e4a 2001 – PSI – Maths 2

corrigé - par Michel Staïner, le 23/08/01

Exercice 1

1. a) G est l'isobarycentre de (A, B, C), d'où ses coordonnées :

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{3}(a+b+c) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{k}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).}$$

b) En écrivant des équations cartésiennes de deux hauteurs du triangle ABC, j'obtiens, tous calculs faits :

$$\boxed{\lambda = -\frac{k^2}{abc} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{abc}{k} \text{ ; ainsi } H \text{ appartient à } (\gamma).}$$

2. On suppose, dans cette question, que ABC est un triangle équilatéral.

a) Dans un triangle équilatéral, les médianes sont confondues avec les hauteurs, donc :

$$\boxed{G = H.}$$

b) Je pose $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$ et je calcule les fonctions symétriques élémentaires : d'après 1.a), $\sigma_1 = 3\alpha$, or $\alpha = \lambda$, puisqu'ici $G = H$, d'où $\sigma_1 = 3\lambda$; $\sigma_3 = -\dfrac{k^2}{\lambda}$ d'après 1.b). Enfin :

$$\beta = \frac{k}{3} \cdot \frac{\sigma_2}{abc} \text{ (d'après 1.a)) et } \beta = \mu = -\frac{abc}{k} = \frac{k}{\lambda} \text{ d'où } \sigma_2 = -3\frac{k^2}{\lambda^2}.$$

En conclusion,

$$\boxed{(a,b,c) \text{ est un système de racines de } P(X) = X^3 - 3\lambda X^2 - 3\frac{k^2}{\lambda^2} X + \frac{k^2}{\lambda}.}$$

c) On suppose que $H\left(\lambda, \dfrac{k}{\lambda}\right)$ n'est pas un sommet de (γ), c'est-à-dire que $\lambda^2 \neq k$. Le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC admet pour équation :

$$(x-\lambda)^2 + \left(y - \frac{k}{\lambda}\right)^2 = R^2 \quad \text{où} \quad R = HA = HB = HC.$$

Pour conserver la symétrie des rôles de a, b, c, j'écris :

$$R^2 = \frac{1}{3}\left(HA^2 + HB^2 + HC^2\right)$$

ce qui conduit, tous calculs faits et en tenant compte des relations :

$$\beta = \mu = \frac{k}{\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$$

à l'équation :

$$\mathcal{C} \ / \ (x-\lambda)^2 + \left(y - \frac{k}{\lambda}\right)^2 = 4\left(\lambda^2 + \frac{k^2}{\lambda^2}\right)$$

ou encore :

$$\mathcal{C} \ / \ x^2 - 2x\lambda + y^2 - 2y\frac{k}{\lambda} = 3\left(\lambda^2 + \frac{k^2}{\lambda^2}\right).$$

Par conséquent, les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et (γ) sont les x de $\mathbb{R}^*$ tels que :

$$x^4 - 2\lambda x^3 - 3\left(\lambda^2 + \frac{k^2}{\lambda^2}\right)x^2 - 2\frac{k^2}{\lambda}x + k^2 = 0$$

c'est-à-dire :

$$(x+\lambda)\left(x^3 - 3\lambda x^2 - \frac{3}{\lambda^2}k^2 x + \frac{k^2}{\lambda}\right) = 0.$$

On retrouve donc bien les racines a, b, c et une “quatrième” solution : $-\lambda$. C'est bien un réel non nul, reste à se convaincre qu'il est distinct de a, b et c. Or :

$$P(-\lambda) = -4\lambda^3 + 4\frac{k^2}{\lambda} = \frac{4}{\lambda}\left(k^2 - \lambda^4\right) \neq 0 \quad \text{car } \lambda^2 \neq k \text{ et } k > 0.$$

En conclusion :

$$\boxed{\mathcal{C} \cap (\gamma) = \{A, B, C, D\} \quad \text{avec} \quad D\left(-\lambda, -\frac{k}{\lambda}\right).}$$

Notons que D est le symétrique de H par rapport à O. Notons également que, lorsque H est un sommet de (γ), D n'est autre que l'autre sommet et se trouve confondu avec l'un des trois points A, B, C (puisque $P(-\lambda) = 0$!) ; $\mathcal{C}$ est alors tangent à (γ) en D.

a) $Q(0)\,Q(r) = \dfrac{k^2}{r}\left(-2r^3 - 2\dfrac{k^2}{r}\right) = -2k^2\left(r^2 + \dfrac{k^2}{r^2}\right)$. Ainsi, quel que soit le signe de r :

$$\boxed{Q(0)\,Q(r) < 0.}$$

– <u>si $r > 0$</u> : alors $\lim\limits_{-\infty} Q = -\infty$, $Q(0) > 0$, $Q(r) < 0$, $\lim\limits_{+\infty} Q = +\infty$; dans ce cas, Q s'annule au moins une fois (en vertu du théorème des valeurs intermédiaires), sur chacun des trois intervalles disjoints $]-\infty, 0[\,,]0, r[\,,]r, +\infty[$;

– <u>si $r > 0$</u> : alors $\lim\limits_{-\infty} Q = -\infty$, $Q(r) > 0$, $Q(0) < 0$, $\lim\limits_{+\infty} Q = +\infty$; dans ce cas, Q s'annule au moins une fois sur chacun des trois intervalles disjoints $]-\infty, r[\,,]r, 0[\,,]0, +\infty[$.

Ainsi, dans tous les cas :

$$\boxed{Q \text{ admet trois racines réelles deux à deux distinctes et non nulles, notées } r_1, r_2, r_3.}$$

b) D'après les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé, j'ai

$$r_1 r_2 r_3 = -\frac{k^2}{r} \ ; \ r_1 + r_2 + r_3 = 3r \ ; \ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{3}{r}.$$

La première relation montre, d'après 1.b), que l'orthocentre du triangle $R_1R_2R_3$ est le point H de coordonnées $\left(r, \dfrac{k}{r}\right)$ et les deux dernières, d'après 1.a), que son centre de gravité G n'est autre que le même point H. Il en résulte que les médianes du triangle $R_1R_2R_3$ sont confondues avec ses hauteurs et donc avec les médiatrices des côtés :

$$\boxed{\text{Le triangle } R_1R_2R_3 \text{ est équilatéral.}}$$

3. <u>*Analyse*</u> : d'après 2., si un triangle équilatéral a ses sommets A, B, C sur (γ), nécessairement il existe un point D de (γ) tel que le cercle passant par D et centré au symétrique de D par rapport à O recoupe (γ) en A, B, C (et en D, éventuellement confondu avec A, B ou C si l'un de ces points est un sommet de (γ)).

<u>*Synthèse*</u> : réciproquement, si je choisis un point $D\left(-r, -\dfrac{k}{r}\right)$ de (γ) $(r \in \mathbb{R}^*)$, je note $H\left(r, \dfrac{k}{r}\right)$ son symétrique par rapport à O, $\mathcal{C}$ le cercle de centre H passant D a pour équation :

$$(x-r)^2 + \left(y - \frac{k}{r}\right)^2 = 4r^2 + 4\frac{k^2}{r^2}$$

et (*cf.* calculs du 2.c)) les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et (γ) sont les x de $\mathbb{R}^*$ tels que :

$$(x+r)\,Q(x) = 0.$$

D'après 3., $\mathcal{C}$ recoupe bien (γ) en trois points formant un triangle équilatéral (distincts de D, sauf dans le cas où D et H sont les sommet de (γ), c'est le cas $r = \pm\sqrt{k}$).

En conclusion, on obtient tous les triangles équilatéraux dont les sommets appartiennent à (γ) en choisissant un point D de (γ), en construisant son symétrique H par rapport à O puis le cercle $\mathcal{C}$ de centre H passant par D : si D est l'un des sommets de (γ), $\mathcal{C}$ est tangent à (γ) en D et recoupe (γ) en deux autres points formant un triangle équilatéral avec D ; si D n'est pas un sommet de (γ), $\mathcal{C}$ recoupe (γ) en quatre points distincts, D et les trois sommets d'un triangle équilatéral.

<u>Exercice 2</u>

1. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$; l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et

$$t^2 f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{donc} \quad f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Ainsi, par comparaison avec une intégrale de Riemann,

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathbb{R}^{+*},\ t \mapsto f(x,t) \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[.}$$

2. a) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$; j'applique le théorème de dérivation sous le signe $\int$ sur $[a,+\infty[$ à la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f(x,t)\,\mathrm{d}t$: f est continue sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}^+$, admet une dérivée partielle par rapport à x continue sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}^+$ et je vérifie les hypothèses de domination :

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}^+ \quad |f(x,t)| \leq e^{-t^2\sqrt{a}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t^2}{2\sqrt{a}} e^{-t^2\sqrt{a}}.$$

Comme les deux fonctions – indépendantes de x – $t \mapsto e^{-t^2\sqrt{a}}$ et $t \mapsto \frac{t^2}{2\sqrt{a}} e^{-t^2\sqrt{a}}$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}^+$ (même méthode qu'au 1.), je peux conclure : F est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par la formule de Leibniz. Cela étant établi pour tout $a > 0$, j'en déduis :

$$\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } F' : x \mapsto -\frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2\sqrt{x}} \cos\frac{t^3}{3}\mathrm{d}t.}$$

b) Je fixe $x > 0$ et j'intègre par parties sur $[0,T]$, pour $T > 0$:

$$\int_0^T \left(e^{-t^2\sqrt{x}}\right)\left(t^2\cos\frac{t^3}{3}\right)\mathrm{d}t = \left[\left(e^{-t^2\sqrt{x}}\right)\left(\sin\frac{t^3}{3}\right)\right]_0^T - \int_0^T \left(-2t\sqrt{x}e^{-t^2\sqrt{x}}\right)\left(\sin\frac{t^3}{3}\right)\mathrm{d}t.$$

Faisant tendre T vers $+\infty$ (l'intégrabilité de la dernière fonction se justifie comme précédemment), j'obtiens

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-t^2\sqrt{x}}\right)\left(t^2\cos\frac{t^3}{3}\right)\mathrm{d}t = 2\sqrt{x}\int_0^{+\infty} \left(te^{-t^2\sqrt{x}}\right)\left(\sin\frac{t^3}{3}\right)\mathrm{d}t.$$

Autrement dit, d'après a) :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[\quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-t^2\sqrt{x}} \sin\left(\frac{t^3}{3}\right)\mathrm{d}t\ .}$$

En procédant avec cette expression de $F'(x)$ comme avec celle de $F(x)$ au a), j'en déduis que

$$\boxed{F \text{ est de classe } C^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } F'' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2\sqrt{x}} \sin\frac{t^3}{3}\mathrm{d}t.}$$

3. Une nouvelle intégration par parties sur $[0,T]$, $T > 0$, suivie d'un passage à la limite pour $T \to +\infty$ me fournit, pour x fixé dans $]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{x}F''(x) &= \int_0^{+\infty} \left(te^{-t^2\sqrt{x}}\right)\left(t^2\sin\frac{t^3}{3}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[\left(te^{-t^2\sqrt{x}}\right)\left(-\cos\frac{t^3}{3}\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\left(e^{-t^2\sqrt{x}} - 2t^2\sqrt{x}e^{-t^2\sqrt{x}}\right)\cos\frac{t^3}{3}\mathrm{d}t \\
&= F(x) + 4xF'(x)
\end{aligned}$$

(le crochet étant nul). Autrement dit :

$$\boxed{F \text{ est solution sur }]0,+\infty[\text{ de l'équation différentielle : } y''(x) - 2\sqrt{x}y'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}}y(x) = 0.}$$

4. Soit $x > 0$. Pour les raisons habituelles, $t \mapsto e^{-t^2\sqrt{x}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et j'obtiens, en effectuant le changement de variable $u = t.x^{1/4}$ sur le segment $[0,T]$, $T > 0$, puis en faisant tendre T vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}}\mathrm{d}t = \frac{1}{x^{1/4}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2.x^{1/4}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or cette intégrale majore $|F(x)|$ (majorer cos par 1...), d'où

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.}$$

5. a) Soit u réel :

$$|\cos u - 1| = \left|\int_0^u \sin t\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_0^u \mathrm{d}t\right| = \frac{u^2}{2}$$

Par conséquent :

$$\boxed{K = 1/2 \text{ convient.}}$$

b) L'existence de J se définit encore par la même méthode... Grâce au a), j'ai

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}} \left|\cos\left(\frac{t^3}{3}\right) - 1\right| \mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}} K \frac{t^6}{9} \mathrm{d}t = \frac{J}{18.x^{7/4}}$$

(même changement de variable qu'au a)). Or, d'après le calcul du a), pour $x > 0$:

$$\left|F(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2.x^{1/4}}\right| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}} \left(\cos\left(\frac{t^3}{3}\right) - 1\right) \mathrm{d}t\right|$$

De ces deux résultats, il découle que :

$$F(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2.x^{1/4}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{1/4}}\right)$$

Autrement dit :

$$\boxed{F(x) \text{ est équivalent à } \frac{\sqrt{\pi}}{2.x^{1/4}} \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty.}$$

Exercice 3

Première partie.

1. a) Par hypothèse, λ est valeur propre de A, d'où l'existence de Y, vecteur propre de A associé à la valeur propre λ : Y est un élément non nul de $\mathbf{F}$ tel que : $AY = \lambda Y$. Par ailleurs, B et ${}^tB$ ont même polynôme caractéristique, donc mêmes valeurs propres. λ est donc également valeur propre de ${}^tB$, d'où l'existence de Z non nul dans $\mathbf{F}$ tel que : ${}^tBZ = \lambda Z$.

$$\boxed{\text{Il existe } Y \text{ et } Z \text{ non nuls dans } \mathbf{F} \text{ tels que : } AY = \lambda Y \quad \text{et} \quad {}^tBZ = \lambda Z.}$$

b) Supposons Y, Z fixés comme ci-dessus. Si je note y_i les composantes de Y et z_j celles de Z, le produit Y^tZ est la matrice carrée $(y_iz_j)_{1\leq i,j\leq n}$: c'est un élément de $\mathbf{E}$, non nul car Y et Z sont non nuls (en choisissant i, j tels que $y_i \neq 0$ et $z_j \neq 0$, j'obtiens un élément non nul de Y^tZ).

$$\boxed{Y^tZ \text{ est un élément non nul de } \mathbf{E}.}$$

Calculons donc son image par f :

$$f\left(Y^tZ\right) = AY^tZ - Y^tZB = \lambda Y^tZ - Y^t\left({}^tBZ\right) = \lambda Y^tZ - Y^t(\lambda Z) = O$$

$$\boxed{f(Y^tZ) = O.}$$

a) Par hypothèse, $AM_0 = M_0B$. Comme $A^0M_0 = M_0B^0$, une récurrence facile permet d'obtenir :

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N} \quad A^kM_0 = M_0B^k.}$$

Puis, par combinaison linéaire des relations précédentes :

$$\boxed{\forall P \in \mathbf{C}[X] \quad P(A)M_0 = M_0P(B).}$$

b) En vertu du théorème de Cayley-Hamilton :

$$\boxed{P_A(A) = O.}$$

En choisissant $P = P_A$ dans la relation du a), j'obtiens donc $M_0P_A(B) = O$, alors que $M_0 \neq O$, donc :

$$\boxed{P_A(B) \text{ n'est pas inversible dans } \mathbf{E}.}$$

Or P_A est de la forme $\prod_{k=1}^{n}(\lambda_k - X)$ où les λ_k sont les valeurs propres de A, éventuellement répétées selon leur multiplicité. J'ai alors

$$\det P_A(B) = \prod_{k=1}^{n} \det(\lambda_k I - B)$$

et l'un au moins des facteurs est nul, puisque $P_A(B)$ n'est pas inversible : c'est dire que l'un des λ_k est valeur propre de B :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ ont au moins une valeur propre commune.}}$$

2. Au 1., nous avons vu que, si A et B ont une valeur propre commune, alors $\operatorname{Ker} f$ contient au moins un vecteur non nul, donc f est non injective, *a fortiori* non bijective. Réciproquement, si f n'est pas bijective, elle n'est pas injective (c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie) et donc, d'après 2., A et B ont une valeur propre commune. Autrement dit :

$$\boxed{f \text{ est une bijection de } \mathbf{E} \text{ sur } \mathbf{E} \text{ si et seulement si } A \text{ et } B \text{ n'ont aucune valeur propre en commun.}}$$

3. Soit $\mu \in \mathbf{C}$; μ est valeur propre de f si et seulement si $f - \mu\,\mathrm{id}$ est non injective, or $f - \mu\,\mathrm{id}$ est l'endomorphisme de $\mathbf{E}$ qui à M associe

$$(f - \mu\,\mathrm{id})(M) = AM - MB - \mu M = (A - \mu I)M - MB.$$

Le résultat précédent s'applique : $f - \mu\,\mathrm{id}$ est non injective si et seulement si $A - \mu I$ et B ont une valeur propre commune. Or

$$\operatorname{Sp}(A - \mu I) = \{\alpha - \mu,\ \alpha \in \operatorname{Sp} A\}.$$

Finalement, μ est valeur propre de f si et seulement s'il existe $\alpha \in \operatorname{Sp} A$ et $\beta \in \operatorname{Sp} B$ tels que $\alpha - \mu = \beta$. Autrement dit :

$$\boxed{\mu \text{ est une valeur propre de } f \text{ si et seulement si : } \exists(\alpha,\beta) \in \operatorname{Sp} A \times \operatorname{Sp} B \quad \mu = \alpha - \beta.}$$

Deuxième partie.

1. Pour $M = (a_{i,j})$ et $N = (b_{i,j})$, j'ai (calcul classique) :

$$\operatorname{tr}\left({}^tMN\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}\ .$$

Par conséquent, l'application $(M,N) \mapsto \langle M|N\rangle = \operatorname{tr}({}^tMN)$ est clairement bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbf{E}$. On a bien défini un produit scalaire sur $\mathbf{E}$ (c'est le produit scalaire canonique sur $\mathbf{E}$).

2. Par définition, f^* est l'unique endomorphisme de $\mathbf{E}$ vérifiant :

$$\forall (M,N) \in \mathbf{E}^2 \quad \langle f^*(M)|N\rangle = \langle M|f(N)\rangle.$$

Or, grâce aux propriétés de la trace :

$$\begin{aligned} \forall (M,N) \in \mathbf{E}^2 \quad \langle M|f(N)\rangle &= \operatorname{tr}\left({}^tMAN\right) - \operatorname{tr}\left({}^tMBN\right) \\ &= \operatorname{tr}\left({}^t\left({}^tAM\right)N\right) - \operatorname{tr}\left({}^t\left(M{}^tB\right)N\right) \\ &= \left\langle {}^tAM - M{}^tB|N\right\rangle \end{aligned}$$

Donc, par unicité, l'endomorphisme $M \mapsto {}^tAM - M{}^tB$ n'est autre que f^* :

$$\boxed{\forall M \in \mathbf{E}\ ,\ f^*(M) = {}^tAM - M{}^tB.}$$

3. a) Résultat classique... On peut l'établir en explicitant les produits matriciels DM et MD, avec $D = (d_{i,j})$ et en choisissant pour M les matrices de la base canonique de $\mathbf{E}$. On peut aussi se ramener à un autre exercice classique : soient D dans $\mathbf{E}$ commutant avec tous les M de $\mathbf{E}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à D : u commute avec tous les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Soient alors un vecteur non nul x de $\mathbb{R}^n$ et s_x une symétrie de $\mathbb{R}^n$ par rapport à $\operatorname{Vect}(x)$: par hypothèse, u commute avec s_x, donc les sous-espaces propres de s_x sont stables par u, en particulier la droite $\operatorname{Vect}(x)$. Il existe par conséquent un unique a_x dans $\mathbf{R}$ tel que $u(x) = a_x.x$, cela pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^n$; on montre enfin (classiquement, en distinguant famille liée, famille libre) que a_x ne dépend pas de x. En conclusion, comme $u(0) = 0$, il existe a dans $\mathbf{R}$ tel que $u = a\,\mathrm{id}$. Autrement dit :

$$\boxed{\text{Il existe } a \text{ dans } \mathbf{R} \text{ tel que : } D = aI.}$$

b) Si $A = B = aI$, il est clair que $f = 0$! Pour établir la réciproque, je suppose que $f = 0$, c'est-à-dire que

$$\forall M \in \mathbf{E} \quad AM = MB.$$

Nécessairement, $A = B$ (choisir $M = I$!). Le a) fournit alors a réel tel que $A = B = aI$:

$$\boxed{f = 0 \text{ si et seulement s'il existe } a \text{ dans } \mathbf{R} \text{ tel que } A = B = aI.}$$

c) D'après 2., si les matrices A et B sont symétriques, alors $f = f^*$. Pour établir la réciproque, je suppose que $f = f^*$, autrement dit que $f - f^* : M \mapsto (A - {}^tA)\,M - M\,(B - {}^tB)$ est l'application nulle ; la question précédente montre alors l'existence de a dans $\mathbf{R}$ tel que

$$A - {}^tA = B - {}^tB = aI$$

et a est nécessairement nul puisque aI doit être antisymétrique. Finalement A et B sont symétriques.

$$\boxed{f \text{ est autoadjoint si et seulement si les matrices } A \text{ et } B \text{ sont symétriques.}}$$

d) On suppose que B est une matrice orthogonale et antisymétrique : ${}^tB = B^{-1}$ et ${}^tB = -B$, d'où

$$B^2 = -I, \text{ donc } (\det B)^2 = (-1)^n\,,$$

$(-1)^n$ est positif (et même égal à 1), donc :

$$\boxed{n \text{ est un entier pair.}}$$

e) On suppose de plus que A est une matrice orthogonale et symétrique. J'évalue $f^* \circ f$:

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathbf{E} \quad f^* \circ f\,(M) &= {}^tA\,(AM - MB) - (AM - MB)\,{}^tB \\ &= {}^tAAM - AMB - AM{}^tB + MB{}^tB \\ &= 2M, \text{ compte tenu des hypothèses} \end{aligned}$$

Ainsi, $f^* \circ f = 2\,\mathrm{id}$, autrement dit :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} f \text{ est un automorphisme orthogonal de } \mathbf{E}.}$$

4. J'obtiens les colonnes de la matrice de f dans b en écrivant les images de $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ par f ... Tous calculs faits :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_b\, f = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & -b_{21} & a_{12} & 0 \\ -b_{12} & a_{11} - b_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} - b_{11} & -b_{21} \\ 0 & a_{21} & -b_{12} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}}\,.$$

Résultat du 3.b) : je vérifie bien immédiatement que $\mathrm{Mat}_b\, f$ est nulle si et seulement si A et B sont diagonale, scalaires et égales.

Résultat du 3.c) : je vérifie bien que $\mathrm{Mat}_b\, f$ est symétrique si et seulement si A et B sont symétriques et cela est encore équivalent au fait que f soit autoadjoint, car b est une base orthonormale de $\mathbf{E}$.

Résultat du 4.b) : on suppose A orthogonale et symétrique, c'est-à-dire matrice de réflexion, de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbf{R}$; et l'on suppose B orthogonale et antisymétrique, c'est-à-dire de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ (matrice de "quart de tour"). Il ne reste qu'à constater que :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Mat}_b\, f = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon & \sin\theta & 0 \\ \varepsilon & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta & -\varepsilon \\ 0 & \sin\theta & \varepsilon & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

est bien une matrice orthogonale : ses quatre vecteurs colonnes sont unitaires et orthogonaux deux à deux !