E4A PSI 2000 épreuve 2

Exercice 1

1. La condition d'appartenance de $M(z)$ à $\Gamma(E)$ s'écrit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{|z-a_k|^2}=0$, soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{z-a_k}}=0$, ce qui est équivalent à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-a_k}=0$.

2.a. On a $Q'(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\prod_{j\neq i}(X-a_j)\Big)$. On en déduit que $\dfrac{Q'(X)}{Q(X)}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-a_k}$, ce qui est la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{Q'}{Q}$.

b. $M\in\Gamma(E) \iff R(z)=0 \iff Q'(z)=0$.

c. Le polynôme Q', de degré $n-1$, a au plus $n-1$ racines. De plus, il est scindé sur $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauss), donc a au moins une racine. Finalement, $1\leq \operatorname{Card}\big(\Gamma(E)\big)\leq n-1$.

d. Si $E=\{a_1,a_2\}$, alors $Q(X)=(X-a_1)(X-a_2)$, $Q'(X)=2X-(a_1+a_2)$, donc $\Gamma(E)=\{I\}$, où I est le milieu du segment $[AB]$.

3. Soit r une rotation affine du plan P, notons ρ la rotation vectorielle associée, caractérisée par $\rho(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{r(A)\,r(B)}$. Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, posons $A'_k=r(A_k)$, ainsi $r(E)=\{A'_1,\cdots,A'_n\}$.

Soit M' un point du plan P, soit $M=r^{-1}(M')$; alors, r étant une isométrie, on a $M'A'_k=MA_k$. En utilisant successivement la linéarité et l'injectivité de ρ, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
M'\in\Gamma\big(r(E)\big) &\iff \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{{M'A'_k}^2}\,\overrightarrow{M'A'_k}=\overrightarrow{0}\\
&\iff \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{MA_k^2}\,\rho(\overrightarrow{MA_k})=\overrightarrow{0}\\
&\iff \rho\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{MA_k^2}\overrightarrow{MA_k}\Big)=\overrightarrow{0}\\
&\iff \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{MA_k^2}\overrightarrow{MA_k}=\overrightarrow{0}\\
&\iff M\in\Gamma(E)\\
&\iff M'\in r\big(\Gamma(E)\big)\ .
\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que $r\big(\Gamma(E)\big)=\Gamma\big(r(E)\big)$.

4. Si $E=\{A_1,\cdots,A_n\}$ est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier de centre Ω, alors $\Omega\in\Gamma(E)$ puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\Omega A_k}=\overrightarrow{0}$ et que les distances ΩA_k sont toutes égales. Par ailleurs, si r est la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$, alors $r(E)=E$, donc $r\big(\Gamma(E)\big)=\Gamma\big(r(E)\big)=\Gamma(E)$. Si $\Gamma(E)$ contenait un autre point M, il contiendrait donc aussi les images itérées de M par r, soit n points distincts M, $r(M)$, $\cdots$, $r^{n-1}(M)$. On aurait alors $\operatorname{Card}\big(\Gamma(E)\big)\geq n+1$, ce qui est impossible d'après **2.c.**

5. Supposons $\Gamma(E) = \{\Omega\}$ avec Ω d'affixe ω. Le polynôme Q' est la dérivée d'un polynôme normalisé de degré n, il a donc pour terme dominant nX^{n-1} ; par ailleurs, sa seule racine dans $\mathbb{C}$ est ω, donc $Q'(X) = n(X-\omega)^{n-1}$.

On en déduit que le polynôme Q est de la forme $Q(X) = (X-\omega)^n + C$, où $C \in \mathbb{C}$. Soit M un point d'affixe z, soit $M' = r(M)$ son image par la rotation r de centre Ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$: l'affixe de M' est $z' = \omega + e^{i\frac{2\pi}{n}}(z-\omega)$. On remarque que $(z'-\omega)^n = (z-\omega)^n$ donc $Q(z') = Q(z)$ et, les racines du polynôme Q étant exactement les affixes des points de E, $M \in E \iff r(M) \in E$. L'ensemble E est donc invariant par une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$: c'est l'ensemble des n sommets d'un polygone régulier.

6.a. Ici, E est l'ensemble des trois sommets d'un triangle isocèle de sommet principal A_3. On a $Q(X) = \left[(X-\alpha)^2 + \beta^2\right](X+2\alpha)$, d'où $Q'(X) = 3X^2 - 3\alpha^2 + \beta^2$, d'où la discussion :

- si $\beta < \alpha\sqrt{3}$, alors $\Gamma(E)$ est constitué des deux points de l'axe Ox d'affixes $\pm\sqrt{\alpha^2 - \dfrac{\beta^2}{3}}$;
- si $\beta = \alpha\sqrt{3}$, alors $\Gamma(E) = \{O\}$;
- si $\beta > \alpha\sqrt{3}$, alors $\Gamma(E)$ est constitué des deux points de l'axe Oy d'affixes $\pm i\sqrt{\dfrac{\beta^2}{3} - \alpha^2}$.

On constate sur cet exemple que $\Gamma(E)$ est réduit à un point dans le seul cas où le triangle $A_1A_2A_3$ est équilatéral.

b.i) L'ellipse (ε) a pour axe focal Ox, son demi-grand axe est $a = \alpha$, son demi-petit axe est $b = \dfrac{\beta}{\sqrt{3}}$, la demi-distance focale est $c = OF = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{\alpha^2 - \dfrac{\beta^2}{3}}$. Les foyers de (ε) sont donc exactement les deux points appartenant à $\Gamma(E)$.

ii) Un vecteur normal à (ε) en M_0 est $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi(x_0,y_0)$ en notant $\varphi : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{3y^2}{\beta^2}$, soit $\vec{n}\left(\dfrac{x_0}{\alpha^2}, \dfrac{3y_0}{\beta^2}\right)$. L'équation de la tangente en M_0 à (ε) est alors $\dfrac{x_0}{\alpha^2}(x-x_0) + \dfrac{3y_0}{\beta^2}(y-y_0) = 0$ ce qui, en tenant compte de $\dfrac{x_0^2}{\alpha^2} + \dfrac{3y_0^2}{\beta^2} = 1$, donne

$$\frac{x_0\,x}{\alpha^2} + \frac{3y_0\,y}{\beta^2} - 1 = 0\,.$$

iii) • Le milieu M_3 du côté $[A_1A_2]$ a pour affixe α, c'est aussi un des sommets de l'ellipse (ε) ; en ce point, la tangente à (ε) est dirigée selon Oy, c'est bien la droite (A_1A_2).

• Le milieu M_2 du côté $[A_1A_3]$ a pour affixe $z_2 = -\dfrac{\alpha}{2} + i\dfrac{\beta}{2}$. On vérifie (immédiat) que $M_2 \in (\varepsilon)$. La tangente $(\mathcal{T})$ à (ε) en M_2 a pour équation $-\dfrac{x}{2\alpha} + \dfrac{3y}{2\beta} - 1 = 0$. On vérifie que $A_1 \in (\mathcal{T})$, $A_3 \in (\mathcal{T})$, donc $(\mathcal{T}) = (A_1A_3)$.

• Par symétrie d'axe Ox, le milieu M_3 de $[A_1A_2]$ appartient à (ε) et la tangente à (ε) en ce point est (A_1A_2).

Exercice 2

1. En choisissant des matrices élémentaires, par exemple $A = E_{11}$ et $B = E_{12}$, on a $AB = E_{12} \neq 0$ tandis que $BA = 0$. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur E, l'axiome de séparation entraîne $\|AB\| \neq 0$ et $\|BA\| = 0$.

2. On a $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & (0) \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. En jouant aux dominos avec les matrices élémentaires, on obtient

$$XY = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big) E_{11} + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \, E_{j1} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$YX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (E_{i1} + E_{i2} + \cdots + E_{in}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & \lambda_n & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

3.a. Avec (SN_1), $q(0_E) = q(0\cdot 0_E) = |0|\cdot q(0_E) = 0$ et $q(-A) = q\big((-1)\cdot A\big) = |-1|\cdot q(A) = q(A)$.

b. On a $q(A) = q\big((A+B) - B\big) \leq q(A+B) + q(-B) = q(A+B) + q(B)$, d'où l'on déduit **(1)** : $q(A) - q(B) \leq q(A+B)$. En échangeant les rôles de A et B, on obtient **(2)** : $q(B) - q(A) \leq q(A+B)$. La conjonction des inégalités **(1)** et **(2)** donne enfin $\big|q(A) - q(B)\big| \leq q(A+B)$.
Si $q(B) = 0$, alors $q(A) = |q(A)| = |q(A) - q(B)| \leq q(A+B) \leq q(A) + q(B) = q(A)$, donc $q(A+B) = q(A)$.

4. On sait que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, d'où la propriété (P). Par ailleurs, f est à valeurs réelles positives, on a $f(\lambda A) = |\,\mathrm{tr}(\lambda A)| = |\lambda\ \mathrm{tr}(A)| = |\lambda|\, f(A)$ et enfin,

$$f(A+B) = |\,\mathrm{tr}(A+B)| = |\,\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)| \leq |\,\mathrm{tr}(A)| + |\,\mathrm{tr}(B)| = f(A) + f(B) ,$$

donc f est une semi-norme sur E.

5.a. Si $i \neq j$, alors $q(E_{ij}) = q(E_{ii}\, E_{ij}) = q(E_{ij}\, E_{ii}) = q(0) = 0$.

b. De la question **3.b.**, on déduit que, si q est une semi-norme sur E, alors l'ensemble $F = q^{-1}\big(\{0\}\big) = \{A \in E \mid q(A) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E. Dans le cas qui nous intéresse présentement, ce sous-espace F contient toutes les matrices E_{ij} avec $i \neq j$, donc contient les combinaisons linéaires de ces matrices. Si $A \in E$, posons alors $A = B + C$ avec $B = \displaystyle\sum_{i \neq j} a_{ij} E_{ij}$ et $C = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii}$. Comme $B \in F$, on a $q(B) = 0$ donc $q(A) = q(C+B) = q(C)$, ce qu'il fallait prouver. Il en résulte que deux matrices qui ont les mêmes coefficients diagonaux ont la même image par q.

c. Soit $A = (a_{ij}) \in E$. Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{22} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & a_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \, \Big(\sum_{j=1}^{n} E_{ij} \Big) \,.$$

Les matrices A et M ont les mêmes coefficients diagonaux, donc $q(A) = q(M)$. Mais, avec les notations de la question **2.** en posant $\lambda_i = a_{ii}$, on a aussi $M = YX$, donc $q(M) = q(YX) = q(XY)$. Or, $XY = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(A) & 0 & \cdots & 0 \\ a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, donc $q(XY) = q\big((\mathrm{tr}\, A)\, E_{11}\big)$ puisque ces deux matrices ont les mêmes coefficients diagonaux. Finalement,

$$q(A) = q(M) = q(YX) = q(XY) = q\big((\mathrm{tr}\, A)\, E_{11}\big) = q(E_{11}) \cdot |\,\mathrm{tr}(A)| \,.$$

Ceci étant valable pour toute matrice A, on a $q = \alpha\, f$, avec $\alpha = q(E_{11})$.

Exercice 3

1.a. Pour $k \geq 2$, on a $v_k = V_k - V_{k-1}$, ce qui permet de faire les manipulations suivantes (appelées **transformation d'Abel**) :

$$\begin{aligned} T_{n+p} - T_n &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k\, v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k\, (V_k - V_{k-1}) \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k\, V_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k\, V_{k-1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k\, V_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} \varepsilon_{k+1}\, V_k \\ &= \varepsilon_{n+p}\, V_{n+p} - \varepsilon_{n+1}\, V_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} V_k\, (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) \,. \end{aligned}$$

b. Si $p \geq 2$, de la question précédente et de l'inégalité triangulaire, on déduit

$$\begin{aligned} |T_{n+p} - T_n| &\leq \varepsilon_{n+p}\, |V_{n+p}| + \varepsilon_{n+1}\, |V_n| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})\, |V_k| \\ &\leq M\, \Big(\varepsilon_{n+p} + \varepsilon_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})\Big) \\ &= M\, \big(\varepsilon_{n+p} + \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+p}\big) \quad = \quad 2\, M\, \varepsilon_{n+1} \end{aligned}$$

(on a tenu compte des conditions $\varepsilon_k \geq 0$ et $\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} \geq 0$ qui résultent des hypothèses de l'énoncé). La majoration demandée est par ailleurs évidemment vraie pour $p = 0$, et facile pour $p = 1$ puisque

$$|T_{n+1} - T_n| = \varepsilon_{n+1}\,|v_{n+1}| = \varepsilon_{n+1}\,|V_{n+1} - V_n| \leq \varepsilon_{n+1}\,\big(|V_{n+1}| + |V_n|\big) \leq 2M\varepsilon_{n+1}\ .$$

c. La suite (T_n) est de Cauchy : en effet, donnons-nous $\alpha > 0$. Comme la suite (ε_n) tend vers zéro, il existe un entier $N \geq 2$ tel que $n \geq N \Longrightarrow 0 \leq \varepsilon_n \leq \dfrac{\alpha}{2M}$. Si q et n sont deux entiers naturels tels que $q \geq n \geq N$, on pose alors $q = n + p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et la question précédente donne alors

$$|T_q - T_n| \leq 2M\,\varepsilon_{n+1} \leq 2M\,\varepsilon_{N+1} \leq \alpha\ .$$

La suite réelle (T_n) est donc convergente, ce qui signifie que la série $\displaystyle\sum_k \varepsilon_k\,v_k$ converge.

2.a.i) On a $U_n(x) = \mathrm{Im}\,V_n(x)$, avec (somme partielle d'une série géométrique) :

$$V_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{ix})^k = e^{ix}\,\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}\ .$$

Donc $|U_n(x)| = |\,\mathrm{Im}\,V_n(x)| \leq |V_n(x)| = \dfrac{|1 - e^{inx}|}{|1 - e^{ix}|} \leq \dfrac{2}{|1 - e^{ix}|}$, mais

$$1 - e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}}\,\Big(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\Big) = e^{i\frac{x}{2}}\,\Big(-2i\,\sin\frac{x}{2}\Big)\ ,$$

donc $|1 - e^{ix}| = 2\,\sin\dfrac{x}{2}$ puisqu'ici, $\sin\dfrac{x}{2}$ est positif.

ii) • Pour la convergence simple, fixons $x \in]0, 2\pi[$; on a $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k\,v_k$, la suite (c_n) est décroissante de limite zéro, et la suite (v_n) définie par $v_n = \sin nx$ vérifie les hypothèses de la question **1.**, à savoir que la suite $\big(U_n(x)\big)_{n\geq1}$ de ses sommes partielles est bornée d'après la question précédente. On a ainsi montré la convergence de la suite numérique $\big(S_n(x)\big)_{n\geq1}$ pour tout $x \in]0, 2\pi[$, c'est-à-dire la convergence simple sur cet intervalle de la suite de fonctions (S_n), ou encore de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq1} f_k$ en posant $f_k(x) = c_k\,\sin kx$.

• Fixons maintenant $\lambda \in]0, \pi[$ et plaçons-nous sur le segment $I_\lambda = [\lambda, 2\pi - \lambda]$. Remarquons d'abord que, pour $x \in I_\lambda$, on a $0 < \sin\dfrac{\lambda}{2} \leq \sin\dfrac{x}{2}$. De la question **1.b.**, on déduit la majoration

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I_\lambda \qquad |S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq \frac{2}{\sin\frac{x}{2}}\,c_{n+1} \leq \frac{2}{\sin\frac{\lambda}{2}}\,c_{n+1}\ .$$

On sait déjà que la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur I_λ vers une fonction S, on peut donc passer à la limite ($p \to +\infty$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I_\lambda$ fixés) et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in I_\lambda \qquad |S(x) - S_n(x)| \leq \frac{2}{\sin\frac{\lambda}{2}}\,c_{n+1}\ ,$$

d'où $\|S - S_n\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in I_\lambda}|S(x) - S_n(x)|$ tend vers zéro, ce qui traduit la convergence uniforme de la suite de fonctions (S_n), ou de la série de fonctions $\sum f_k$, sur le segment I_λ. *Cette suite de fonctions converge donc uniformément sur tout segment de l'intervalle ouvert* $]0, 2\pi[$.

b.i) Notons S la fonction limite (supposée uniforme) de la suite de fonctions (S_n) sur $[0,2\pi]$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|S-S_n\|_\infty = 0$. Si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour $n \geq N$, on ait $\|S-S_n\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, c'est-à-dire tel que

$$n \geq N \Longrightarrow \forall x \in [0,2\pi] \quad |S(x)-S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Si $n \geq N$, a fortiori $2n \geq N$, donc $\left|S\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)-S_n\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\left|S\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)-S_{2n}\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. De l'inégalité triangulaire, on tire alors $\left|S_{2n}\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)-S_n\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)\right| \leq \varepsilon$. On a ainsi prouvé que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[S_{2n}\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)-S_n\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)\right] = 0$.

ii) On a $S_{2n}\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)-S_n\left(\dfrac{\pi}{4n}\right) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$ mais, pour $k \in [\![n+1,2n]\!]$, on a $c_k \geq c_{2n} \geq 0$ et $\dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{k\pi}{4n} \leq \dfrac{\pi}{2}$, donc $\sin\left(\dfrac{k\pi}{4n}\right) \geq \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, puis

$$S_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right)-S_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) \geq n\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,c_{2n} \geq 0\ .$$

Le théorème d'encadrement gendarmesque donne alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,c_{2n} = 0$.
De $0 \leq c_{2n+1} \leq c_{2n}$, on déduit que l'on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,c_{2n+1} = 0$. Il est immédiat d'en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\,c_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)\,c_{2n+1} = 0$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} nc_n = 0$ puisque les termes pairs et les termes impairs tendent tous deux vers zéro.

3.a. Faire une étude de la fonction $x \mapsto x - \sin x$ pour montrer qu'elle est positive sur $\mathbb{R}_+$. Un argument de parité donne alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sin x| \leq |x|\ .$$

La concavité de la fonction sinus sur le segment $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ donne l'inégalité $\dfrac{2}{\pi}\,x \leq \sin x$ sur cet intervalle (*la courbe est au-dessus de sa corde*).

b. Notons que l'entier N de l'énoncé est la partie entière du réel $\dfrac{\pi}{x}$.

• On va montrer un peu mieux que ce qui est demandé, à savoir que l'on a $0 \leq \sigma_n(x) \leq \pi$ pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq N$. En effet, pour $k \in [\![1,N]\!]$, on a $0 \leq kx \leq Nx \leq \pi$, donc $\sin kx \geq 0$: le réel $\sigma_n(x)$ est une somme de termes positifs, donc $\sigma_n(x) \geq 0$. De plus, $\sin kx \leq kx$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ donc, en sommant, on a $\sigma_n(x) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{kx}{k} = nx \leq Nx \leq \pi$.

• Le réel $x \in]0,\pi[$ étant toujours fixé, on sait que $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = |U_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ d'après la question **2.a.i)**. De la question **1.b.**, on tire alors la majoration

$\left|\displaystyle\sum_{k=N+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leq\frac{2}{(N+1)\,\sin\frac{x}{2}}$. Or, $\dfrac{x}{2}$ est dans l'intervalle $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $\sin\dfrac{x}{2}\geq\dfrac{x}{\pi}$, puis

$$\left|\sum_{k=N+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leq\frac{2}{(N+1)\,\dfrac{x}{\pi}}=\frac{2\pi}{(N+1)x}\leq 2$$

car $\pi\leq(N+1)x$ par définition de l'entier N.

c. Il y a différents cas à étudier, commençons par les plus simples :

- si $x\in\{0,\pi,2\pi\}$, alors $\sigma_n(x)=0$ pour tout entier n ...
- si $x\in\,]0,\pi[$, posons $N=E\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ comme à la question précédente :
  - ▷ si $1\leq n\leq N$, on a vu que $0\leq\sigma_n(x)\leq\pi$, ce qui est suffisant ;
  - ▷ si $n>N$, on écrit $\sigma_n(x)=\sigma_N(x)+\displaystyle\sum_{k=N+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$; la question précédente et l'inégalité triangulaire permettent de conclure.
- si $x\in\,]\pi,2\pi[$, posons $y=2\pi-x$; on a $y\in\,]0,\pi[$, donc $|\sigma_n(y)|\leq\pi+2$ par ce qui précède, et enfin $\sigma_n(x)=-\sigma_n(y)$ d'où la conclusion.

d. Écrivons $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k\,c_k)\,\frac{\sin kx}{k}$. Pour $x\in[0,2\pi]$ fixé, la question **1.c.** assure la convergence de la suite numérique $\Big(S_n(x)\Big)_{n\geq1}$ vers un réel $S(x)$, puisque la suite $(n\,c_n)$ converge vers zéro en décroissant, et que la suite de terme général $\sigma_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$ est bornée (valeur absolue majorée par $\pi+2$). On a ainsi prouvé la convergence simple de la suite de fonctions (S_n) sur $[0,2\pi]$.

La question **1.b.** donne plus précisément la majoration

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad\forall p\in\mathbb{N}\quad\forall x\in[0,2\pi]\qquad|S_{n+p}(x)-S_n(x)|\leq 2(\pi+2)\,(n+1)\,c_{n+1}\ .$$

Comme en **2.a.ii)**, on passe à la limite ($p\to+\infty$, n et x fixés) et on déduit

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad\forall x\in[0,2\pi]\qquad|S(x)-S_n(x)|\leq 2(\pi+2)\,(n+1)\,c_{n+1}\ ,$$

ce qui assure la convergence uniforme de la suite de fonctions (S_n), ou de la série de fonctions $\displaystyle\sum_k f_k$, sur $[0,2\pi]$ puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n+1)\,c_{n+1}=0$.

4.a. La suite (c_n) est décroissante et tend vers zéro, donc (question **2.a.ii**) la suite de fonctions (S_n), avec $S_n(x)=2\,\sin x+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{\sin kx}{k\,\ln k}$, converge simplement sur $]0,2\pi[$, uniformément sur tout segment inclus dans $]0,2\pi[$. La suite $(n\,c_n)$ est aussi décroissante et tend vers zéro, donc (question **3.d.**) il y a convergence uniforme sur $[0,2\pi]$, puis convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ par périodicité. Posons $S(x)=2\,\sin x+\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n\,\ln n}$.

b. La fonction somme S est continue (comme somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément) sur $\mathbb{R}$, et 2π-périodique. Elle est impaire, les coefficients de Fourier a_n $(n \in \mathbb{N})$ sont donc nuls. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi S(x)\ \sin nx\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Big(2\ \sin x + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k\ \ln k}\Big)\ \sin nx\ \mathrm{d}x\ .$$

La convergence uniforme de la série de fonctions sur le segment $[0, \pi]$ permet d'intégrer terme à terme (interversion série-intégrale), ce qui donne

$$b_n = \frac{2}{\pi} \Big(2 \int_0^\pi \sin x\ \sin nx\ \mathrm{d}x + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\ \ln k} \int_0^\pi \sin kx\ \sin nx\ \mathrm{d}x\Big)\ .$$

Les propriétés d'orthogonalité des fonctions $x \mapsto \sin kx$ dans l'espace préhilbertien $\mathcal{C}\big([0, \pi]\big)$ donnent $b_1 = 2$ et $b_n = \dfrac{1}{n\ \ln n}$ pour $n \geq 2$, soit $b_n = c_n$.