

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE de MATHÉMATIQUES
CONCOURS E4A, FILIÈRE PSI, ÉPREUVE A, 2003

Partie I.

Question 1.

1.1. On vérifie que la fonction θ est de classe \mathcal{C}^1 (et de classe \mathcal{C}^2 par morceaux) sur \mathbb{R} avec $\theta' = \theta_1$ fonction impaire, 2π -périodique, telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \theta_1(x) = -2x \\ \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] & \theta_1(x) = 2(x - \pi) \end{cases}.$$

1.2. La fonction θ_1 étant impaire, on a $a_n(\theta_1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $b_n(\theta_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \theta_1(x) \sin nx \, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons :

$$\begin{aligned} b_n(\theta_1) &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2x) \sin nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi 2(x - \pi) \sin nx \, dx \right] \\ &= -\frac{4}{\pi} (1 - (-1)^n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx \\ &= -\frac{4}{\pi} (1 - (-1)^n) \left(-\frac{\pi}{2n} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Finalement, $b_{2p}(\theta_1) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et $b_{2p+1}(\theta_1) = \frac{8(-1)^{p+1}}{\pi(2p+1)^2}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

La série de Fourier de θ_1 est donc $\frac{8}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)^2} \sin(2p+1)x$.

La fonction θ_1 est continue, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, donc θ_1 est somme de sa série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta_1(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)^2} \sin(2p+1)x$$

et il y a convergence normale de cette série sur \mathbb{R} .

Question 2. La fonction θ est paire, donc $b_n(\theta) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Une intégration par parties, en tenant compte de $\theta' = \theta_1$, donne $a_n(\theta) = -\frac{1}{n} b_n(\theta_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Enfin,

$$a_0(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \theta(x) \, dx = 0$$

(on peut par exemple observer la symétrie $\theta(\pi - x) = -\theta(x)$). La série de Fourier associée à la fonction θ est donc $\frac{8}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} \cos(2p+1)x$. Comme θ est 2π -périodique, de classe

\mathcal{C}^1 , cette série converge normalement sur \mathbb{R} vers la fonction θ :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} \cos(2p+1)x.$$

m03rs1ca.tex - page 1
 La fonction Φ est la primitive de θ qui s'annule en 0 ; c'est une fonction 2π -périodique car

$a_0(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta(x) \, dx = 0$. Elle est impaire donc $a_n(\Phi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une intégration par parties donne $b_n(\Phi) = \frac{1}{n} a_n(\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la série de Fourier

de Φ est $\frac{8}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^4} \sin(2p+1)x$. Ici encore, il y a convergence normale de cette série vers la fonction Φ (Φ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}) :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^4} \sin(2p+1)x .$$

Partie 2.

(1) est une équation aux dérivées partielles, et je suppose que h est définie sur \mathbb{R}_+^* et non \mathbb{R}_- .

Question 1.

1.1. Si $\begin{cases} \forall x \in [0, \pi] & g''(x) - \mu g(x) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{R}_+^* & h'(t) - \mu h(t) = 0 \end{cases}$ alors, pour tout $(x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, t) = g''(x) h(t) = \mu g(x) h(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = g(x) h'(t) = \mu g(x) h(t) ,$$

donc la relation (1) est satisfaite sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$.

1.2. $h'(t) - \mu h(t) = 0 \iff h(t) = C e^{\mu t}$ avec $C \in \mathbb{R}$;

$$g''(x) - \mu g(x) = 0 \iff g(x) = \begin{cases} A x & + B & \text{si } \mu = 0 \\ A \cos \sqrt{-\mu} x + B \sin \sqrt{-\mu} x & \text{si } \mu < 0 \\ A e^{\sqrt{\mu} x} + B e^{-\sqrt{\mu} x} & \text{si } \mu > 0 \end{cases} .$$

1.3. On a $g_k(x) = A_k \cos kx + B_k \sin kx$ et $h_k(t) = C_k e^{-k^2 t}$, donc

$$V_k(x, t) = (A_k \cos kx + B_k \sin kx) e^{-k^2 t}$$

(la constante C_k est superflue).

Les conditions au bord (2) imposent $A_k = 0$, donc $V_k(x, t) = B_k \sin kx e^{-k^2 t}$ et cette fonction vérifie (1), (2) et (3) quel que soit le choix de la constante B_k .

Question 2.

2.1. Si on cherche H sous la forme $H(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \sin kx e^{-k^2 t}$ (somme d'une série trigonométrique supposée convergente), on a $H(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \sin kx$. La relation (4) impose

$$H(x, 0) = \Phi(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^4} \sin(2p+1)x ,$$

elle est donc vérifiée en prenant $d_k = b_k(\Phi)$, soit $d_{2p} = 0$ et $d_{2p+1} = \frac{8}{\pi} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^4}$. Il est cependant difficile, sans hypothèse supplémentaire par exemple sur le mode de convergence de la série, d'affirmer que c'est la seule solution à la question. Il est en fait exact que deux

séries trigonométriques ayant la même somme ont les mêmes coefficients, mais c'est un résultat difficile et hors programme.

2.2. Posons donc $H(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^4} \sin(2p+1)x e^{-(2p+1)^2 t}$, soit $H = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k R_k$, où les d_k sont les coefficients déterminés à la question précédente. La fonction H est bien définie sur Ω (et même sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$) et il y a convergence normale de la série définissant H puisque le terme d'indice p est majoré en valeur absolue par $\frac{8}{\pi (2p+1)^4}$.

La série $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial R_k}{\partial x}(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} \cos(2p+1)x e^{-(2p+1)^2 t}$ converge normalement sur Ω , ainsi que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial^2 R_k}{\partial x^2}(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)^2} \sin(2p+1)x e^{-(2p+1)^2 t}$, ce qui permet de dériver deux fois terme à terme par rapport à la variable x , donc

$$\forall (x, t) \in \Omega \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial^2 R_k}{\partial x^2}(x, t).$$

De même, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial R_k}{\partial t}(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)^2} \sin(2p+1)x e^{-(2p+1)^2 t}$ converge normalement sur Ω , ce qui permet de dériver terme à terme par rapport à la variable t et

$$\forall (x, t) \in \Omega \quad \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial R_k}{\partial t}(x, t).$$

Question 3. Soit la fonction $H : (x, t) \mapsto H(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^4} \sin(2p+1)x e^{-(2p+1)^2 t}$.

La fonction H est définie et continue sur $\Omega = [0, \pi] \times \mathbb{R}_+$ (et même sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ car impaire et 2π -périodique en la variable x). Les calculs faits à la question précédente montrent que H admet des dérivées partielles $\frac{\partial H}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ continues sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$, et même sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ (convergence normale des séries).

La série $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\partial^2 R_k}{\partial t^2}(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \sin(2p+1)x e^{-(2p+1)^2 t}$ converge normalement sur tout compact inclus dans l'ouvert $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, d'où l'existence d'une dérivée partielle $\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$ continue sur U . On montre de même l'existence et la continuité de dérivées partielles $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t}$ et $\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x}$, toutes deux égales à $\frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p+1} \cos(2p+1)x e^{-(2p+1)^2 t}$.

Donc H est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$. On a vérifié (question précédente) que $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial H}{\partial t}$ sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$. La vérification de (2) est immédiate. Celle de (4) est conséquence de la

question **2.1.** Pour **(3)**, majorons grossièrement : on a $(2p+1)^2 \geq 2p+1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc

$$|H(x, t)| \leq \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-(2p+1)t} = \frac{8}{\pi} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-2t}},$$

donc, pour tout $x \in [0, \pi]$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(x, t) = 0$.

Partie 3.

Question 1.

- 1.1.** $E \subset \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$, $E \neq \emptyset$ et la stabilité par combinaisons linéaires est immédiate, donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$.
- 1.2.** C'est évident : si l'ensemble \mathcal{E}_Φ des solutions du problème **(P)** est non vide (ce qui est le cas, cf. **Partie 2, question 3**), alors \mathcal{E}_Φ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ de direction E .

Question 2.

*Pour traiter les questions qui suivent, les hypothèses de l'énoncé sont insuffisantes. La fonction ω est en effet supposée continue sur le fermé $\Omega = [0, \pi] \times \mathbb{R}_+$, de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+$, ce qui d'ailleurs n'est pas conforme au programme puisqu'on n'est censé parler que de fonctions de classe \mathcal{C}^k sur un ouvert, et $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+$ n'est pas un ouvert. Mais surtout, à partir de la question **2.2.**, nous aurons besoin de l'existence d'une dérivée partielle $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ en les points de la forme $(x, 0)$ avec $x \in [0, \pi]$, ce qui n'est mentionné nulle part dans l'énoncé. En supposant de plus les fonctions $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ continues en les points $(x, 0)$, la relation **(1)** de l'énoncé se prolongera en ces points (utile pour la question **2.2.**) et le calcul intégral de la question **2.3.** sera justifié.*

- 2.1.** • Pour $t = 0$, on a $\omega(x, 0) = 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$, donc la dérivée partielle $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ est définie en ces points et vaut 0, puis $\frac{\partial}{\partial x} \left[\omega(x, 0) \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, 0) \right] = 0$, donc l'intégrale proposée est nulle.
- Pour $t > 0$, la fonction $x \mapsto \omega(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, \pi]$, d'où l'existence de l'intégrale proposée, qui vaut alors $\left[\omega(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) \right]_{x=0}^{x=\pi} = 0$ puisque $\omega(0, t) = \omega(\pi, t) = 0$.
- 2.2.** Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a, en utilisant **(1)**,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) \right) &= \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) \right)^2 + \omega(x, t) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x, t) \\ &= \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) \right)^2 + \omega(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial t}(x, t) \\ &= \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial (\omega^2)}{\partial t}(x, t), \end{aligned}$$

d'où le résultat, qui reste vrai pour $t = 0$ sous quelques hypothèses supplémentaires mentionnées plus haut.

2.3. En admettant donc la continuité des fonctions $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ et $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ en les points $(x, 0)$, les théorèmes usuels donnent la continuité sur \mathbb{R}_+ des fonctions

$$t \mapsto \int_0^\pi \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx \quad \text{et} \quad t \mapsto \int_0^\pi \omega(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial t}(x, t) dx .$$

Alors ψ est dérivable sur \mathbb{R}_+ et

$$\begin{aligned} \psi'(T) &= \int_0^\pi \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(x, T) \right)^2 dx + \int_0^\pi \omega(x, T) \frac{\partial \omega}{\partial t}(x, T) dx \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(x, T) \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\partial(\omega^2)}{\partial t}(x, T) dx \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Donc ψ est constante sur \mathbb{R}_+ , mais $\psi(0) = 0$, donc $\psi = 0$ sur \mathbb{R}_+ .

Par ailleurs, le théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_0^\pi \omega(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial t}(x, t) dx \right) dt &= \int_0^\pi \left(\int_0^T \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial t}(x, t) dt \right) dx \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} \omega^2(x, t) \right]_{t=0}^{t=T} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \omega^2(x, T) dx , \end{aligned}$$

donc $\psi(T)$ est la somme de deux termes positifs. Les deux termes sont nuls, en particulier

$$\forall T \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^\pi \omega^2(x, T) dx = 0 .$$

2.4. La fonction $x \mapsto \omega^2(x, T)$ est continue et positive sur $[0, \pi]$ et son intégrale est nulle ; elle est donc identiquement nulle. Donc $\omega = 0$ sur Ω .

2.5. Le problème **(P)** a donc une solution unique, qui est la fonction H obtenue à la **question 3.** de la **partie 2.**