C22M

CONCOURS ENSAM - ESTP – ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

**Epreuve de Mathématiques 2**

**durée 4 heures**

---

## Exercice 1

$\boldsymbol{P}$ désigne le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2. $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ sont $n$ éléments 2 à 2 distincts de $\boldsymbol{P}$ dont les affixes respectives sont notées $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$.

$\boldsymbol{E}$ est l'ensemble des points $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$.

On note $\Gamma(\boldsymbol{E})$ l'ensemble des points $M$ de $\boldsymbol{P}$ n'appartenant pas à $\boldsymbol{E}$ et vérifiant la relation :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(MA_k)^2} \overrightarrow{MA_k} = \vec{0}.$$

1° Soit $M$ un point de $\boldsymbol{P}$, n'appartenant pas à $\boldsymbol{E}$, d'affixe $z$. Montrer qu'il appartient à $\Gamma(\boldsymbol{E})$ si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - a_k} = 0$.

2° On considère le polynôme $Q(X)$ défini par : $Q(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$. On note $Q'(X)$ son polynôme dérivé.

a) On pose : $R(X) = \dfrac{Q'(X)}{Q(X)}$. Déterminer la décomposition en éléments simples de $R(X)$ dans l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients complexes.

b) En déduire que $\Gamma(\boldsymbol{E})$ est l'ensemble des points $M$ de $\boldsymbol{P}$ dont l'affixe $z$ vérifie : $Q'(z)=0$.

c) En déduire que, si $p$ est le nombre d'éléments de $\Gamma(\boldsymbol{E})$, on a : $1 \leq p \leq n-1$.

d) Dans le cas particulier où $n = 2$, préciser $\Gamma(\boldsymbol{E})$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose $n \geq 3$.

3° Soit $r$ une rotation du plan $\boldsymbol{P}$. Etablir que : $r(\Gamma(E)) = \Gamma(r(E))$.

On rappelle que $\boldsymbol{E}$ est l'ensemble des $n$ sommets d'un polygone régulier si, et seulement si, $\boldsymbol{E}$ est invariant par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

4° Montrer que, si $\boldsymbol{E}$ est l'ensemble des $n$ sommets d'un polygone régulier, alors $\Gamma(\boldsymbol{E})$ est réduit à un seul point que l'on précisera ( on pourra faire un raisonnement par l'absurde ).

5° Réciproquement, montrer que si $\Gamma(\boldsymbol{E})$ est réduit à un seul point dont l'affixe est notée $\omega$, alors $\boldsymbol{E}$ est l'ensemble des $n$ sommets d'un polygone régulier ( on pourra commencer par déterminer $Q'(X)$ ).

6° Dans cette question , on suppose $n=3$, $a_1=\alpha+i\beta$ , $a_2=\alpha-i\beta$ , $a_3=-2\alpha$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels strictement positifs.

a) Déterminer les affixes des éléments de $\Gamma(\boldsymbol{E})$. Vérifier les résultats établis aux questions 4° et 5°.

b) On note $(x,y)$ le couple des coordonnées d'un point $M$ de $\boldsymbol{P}$.

On suppose que : $\alpha\sqrt{3}>\beta$ . Soit $(\varepsilon)$ l'ellipse de $\boldsymbol{P}$ d'équation : $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{3y^2}{\beta^2}=1$.

i) Indiquer les coordonnées des foyers de $(\varepsilon)$.

ii) Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point de $(\varepsilon)$. Déterminer l'équation de la tangente en $M_0$ à l'ellipse $(\varepsilon)$.

iii) Démontrer que l'ellipse $(\varepsilon)$ est tangente aux trois côtés du triangle $A_1A_2A_3$ en des points qui sont les milieux de ces côtés.

## Exercice 2

Soit $n$ un entier naturel, $n\geq 2$. On note $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes et E le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients complexes.

O est la matrice nulle de E. Pour $A$ élément de E, on désigne par $tr(A)$, la trace de $A$.

Pour $(i,j)$ élément de $\{1,2,\ldots,n\}^2$, on note $E_{ij}$ la matrice de E dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé dans la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne qui vaut 1.

On rappelle que : $\forall\ (i,j)\in\{1,2,\ldots,n\}^2$, $\forall\ (r,s)\in\{1,2,\ldots,n\}^2$ , $E_{ij}E_{rs}=\delta_{jr}E_{is}$

où $\delta_{jr}=1$ si $j=r$ et $\delta_{jr}=0$ sinon.

1° Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|\ \|$ définie sur E vérifiant :

$$\forall(A,B)\in\mathrm{E}^2\ ,\|AB\|=\|BA\|$$

2° Soient $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ des éléments quelconques de $\mathbf{C}$.

On considère les matrices $X$ et $Y$ suivantes :

$$X=\sum_{j=1}^{n}E_{1j}+\sum_{i=2}^{n}E_{ii}\quad,\quad Y=\sum_{r=1}^{n}\lambda_rE_{r1}\ .$$

Calculer $XY$ et $YX$.

3° Une application $q$ de E vers $[0,+\infty[$ vérifiant :

$$(\mathrm{SN}_1): \quad \forall A \in \mathrm{E},\ \forall \lambda \in \mathbf{C},\ q(\lambda A)=|\lambda|\, q(A)$$

et

$$(\mathrm{SN}_2): \quad \forall (A,B) \in \mathrm{E}^2,\ q(A+B) \leq q(A)+q(B)$$

est appelée semi-norme sur E.
Soit $q$ une semi-norme sur E.

a) Montrer que $q(\mathrm{O})=0$ et que pour tout $A$ de E, $q(-A)=q(A)$.

b) Etablir que pour $A$ et $B$ quelconques dans E on a :

$$|q(A)-q(B)| \leq q(A+B)$$

et que si $q(B)=0$ , alors $q(A+B)=q(A)$.

4° On dit qu'une semi-norme $q$ définie sur E vérifie la propriété ( P ) si :

$$\forall (A,B) \in \mathrm{E}^2,\ q(AB)=q(BA)$$

On considère l'application $f$ de E vers $[0,+\infty[$ définie par : $f(A)=|tr(A)|$ .
Montrer que $f$ est une semi-norme sur E vérifiant ( P ).
5° Soit $q$ une semi-norme sur E vérifiant ( P ).

a) Soit $i, j$ deux entiers naturels distincts et compris entre 1 et $n$.
Prouver que : $q(E_{ij})=0$.

b) Pour un élément $A$ quelconque de E, on note $a_{ij}$ le coefficient de $A$ situé dans la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne. Montrer que : $q(A)=q\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii}\right)$

c) Démontrer qu'il existe $\alpha$ réel positif tel que : $q=\alpha\, f$.

**<u>Exercice 3</u>**

$n$ désigne un entier naturel non nul.
1° Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0, et soit $(v_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels. Pour $n \geq 1$, on pose : $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ . On suppose que la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est bornée et on note $M$ un majorant de la suite $(|V_n|)_{n\geq 1}$. Pour $n \geq 1$, on pose : $T_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k$ .

a) Montrer que pour $n \geq 1$ et pour $p$ entier naturel, $p \geq 2$, on a :

$$T_{n+p} - T_n = \varepsilon_{n+p} V_{n+p} - \varepsilon_{n+1} V_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} V_k (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}).$$

b) Etablir que pour $n \geq 2$ et pour $p$ entier naturel on a : $|T_{n+p} - T_n| \leq 2M\, \varepsilon_{n+1}$.

c) En déduire que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge.

2° Soit $(c_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0.

Pour $x$ réel et $n \geq 1$, on pose : $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$ et $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sin kx$ .

a) Soit $\lambda$ un élément de $]0, \pi[$ et $I_\lambda = [\lambda, 2\pi - \lambda]$.

i) Etablir que pour tout $x$ de $]0, 2\pi[$ : $|U_n(x)| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}$ .

ii) Déduire de 1° que la suite de fonctions $(S_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $]0, 2\pi[$ et qu'elle converge uniformément sur $I_\lambda$ .

b) On suppose, dans cette question, que la suite de fonctions $(S_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$.

i) Montrer que : $\lim_{n \to +\infty} \left[ S_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) \right] = 0$ .

ii) En déduire : $\lim_{n \to +\infty} (nc_{2n}) = 0$ . Montrer alors que : $\lim_{n \to +\infty} (nc_n) = 0$ .

3° Pour $x$ réel et $n \geq 1$, on pose : $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$ .

a) Etablir pour tout $x$ réel, l'inégalité $|\sin x| \leq |x|$

et pour tout $x$ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'inégalité $\frac{2}{\pi} x \leq \sin x$ .

b) Soit $x$ un élément de $]0, \pi[$ fixé et $N$ l'entier naturel vérifiant :

$$N x \leq \pi < (N+1)\, x .$$

Montrer que : $0 \leq \sigma_N(x) \leq \pi$ .

Utiliser le résultat démontré en 1° b) pour justifier que, si $n > N$ , on a :

$$\left| \sum_{k=N+1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| \leq 2 .$$

c) Etablir que pour tout $x$ de $[0, 2\pi]$ et pour $n \geq 1$ : $|\sigma_n(x)| \leq \pi + 2$ .

d) On suppose de plus dans cette question que la suite $(nc_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et qu'elle converge vers 0. Prouver que la suite de fonctions $(S_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$.

4° On note ln la fonction logarithme népérien.

On considère le cas particulier où $c_1 = 2$ et pour $n \geq 2$, $c_n = \frac{1}{n \ln(n)}$ .

a) Prouver que la suite de fonctions $(S_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur **R**. On note $S$ sa limite .

b) Déterminer les coefficients de Fourier de $S$.