{++}(\mathbf{R}) \text{ tels que } A = UT.}$$

e) Puisque $N \in O_n(\mathbf{R})$, N est inversible et $N^{-1} = {}^tN$, mais comme N est inversible et triangulaire supérieure, N^{-1} est également triangulaire supérieure tandis que ${}^tN$ est triangulaire inférieure. Il en résulte que ${}^tN$ — et donc N — est diagonale. Or ses vecteurs colonnes sont unitaires (puisque $N \in O_n(\mathbf{R})$), donc les éléments diagonaux valent 1 ou -1 :

$$\boxed{\text{Si } N \in O_n(\mathbf{R}) \cap TS_n(\mathbf{R}),\ N \text{ est diagonale et ses éléments diagonaux valent 1 ou } -1.}$$

Je suppose alors l'existence de deux couples (U, T) et (U', T') dans $O_n(\mathbf{R}) \cap TS_n^{++}(\mathbf{R})$ tels que $A = UT = U'T'$. Alors $N = U'^{-1}U = T^{-1}T'$ est à la fois orthogonale et triangulaire supérieure, avec des éléments diagonaux strictement positifs, comme T^{-1} et T'. Grâce au résultat précédent, j'en déduis que $N = I$ et donc $U = U'$ et $T = T'$. En conclusion

$$\boxed{\text{Le couple } (U,T) \text{ de } O_n(\mathbf{R}) \cap TS_n^{++}(\mathbf{R}) \text{ vérifiant } A = UT \text{ est unique.}}$$

2° a) S étant symétrique réelle, d'après le théorème spectral :

$$\boxed{S \text{ est diagonalisable, avec une matrice de passage orthogonale.}}$$

Soient donc $P \in O_n(\mathbf{R})$ et $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $S = P^{-1}\Delta P$; P étant orthogonale, $P^{-1} = {}^tP$ et, S étant symétrique positive, ses valeurs propres λ_j sont dans $\mathbf{R}^+$. En posant $D = \text{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$, j'ai donc $\Delta = D^2$ et $S = {}^tPDDP = {}^t(DP)(DP)$ puisque D est symétrique ! Ainsi, en posant $M = DP$:

$$\boxed{\text{Il existe } M \text{ dans } M_n(\mathbf{R}) \text{ telle que : } S = {}^tMM.}$$

b) Si de plus $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, alors S est diagonalisable avec des valeurs propres strictement positives. En particulier, S est inversible puisqu'elle n'admet pas 0 pour valeur propre. Donc une matrice M comme ci-dessus (et il en existe !) est nécessairement inversible, puisque $\det S = (\det M)^2$.

$$\boxed{\text{Il existe } M \text{ dans } GL_n(\mathbf{R}) \text{ telle que : } S = {}^tMM.}$$

c) D'après l'écriture matricielle du produit scalaire canonique : ${}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2$, donc

$$\boxed{{}^tX{}^tMMX \geq 0.}$$

Comme M est inversible, $S = {}^tMM$ est également inversible ; S est symétrique, puisque ${}^tS = {}^tM{}^t({}^tM) = S$. Enfin, si λ est une valeur propre de S et X un vecteur propre associé, ${}^tXSX = {}^tX(\lambda X) = \lambda{}^tXX = \lambda\|X\|^2$. Or cette expression est positive d'après la remarque précédente, tandis que $\|X\|^2$ est strictement positif, puisque X est non nul. Donc $\lambda \geq 0$ et même $\lambda > 0$ (puisque S est inversible), cela pour toute valeur propre de S. Finalement

$$\boxed{{}^tMM \in S_n^{++}(\mathbf{R}).}$$

3° a) D'après 2° b), je dispose de M dans $GL_n(\mathbf{R})$ telle que $S = {}^tMM$ et, d'après 1° d), je dispose de (U,T) dans $O_n(\mathbf{R}) \cap TS_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $M = UT$; alors $S = {}^t(UT)(UT) = {}^tT{}^tUUT$. Or, U est orthogonale, donc ${}^tUU = I$:

$$\boxed{\text{Il existe } T \text{ dans } TS_n^{++}(\mathbf{R}) \text{ telle que } S = {}^tTT.}$$

b) Je suppose l'existence de deux matrices T et T' de $TS_n^{++}(\mathbf{R})$ telles que $S = {}^tTT = {}^tT'T'$. Alors $T'T^{-1} = {}^tT'^{-1}{}^tT = {}^t\left(T'T^{-1}\right)^{-1}$, donc la matrice $N = T'T^{-1}$est à la fois orthogonale et triangulaire supérieure, avec des éléments diagonaux strictement positifs, j'en déduis d'après le 1° e) que $N = I$; autrement dit $T = T'$:

$$\boxed{\text{La matrice } T \text{ du a) est unique.}}$$

c) i) Par définition du produit matriciel, en notant $S = (s_{i,j})$ et $T = (t_{i,j})$, j'ai (T étant triangulaire supérieure) :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad s_{i,i} = \sum_{k=1}^{i} t_{k,i}^2 \geq t_{i,i}^2$$

d'où

$$\prod_{i=1}^{n} s_{i,i} \geq \prod_{i=1}^{n} t_{i,i}^2 = (\det T)^2 = \det S.$$

J'ai donc bien, S étant inversible :

$$\boxed{0 < \det S \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.}$$

ii) Pour avoir $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} s_{i,i} = \prod_{i=1}^{n} t_{i,i}^2$, sachant que tous les facteurs sont strictement positifs et que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad s_{i,i} \geq t_{i,i}^2,$$

il faut et il suffit que

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad s_{i,i} = \sum_{k=1}^{i} t_{k,i}^2 = t_{i,i}^2,$$

c'est-à-dire que

$$\forall i \in [\![2,n]\!] \quad \forall k \in [\![1,i-1]\!] \quad t_{k,i} = 0,$$

autrement dit que T soit une matrice diagonale. Alors $S = \operatorname{diag}\left(t_{i,i}^2\right)_{1\leq i\leq n}$ est diagonale à éléments diagonaux strictement positifs. La réciproque est banale :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les matrices } S \text{ de } S_n^{++}(\mathbf{R}) \text{ vérifiant } \det S = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} s_{i,i} \\ \text{sont les matrices diagonales à éléments diagonaux dans } \mathbf{R}^{+*}.\end{array}}$$

4° Dans un premier sens, si $M = VN$ avec $V \in O_n(\mathbf{R})$, alors

$${}^tMM = {}^tN{}^tVVN = {}^tNN \quad \text{car } {}^tVV = I.$$

Réciproquement, je suppose ${}^tMM = {}^tNN$. Alors, M et N étant inversibles,

$$MN^{-1} = {}^tM^{-1}{}^tN = {}^t\left(MN^{-1}\right)^{-1},$$

donc la matrice $V = MN^{-1}$ est orthogonale, et $M = VN$!

$$\boxed{{}^tMM = {}^tNN \text{ si et seulement s'il existe } V \text{ dans } O_n(\mathbf{R}) \text{ telle que } M = VN.}$$