

2002 – e4a (PSI) – Maths 1

corrigé – par Michel Stăiner, le 21/05/02

Préliminaire.

La série de Riemann définissant $\zeta(x)$ converge si et seulement si $x > 1$, donc

L'ensemble de définition de la fonction ζ est $]1, +\infty[$.

Partie 1.

Question 1.

1.1. Par concavité de la fonction \ln , j'ai : $\forall t > 0$, $\ln t \leq t - 1$, d'où, avec $t = 1 + \frac{x}{n}$:

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x > 0, u_n(x) \geq 0.$$

1.2. Du développement limité de $t \mapsto \ln(1+t)$ en 0, je déduis, pour $x > 0$ fixé :

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{x}{n} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{d'où} \quad u_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^2}{2n^2};$$

il en résulte, par comparaison à une série de Riemann, que la série numérique $\sum u_n(x)$ converge, cela pour tout $x > 0$, autrement dit :

La série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Question 2.

2.1. Les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $[a, b]$, avec

$$\forall x \in [a, b], u'_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \quad \text{d'où} \quad |u'_n(x)| = \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{b}{n^2}.$$

Or, la série numérique $\sum \frac{b}{n^2}$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement sur $[a, b]$; *a fortiori*, elle converge uniformément sur tout segment de $[a, b]$; comme je viens de voir que $\sum u_n$ converge simplement sur $[a, b]$, je peux appliquer le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions :

S est dérivable sur $[a, b]$ (et $S' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n$). En particulier

S est dérivable sur $[a, b]$.

2.2. Le résultat précédent est établi pour tout couple (a, b) tel que $0 < a < b$; par conséquent :

$$S \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et : } \forall x > 0, \frac{dS}{dx}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

Question 3.

Par définition des u_n , j'ai :

$$\sum_{n=1}^p u_n(1) = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^p (\ln(n+1) - \ln n) = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} - \ln(p+1)$$

d'où, puisque $\gamma = S(1)$,

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} - \ln p - \gamma = \sum_{n=1}^p u_n(1) + \ln(p+1) - \ln p - S(1) = \sum_{n=1}^p u_n(1) - S(1) + \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

qui tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, puisque $S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(1)$. Autrement dit :

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \underset{p \rightarrow \infty}{=} \ln p + \gamma + o(1).$$

Question 4.

4.1. Fixons $p \in \mathbf{N}^*$ et $x > 0$; j'ai

$$\begin{aligned} \forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_n(x+1) - u_n(x) &= \frac{x+1}{n} - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right) - \frac{x}{n} + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln(n+x+1) + \ln(n+x) \end{aligned}$$

En sommant, il reste après l'hécatombe :

$$\boxed{\sum_{n=1}^p (u_n(x+1) - u_n(x)) = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} + \ln(1+x) - \ln(p+1+x).}$$

4.2. Soit $x > 0$ fixé; j'ai pour $p \in \mathbf{N}^*$, d'après les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^p u_n(x+1) - \sum_{n=1}^p u_n(x) &\underset{p \rightarrow \infty}{=} \ln p + \gamma + o(1) + \ln(1+x) - \ln(p+1+x) \\ &\underset{p \rightarrow \infty}{=} \gamma + \ln(1+x) - \ln\left(1 + \frac{1+x}{p}\right) + o(1), \end{aligned}$$

d'où, par unicité de la limite lorsque p tend vers l'infini : $S(x+1) - S(x) = \gamma + \ln(1+x)$, autrement dit :

$$\boxed{\forall x > 0, S(x+1) = S(x) + \gamma + \ln(1+x).}$$

Question 5.

5.1. Soit $x > 0$; d'après le résultat précédent,

$$\begin{aligned} \varphi(x+1) &= \frac{1}{x+1} \exp(-\gamma(x+1) + S(x+1)) \\ &= \frac{1}{x+1} \exp(-\gamma(x+1) + S(x) + \gamma + \ln(x+1)) \\ &= \frac{1}{x+1} \exp(-\gamma x + S(x)) \exp(\ln(x+1)) \\ &= \exp(-\gamma x + S(x)), \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\forall x > 0, \varphi(x+1) = x \varphi(x).}$$

5.2. Nous avons vu que S était dérivable sur $]0, +\infty[$, donc, \exp étant dérivable sur \mathbf{R} , en vertu des théorèmes opératoires classiques :

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[.}$$

J'applique les formules de dérivation d'un produit et d'une fonction composée :

$$\forall x > 0, \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} \exp(-\gamma x + S(x)) + \frac{1}{x} (-\gamma + S'(x)) \exp(-\gamma x + S(x)),$$

soit

$$\boxed{\forall x > 0, \varphi'(x) = \left(-\frac{1}{x} - \gamma + S'(x)\right) \cdot \varphi(x).}$$

Comme $S(1) = \gamma$, j'ai $\varphi(1) = 1$; de plus, d'après **2.2.**,

$$S'(1) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{p+1} \right) = 1,$$

d'où finalement :

$$\boxed{\varphi'(1) = -\gamma.}$$

Question 6.

Soient $n \geq 1$ et $x > 0$, j'ai par définition de φ_n :

$$\begin{aligned} \ln \varphi_n(x) &= x \ln n + \sum_{k=1}^n \ln k - \ln x - \sum_{k=1}^n \ln(x+k) \\ &= x \ln n - \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \ln x \\ &= x \ln n + \sum_{k=1}^n u_n(x) - \sum_{k=1}^n \frac{x}{n} - \ln x \\ &= \sum_{k=1}^n u_n(x) - x \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) - \ln x \end{aligned}$$

D'où, par définition de S et grâce au **3.**,

$$\boxed{\forall x > 0, \ln(\varphi_n(x)) \text{ tend vers } S(x) - x\gamma - \ln x \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.}$$

Question 7.

7.1. Soient $p \in \mathbf{N}^*$ et $x > 0$; π_p est dans \mathbf{R}^{+*} et

$$\ln \pi_p = \sum_{n=1}^p \frac{x}{n} - \sum_{n=1}^p \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^p u_n(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} S(x).$$

D'où, par continuité de la fonction exp :

$$\boxed{\text{La suite } (\pi_p)_{p \geq 1} \text{ converge vers } L(x) = \exp S(x).}$$

7.2. Alors, par définition même de φ :

$$\boxed{\forall x > 0, \varphi(x) = \frac{L(x)}{x} \exp(-x\gamma).}$$

Partie 2.

Question 1.

1.1. Pour x réel, la fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, à valeurs strictement positives et

$$f_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}} \quad \text{et} \quad t^2 f_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{donc} \quad f_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Par conséquent, par comparaison aux intégrales de Riemann, f_x est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $1 - x < 1$ (c'est-à-dire $x > 0$) et f_x est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout x . Par conséquent :

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de la fonction } \Gamma \text{ est }]0, +\infty[.}$$

$$\mathbf{1.2.} \quad \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_{t=0}^{t=T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} (1 - e^{-T}) = 1 :$$

$$\boxed{\Gamma(1) = 1.}$$

1.3. Soient $x > 0$ et a, b tels que $0 < a < b$; j'intègre par parties sur le segment $[a, b]$:

$$x \int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt = [t^x e^{-t}]_{t=a}^{t=b} + \int_a^b t^x e^{-t} dt.$$

Comme $x > 0$, j'obtiens, à la limite pour $a \rightarrow 0$ et $b \rightarrow +\infty$: $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, soit :

$$\boxed{\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

Question 2.

2.1. Par concavité de la fonction \exp , j'ai : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\exp x \geq 1 + x$; d'où, avec $x = -t$:

$$\boxed{\forall t \geq 0, \exp(-t) \geq 1 - t.}$$

Soient alors $t \geq 0$ et $n \geq 1$; si $t \geq n$, $g_n(t) = 0$ et j'ai bien $0 \leq g_n(t) \leq \exp(-t)$; je suppose maintenant $0 \leq t < n$, je peux appliquer le résultat ci-dessus à t/n et j'utilise la croissance de $x \mapsto x^n$ sur \mathbf{R}^+ :

$$0 \leq 1 - \frac{t}{n} \leq \exp\left(-\frac{t}{n}\right) \quad \text{d'où} \quad 0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \exp(-t).$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \forall n \geq 1, 0 \leq g_n(t) \leq \exp(-t).}$$

2.2. Soit $x > 0$ fixé; $f_n : t \mapsto t^{x-1}g_n(t)$ est nulle sur $[n, +\infty[$, continue sur $]0, n]$, avec $f_n(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$, donc, par comparaison à une intégrale de Riemann ($1 - x < 1$), f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$, avec :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

J'applique alors le théorème de convergence dominée à la suite de fonction (f_n) , sur l'intervalle $]0, +\infty[$: les f_n sont continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, la suite (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $f : t \mapsto t^{x-1} \exp(-t)$; en effet, pour $t > 0$ fixé, j'ai $t < n$ pour n assez grand (précisément pour $n > t$) et

$$\forall n > t, f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \exp(-t)t^{x-1}$$

car

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \quad \text{et} \quad n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -t$$

f est continue sur $]0, +\infty[$, il ne reste qu'à vérifier l'hypothèse de domination. Or, d'après la question précédente, j'ai

$$\forall t > 0, \forall n \geq 1, |f_n(t)| \leq f(t),$$

qui ne dépend pas de n et enfin, d'après le 1.1., f est intégrable sur $]0, +\infty[$; le théorème de convergence dominée me permet alors de conclure que

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t) dt,$$

autrement dit :

$$\boxed{\forall x > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \Gamma(x).}$$

Question 3.

3.1. Pour tout réel x , la fonction $t \mapsto (1 - t)^n t^{x-1}$ est continue sur $]0, 1]$, à valeurs positives, équivalente à $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ au voisinage de 0, donc intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$.

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de la fonction } I_n \text{ est }]0, +\infty[.}$$

3.2. Soient $x > 0$ et $\varepsilon \in]0, 1[$; j'effectue le changement de variable $u = t/n$ sur le segment $[\varepsilon, 1]$:

$$\int_{\varepsilon}^1 (1 - u)^n u^{x-1} du = \int_{n\varepsilon}^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{t^{x-1}}{n^{x-1}} \cdot \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n^x} \int_{n\varepsilon}^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

A la limite pour ε tendant vers 0, j'obtiens :

$$\boxed{\forall x > 0, \forall n \geq 1, \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x I_n(x).}$$

3.3. De même, pour $x > 0$ et $n \geq 2$, j'intègre par parties sur $[\varepsilon, 1]$:

$$\int_{\varepsilon}^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \left[(1-t)^n \frac{t^x}{x} \right]_{t=\varepsilon}^{t=1} + \frac{n}{x} \int_{\varepsilon}^1 (1-t)^{n-1} t^x dt$$

Pour ε tendant vers 0, comme $x > 0$, j'obtiens

$$\boxed{I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1).}$$

Par une récurrence immédiate, il vient, compte tenu du fait que la relation ci-dessus reste correcte pour $n = 1$ (en étendant la définition de I_n à I_0) :

$$I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} I_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

et donc, d'après **3.2.** :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \varphi_n(x).$$

Dans la partie **1.**, on a déterminé la limite de $(\ln \varphi_n(x))$, qui donne, par continuité de la fonction exp, $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(x)$; finalement, grâce au **2.2.**, par unicité de la limite :

$$\boxed{\forall x > 0, \Gamma(x) = \varphi(x).}$$

Partie 3.

Question 1.

La fonction $h : t \mapsto \exp(-t) \ln^2 t$ est continue sur $]0, +\infty[$, à valeurs positives et, d'après les croissances comparées des fonctions usuelles, j'ai

$$h(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, h est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \exp(-t) \ln^2 t dt \text{ existe.}}$$

Question 2.

2.1. Soit $u > 1$ fixé. J'ai, pour $n \in \mathbf{N}$ et $t \in \left[u, \frac{1}{u}\right]$, $|\ln t| \leq \ln u$ et $e^{-t} \leq 1$, d'où

$$\sup_{\left[u, \frac{1}{u}\right]} |v_n| \leq \frac{x^n (\ln u)^n}{n!};$$

or la série numérique (x et u étant fixés) $\sum \frac{(x \ln u)^n}{n!}$ converge (série exponentielle, de somme $\exp(x \ln u)$). Par conséquent :

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } v_n \text{ converge normalement sur } \left[\frac{1}{u}, u\right].}$$

2.2. *A fortiori*, la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur $\left[u, \frac{1}{u}\right]$, d'où, grâce au théorème d'intégration terme à terme sur un segment :

$$\boxed{\forall u > 1, \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(u) = \int_{1/u}^u \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t) \right) dt.}$$

Question 3.

3.1. Pour tout n de \mathbf{N} , l'existence de a_n et b_n se justifie comme celle de l'intégrale du 1., et

$$a_n + b_n = \frac{x^n}{n!} \int_0^{+\infty} \exp(-t) |\ln t|^n dt$$

d'où, par linéarité de l'intégrale, pour $p \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{n=0}^p (a_n + b_n) \leq \int_0^{+\infty} \exp(-t) \sum_{n=0}^p \frac{(x |\ln t|)^n}{n!} dt.$$

Or, pour tout $t > 0$, x étant fixé, la série numérique de terme général $\frac{(x |\ln t|)^n}{n!}$ est convergente, de somme $\exp(x |\ln t|)$; comme elle est à termes positifs, ses sommes partielles sont majorées par sa somme, d'où

$$\forall t > 0 \quad \exp(-t) \sum_{n=0}^p \frac{(x |\ln t|)^n}{n!} \leq \exp(-t) \exp(x |\ln t|) = \exp(-t + x |\ln t|).$$

Pour $t \in]0, 1]$, $\exp(-t + x |\ln t|) = \exp(-t - x \ln t) = \frac{\exp(-t)}{t^x} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^x}$ et,

pour $t \geq 1$, $\exp(-t + x |\ln t|) = \exp(-t + x \ln t) = t^x \exp(-t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

J'en déduis, par comparaison aux intégrales de Riemann, que la fonction $t \mapsto \exp(-t + x |\ln t|)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, d'où finalement, par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\forall p \geq 0, \sum_{n=0}^p (a_n + b_n) \leq \int_0^{+\infty} \exp(-t + x |\ln t|) dt}$$

3.2. J'ai, pour tout $u > 1$, $|T_n(u)| \leq a_n + b_n$, d'où $\sup_{]1, +\infty[} |T_n| \leq a_n + b_n$. Or je viens de voir que la suite des sommes partielles de la série numérique de terme général $a_n + b_n$ est majorée. Comme cette série est à termes positifs, il en résulte qu'elle converge et, par conséquent :

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } T_n \text{ converge normalement sur }]1, +\infty[.}$$

Question 4.

4.1. Par définition, $\Gamma(1+x) = \int_0^{+\infty} t^x \exp(-t) dt$, où, pour tout $t > 0$: $t^x = \exp(x \ln t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (\ln t)^n}{n!}$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[, \Gamma(1+x) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \exp(-t) (\ln t)^n \right) dt.}$$

4.2. Autrement dit, d'après 2.2., $\Gamma(1+x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(u)$. Or, je viens de voir que la série de fonctions

$\sum T_n$ converge uniformément sur $]1, +\infty[$; comme par ailleurs, pour tout n , $T_n(u) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} v_n(t) dt$ (car v_n est intégrable sur $]0, +\infty[$), le théorème de la double limite s'applique : la série numérique de terme général $\int_0^{+\infty} v_n(t) dt$ converge et

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{u \rightarrow +\infty} T_n(u).$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[, \Gamma(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-t) (\ln t)^n dt \right).}$$

Question 5.

5.1. D'après les questions **2.2.** et **5.2.** de la partie **1**, j'ai

$$\varphi'(x) = \left(-\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \right) \cdot \varphi(x),$$

soit, puisque $\varphi = \Gamma$ d'après la dernière question de la partie **2** :

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dx}(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).}$$

Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, puisque j'ai $x \in]0, 1[$, j'ai $\left| -\frac{x}{n} \right| < 1$ et je connais la série géométrique de raison $-\frac{x}{n}$:

$$\frac{1}{n+x} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{n} \right)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{n} \right)^k$$

d'où

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{n^{k+1}},$$

soit, d'après le résultat précédent :

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dx}(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}} x^k \right).}$$

5.2. L'énoncé m'autorise à admettre que

$$\forall x \in]0, 1[, \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}} x^k \right) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \right),$$

soit, en réindexant et en changeant le nom de la variable :

$$\forall t \in]0, 1[, \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = -\frac{1}{t} - \gamma + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k t^{k-1} \zeta(k).$$

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$; en intégrant sur le segment $[\varepsilon, x]$, j'obtiens, sachant que Γ est à valeurs strictement positives :

$$[\ln \Gamma(t)]_{t=\varepsilon}^{t=x} = -\ln x + \ln \varepsilon - \gamma x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k).$$

L'intégration terme à terme de la série est justifiée, du fait qu'il s'agit de la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1 — car $\left| (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k} \right| \leq \frac{\zeta(2)}{2}$ pour tout $k \geq 2$ — et que l'on intègre sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence de cette série entière, où elle converge normalement. J'ai donc :

$$\ln(x\Gamma(x)) = -\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k) + \ln(\varepsilon\Gamma(\varepsilon)),$$

cela pour tout ε de $]0, 1[$; or $\varepsilon\Gamma(\varepsilon) = \Gamma(1 + \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma(1) = 1$, puisque $\Gamma = \varphi$ est continue en 1 (on a vu dans la partie **1** qu'elle était dérivable sur $]0, +\infty[$). A la limite, lorsque ε tend vers 0, j'obtiens donc

$$\ln \Gamma(1+x) = -\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k),$$

soit, en appliquant la fonction exp :

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[, \Gamma(1+x) = \exp \left(-\gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k) \right).}$$

5.3. La formule de Taylor, appliquée à la somme de la série entière évoquée ci-dessus, me donne

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\zeta(2)}{2} x^2 + o(x^2)$$

d'où

$$\Gamma(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \exp\left(-\gamma x + \frac{\zeta(2)}{2} x^2 + o(x^2)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \gamma x + \frac{\gamma^2 + \zeta(2)}{2} x^2 + o(x^2)$$

Par ailleurs, j'ai vu au **4.2.** que

$$\forall x \in]0, 1[, \Gamma(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbf{N} , \lambda_n = \int_0^{+\infty} \exp(-t) \frac{(\ln t)^n}{n!} dt.$$

Ainsi, la série entière $\sum \lambda_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1, sa fonction somme admet en 0 le développement limité $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + o(x^2)$. D'où, par unicité de ce développement limité :

$$\lambda_0 = 1 , \lambda_1 = -\gamma , \lambda_2 = \frac{\gamma^2 + \zeta(2)}{2}.$$

En particulier, sachant que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \exp(-t) \ln^2 t dt = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}.}$$