



Concours ENSAM - ESTP - ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1

durée 4 heures

Notations:

n et q sont des entiers naturels donnés.

$\mathcal{M}(n, q)$ désigne l'ensemble des matrices réelles ou complexes à n lignes et q colonnes.

I désigne un intervalle ouvert de \mathbb{R} et s un élément de I . Le réel 0 est supposé appartenir à l'intervalle I .

Une fonction matricielle de type (n, q) définie sur I est une application M de I vers $\mathcal{M}(n, q)$, $M = [m_{ij}]$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq q$) où, pour tout i de 1 à n et pour tout j de 1 à q , m_{ij} est une application de I vers \mathbb{R} qui au réel t associe le réel $m_{ij}(t)$.

Soient $M = [m_{ij}]$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq q$) et $L = [l_{ij}]$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq q$) deux fonctions matricielles de type (n, q) définies sur I . La notation $M = L$ signifie que pour tout i de 1 à n et pour tout j de 1 à q , $m_{ij} = l_{ij}$ (égalité entre deux applications de I vers \mathbb{R}).

La fonction matricielle M de type (n, q) définie sur I est continue en s (respectivement dérivable ou de classe C^k en s) si chaque fonction réelle m_{ij} ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq q$) est continue en s (respectivement dérivable ou de classe C^k en s) et la fonction matricielle dérivée est définie en s par :

$$\frac{dM}{dt}(s) = \left[\frac{dm_{ij}(s)}{dt} \right], \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq q$$

et de même pour les dérivées d'ordre supérieur si elles existent .

La fonction matricielle M de type (n, q) définie sur I est continue sur I (respectivement dérivable ou de classe C^k sur I) si elle est continue (respectivement dérivable ou de classe C^k) en tout point de I .

L'intégrale définie de la fonction matricielle M continue sur I , entre les bornes α et β de I est la matrice réelle à n lignes et q colonnes définie par :

$$\int_{\alpha}^{\beta} M(u) du = \left[\int_{\alpha}^{\beta} m_{ij}(u) du \right], \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq q$$

Première partie :

Le produit de deux matrices M_1 et M_2 de $\mathcal{M}(n, n)$ est noté $M_1 \cdot M_2$.

Question 1 : α et β désignent deux éléments de I tels que $\alpha < \beta$ et C est une matrice de $\mathcal{M}(n, n)$. La fonction matricielle M de type (n, n) étant supposée continue sur I , montrer que :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (C \cdot M)(u) du = C \cdot \int_{\alpha}^{\beta} M(u) du$$

Question 2 :

Soient $F = [f_{ij}]$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$) et $G = [g_{ij}]$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$) deux fonctions matricielles dérivables de type (n, n) définies sur I . Montrer que le produit matriciel $F \cdot G$ définit une nouvelle fonction matricielle dérivable de type (n, n) sur I et que

$$\frac{d(F \cdot G)}{dt} = \frac{dF}{dt} \cdot G + F \cdot \frac{dG}{dt}$$

Question 3 :

s désigne un élément de I .

Soit $H = [h_{ij}]$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$) une fonction matricielle dérivable de type (n, n) définie sur I et telle que la matrice $H(s)$ soit inversible, d'inverse $H^{-1}(s)$. Montrer que la fonction matricielle H^{-1} est définie et dérivable sur un voisinage V de s et vérifie :

$$\forall u \in V, \quad \frac{d(H^{-1})}{dt}(u) = -H^{-1}(u) \cdot \frac{dH}{dt}(u) \cdot H^{-1}(u)$$

Seconde Partie :

I_n désigne la matrice identité d'ordre n . Soit A une matrice réelle à n lignes et n colonnes admettant les valeurs propres (réelles ou complexes) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, chacune apparaissant avec son ordre de multiplicité. Les matrices A_0, A_1, \dots, A_n sont définies par :

$$A_0 = I_n \quad \text{et} \quad A_k = A_{k-1} \cdot (A - \lambda_k \cdot I_n) \quad , \quad 1 \leq k \leq n$$

r_1, r_2, \dots, r_n désignent les applications de I dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) définies par :

$$\frac{dr_1}{dt}(t) = \lambda_1 \cdot r_1(t) \quad \text{et} \quad r_1(0) = 1$$

$$\frac{dr_k}{dt}(t) = \lambda_k \cdot r_k(t) + r_{k-1}(t) \quad \text{et} \quad r_k(0) = 0 \quad , \quad 2 \leq k \leq n$$

Soit M la fonction matricielle de type (n, n) définie sur I par :

$$\forall t \in I, \quad M(t) = \sum_{j=1}^{j=n} r_j(t) \cdot A_{j-1}$$

Question 1 : Déterminer la matrice M lorsque $n = 1$.

L'entier n est maintenant quelconque.

Question 2 : Expliciter la matrice A_n .

Question 3 : Déterminer la matrice $M(0)$.

Question 4 : Vérifier l'égalité suivante :

$$\frac{dM}{dt}(t) - \lambda_n \cdot M(t) = \sum_{j=0}^{j=n-2} r_{j+1}(t) \cdot [(\lambda_{j+1} - \lambda_n) \cdot A_j + A_{j+1}]$$

Question 5 : En déduire que

$$\forall t \in I, \quad \frac{dM}{dt}(t) = A \cdot M(t)$$

Question 6 : Déterminer une fonction matricielle Φ_A , dérivable de type (n, n) définie sur I et vérifiant :

$$\forall t \in I, \quad \frac{d\Phi_A}{dt}(t) = A \cdot \Phi_A(t) \quad \text{et} \quad \Phi_A(0) = I_n$$

Prouver l'unicité de Φ_A et exprimer Φ_A en fonction de la matrice M .

Question 7 : Application numérique:

Déterminer $\Phi_A(t)$ lorsque $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Question 8 : α et β non nul sont deux réels et $A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

Donner une interprétation géométrique de l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 représentée par la matrice $\Phi_A(t)$ dans une base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ de \mathbb{R}^2 .

Troisième partie :

Dans cette partie les preuves seront fondées sur la définition de la matrice Φ_A donnée en deuxième partie. L'entier n est quelconque, A et B sont deux matrices réelles à n lignes et n colonnes. u et v sont deux éléments de l'intervalle I .

Question 1 : Prouver que $\Phi_A(u+v) = \Phi_A(u) \cdot \Phi_A(v)$.

Question 2 : Montrer que $\Phi_A(u)$ est inversible et donner son inverse.

Question 3 : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Comparer $A \cdot B$ et $B \cdot A$.

Calculer et comparer $\Phi_{A+B}(u)$ et $\Phi_A(u) \cdot \Phi_B(u)$

Question 4 :

Dans le cas où les matrices A et B sont permutables (c'est à dire $A \cdot B = B \cdot A$), prouver que $\Phi_{A+B}(u) = \Phi_A(u) \cdot \Phi_B(u)$.

Quatrième partie :

α est un élément de I . A est une matrice donnée dans $\mathcal{M}(n, n)$.

Question 1 :

Dans cette question, pour tout i de 1 à n et tout j de 1 à n , q_{ij} est une application de classe \mathcal{C}^1 de I^2 vers \mathbb{R} (qui associe au couple (t, s) de I^2 le réel $q_{ij}(t, s)$). Soit Q la fonction matricielle réelle à deux variables de type (n, n) définie sur I^2 par

$Q = [q_{ij}]$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$). Montrer l'égalité matricielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\alpha}^t Q(t, s) ds \right] = Q(t, t) + \int_{\alpha}^t \frac{\partial Q}{\partial t}(t, s) ds$$

Il sera opportun d'introduire L , fonction matricielle réelle à deux variables de type (n, n) définie sur I^2 par

$$\forall (u, v) \in I^2, \quad L(u, v) = \int_{\alpha}^u Q(v, s) ds$$

Question 2 :

Soit une fonction matricielle continue B , de type $(n, 1)$ définie sur I et une matrice D unicolonne à n lignes.

La fonction matricielle R à deux variables, de type (n, n) définie sur I^2 est donnée par

$$\forall (t, s) \in I^2, \quad R(t, s) = \Phi_A(t) \cdot (\Phi_A)^{-1}(s)$$

Montrer que la fonction matricielle Y de type $(n, 1)$ définie sur I , solution du système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = A \cdot Y(t) + B(t) \\ Y(0) = D \end{cases}$$

est unique et qu'elle est donnée par :

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = R(t, 0) \cdot D + \int_0^t R(t, s) \cdot B(s) ds$$

Question 3 : Application lorsque $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Déterminer la fonction matricielle Φ_A et donner la solution du système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt}(t) = A \cdot Y(t) + B(t) \\ Y(0) = D \end{cases}$$
