e4a

ENSAM - ESTP - ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Concours 2000 épreuve 1

Systèmes différentiels à coefficients constants

P. Delezoide

4 Mai 2000

L'énoncé crée un trouble en redéfinissant de manière particulière des notions explicitement au programme : continuité, dérivabilité et primitivation d'une fonction de variable réelle à valeurs matricielles. Il semble que l'énoncé sous-entende que le candidat doive utiliser les définitions données par l'énoncé pour résoudre en particulier les questions de la première partie. Mais c'est le programme officiel qui fait loi; en particulier on y lit : " dérivée d'une application de la forme $u(f)$ où u est une application linéaire, dérivée d'une application de la forme $B(f, g)$, où B est une application bilinéaire". Il me semble clair que les théorèmes analogues pour les primitives de fonctions continues sur des intervalles réels sont aussi du programme, et qu'il n'est donc pas nécessaire de redémontrer ces résultats.

Première partie

Question 1

La matrice C étant fixée, l'application $A \mapsto C \cdot A$, est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}(n, n)$. On en déduit que si $t \mapsto M(t)$ est continue sur I, $t \mapsto C \cdot M(t)$ est continue sur I et que pour tout α et β dans I, on a l'égalité :

$$\int_\alpha^\beta (C \cdot M)(u) \ \mathrm{d}u = C \cdot \int_\alpha^\beta M(u) \ \mathrm{d}u$$

Question 2

L'application $(A, B) \mapsto A \cdot B$ est la multiplication bilinéaire sur $\mathcal{M}(n, n)$. D'après le cours, si $t \mapsto F(t)$ et $t \mapsto G(t)$ sont dérivables sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathcal{M}(n, n)$, leur produit est dérivable et :

$$\frac{\mathrm{d}(F \cdot G)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \cdot G + F \cdot \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}$$

Question 3

L'application $u \mapsto \det H(u)$ est une application dérivable sur I car c'est une somme de produits d'applications dérivables :

$$\forall u \in I \quad \det H(u) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) h_{1,\sigma(1)}(u) \ldots h_{n,\sigma(n)}(u)$$

Elle est donc continue, et comme elle ne prend pas la valeur 0 en s il existe un voisinage V de s dans I sur lequel elle ne prend pas la valeur 0; on en déduit que $H(u)$ est inversible pour tout $u \in V$. Nous supposerons dans la suite que V est un intervalle.

Soit (i,j) deux entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$; on note $d_{i,j}(u)$ le déterminant de la matrice mineure de $M(u)$ d'indices (i,j); l'application $u \mapsto d_{i,j}(u)$ est une application dérivable sur I car c'est une somme de produits d'applications dérivables. L'application $u \mapsto C(u)$, où $C(u)$ pour $u \in I$, est la transposée de la comatrice de $M(u)$, est donc dérivable sur I : pour i,j entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, $C_{i,j}(u) = (-1)^{i+j} d_{j,i}(u)$.

Pour tout $u \in V$, $H(u)$ est inversible et pour tout i,j entiers entre 1 et n, on a l'égalité $H^{-1}_{i,j}(u) = C_{i,j}(u) / \det H(u)$; les applications $u \mapsto C_{i,j}(u) / \det H(u)$ étant définies et dérivables sur l'intervalle V comme quotients de deux fonctions dérivables, le dénominateur ne prenant pas la valeur 0, on en déduit que H^{-1} est dérivable sur V.

Pour tout $u \in V$ on a $H^{-1}(u) \cdot H(u) = \mathrm{I}_n$, donc en dérivant on en déduit que pour tout $u \in V$:

$$\frac{\mathrm{d}H^{-1}}{\mathrm{d}t}(u) \cdot H(u) + H^{-1}(u) \cdot \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}(u) = 0 \ ,$$

d'où :

$$\frac{\mathrm{d}H^{-1}}{\mathrm{d}t}(u) = -H^{-1}(u) \cdot \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}(u) \cdot H^{-1}(u) \ .$$

Deuxième partie

Question 1

On pose ici $A = [a]$; a est la seule valeur propre de A; et on obtient immédiatement $\forall t \in I \quad r_1(t) = \mathbf{e}^{at}$. Comme $A_0 = [1]$, pour tout $t \in I$ on a $M(t) = [\mathbf{e}^{at}]$.

Question 2

Il est clair par récurrence que pour tout k entier entre 1 et n on a :

$$A_k = \prod_{i=1}^{k} (A - \lambda_i \, \mathrm{I}_n)$$

l'ordre des facteurs du produit n'ayant pas d'importance car ces facteurs, polynômes en A, commutent entre eux. En particulier :

$$A_n = \prod_{i=1}^{n} (A - \lambda_i \, \mathrm{I}_n) = P(A) \ ,$$

où $P = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$ est au signe près le polynôme caractéristique de A. D'après le théorème de Hamilton Cayley, on en déduit $A_n = P(A) = 0$.

On peut remarquer ici que les matrices A_k sont des polynômes en A, et que par conséquent pour tout $t \in I$, la matrice $M(t)$ commute avec la matrice A.

Question 3

Par définition, pour $n \geq 1$ on a :

$$M(0) = \sum_{j=1}^{n} r_j(0) \cdot A_{j-1} = A_0 = \mathrm{I}_n \ .$$

Question 4

Nous utiliserons les formules habituelles de dérivation sans justfication particulière.

En posant $r_0 = 0$, pour tout k entre 1 et n on a $r'_k = \lambda_k\, r_k + r_{k-1}$, donc :

$$\begin{aligned} M' - \lambda_n\, M &= \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k\, r_k + r_{k-1})A_{k-1} - \sum_{k=1}^{n}\lambda_n\, r_k\, A_{k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_n)\, r_k\, A_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} r_{k-1}\, A_{k-1} \end{aligned}$$

Dans la première somme on supprime le terme d'indice $k = n$ et on pose $j = k-1$; dans la deuxième somme on supprime le terme d'indice $k = 1$ et on pose $j = k-2$; on obtient :

$$M' - \lambda_n\, M = \sum_{j=0}^{n-2}(\lambda_{j+1} - \lambda_n)\, r_{j+1}\, A_j + \sum_{j=0}^{n-2} r_{j+1}\, A_{j+1} \ ,$$

ce qu'il fallait prouver.

Question 5

Reprenons l'égalité ci-dessus sous la forme :

$$M' - \lambda_n\, M = \sum_{k=1}^{n-1}(\lambda_k - \lambda_n)\, r_k\, A_{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} r_k\, A_k \ ,$$

En remarquant que $\lambda_n - \lambda_k = 0$ et que $r_k\, A_k = 0$ pour $k = n$ d'après la question 2, on obtient :

$$M' - \lambda_n\, M = \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_n)\, r_k\, A_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} r_k\, A_k \ ,$$

donc puisque $\lambda_n\, M = \sum_{k=1}^{n} \lambda_n r_k\, A_{k-1}$ et que $A_k = A_{k-1}A - \lambda_k\, A_{k-1}$ pour tout k entre 1 et n :

$$M' = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, r_k\, A_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} r_k\, A_k = \sum_{k=1}^{n} r_k\, (\lambda_k\, A_{k-1} + A_k) = \sum_{k=1}^{n} r_k\, A_{k-1}\, A = M\, A$$

On remarque enfin comme dans la question 2 que la matrice A commute avec $M(t)$ pour tout $t \in I$; donc $M' = MA = AM$.

Question 6

D'après les questions 3 et 4, la fonction $t \mapsto M(t)$ est solution de l'équation différentielle linéaire $M' = A\,M$ avec la condition initiale $M(0) = \mathrm{I}_n$; d'après le cours c'est la seule solution; l'application linéaire, qui ici ne dépend pas de t, est l'application $M \mapsto AM$, qui est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}(n,n)$. On a donc $\forall t \in I \quad \Phi_A(t) = M(t)$.

Question 7

Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 - 2X + 2 = (X-1)^2 + 1$; ses zéros sont $\lambda_1 = 1 + \mathbf{i}$ et $\lambda_2 = 1 - \mathbf{i}$ (distincts). On trouve facilement $r_1(t) = \mathbf{e}^{\lambda_1 t}$ pour tout $t \in I$; r_2 vérifie $r_2' = \lambda_2\, r_2 + \mathbf{e}^{\lambda_1 t}$ et $r_2(0) = 0$. Posons $r_2(t) = \mathbf{e}^{\lambda_2 t} s_2(t)$ pour tout $t \in I$; la fonction r_2 vérifie les conditions si, et seulement si, s_2 vérifie $s_2'(t) = \mathbf{e}^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$ pour tout $t \in I$. Compte tenu de la valeur initiale, on en déduit que pour tout $t \in I$ on a :

$$r_2(t) = \mathbf{e}^{\lambda_2 t}\left(\frac{\mathbf{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)t} - 1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) = \frac{\mathbf{e}^{\lambda_1 t} - \mathbf{e}^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

On a donc pour tout $t \in I$ l'égalité :

$$M(t) = \mathbf{e}^{\lambda_1 t}\,\mathrm{I}_2 + \frac{\mathbf{e}^{\lambda_1 t} - \mathbf{e}^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}\,(A - \lambda_1 \mathrm{I}_2) = \frac{\mathbf{e}^{\lambda_1 t} - \mathbf{e}^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}\,A - \frac{\lambda_2\,\mathbf{e}^{\lambda_1 t} - \lambda_1 \mathbf{e}^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}\,\mathrm{I}_2$$

Appliquons cette formule, qui est toujours vraie si le polynôme caractéristique a bien 2 zéros, dans le cas particulier. On a ici $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\mathbf{i}$ donc :

$$M(t) = \mathbf{e}^t\ \sin t\,A - \mathbf{e}^t\,\frac{(1-\mathbf{i})\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} - (1+\mathbf{i})\mathbf{e}^{-\mathbf{i}t}}{2\mathbf{i}} = \mathbf{e}^t\ \sin t\,A + \mathbf{e}^t(\cos t - \sin t)\,\mathrm{I}_2\ .$$

En remplaçant A et I_2 par leurs valeurs on trouve finalement :

$$\forall t \in I \quad M(t) = \mathbf{e}^t \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & -2\,\sin t \\ \sin t & \cos t + \sin t \end{bmatrix}\ .$$

Question 8

Le polynôme caractéristique est ici :

$$P(X) = X - 2\alpha\,X + \alpha^2 + \beta^2 = (X - (\alpha + \mathbf{i}\beta))(X - (\alpha - \mathbf{i}\beta))\ ,$$

dont les zéros sont $\lambda_1 = \alpha + \mathbf{i}\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - \mathbf{i}\beta$.

Si $\beta = 0$, il est clair que la fonction $t \mapsto \mathbf{e}^{\alpha t}\mathrm{I}_2$ vérifie les conditions de la question 6, donc par unicité $\forall t \in I \quad \Phi_A(t) = \mathbf{e}^{\alpha t}\mathrm{I}_2$; pour $t \in I$, $\Phi_A(t)$ est la matrice de l'homothétie vectorielle de rapport $\mathbf{e}^{\alpha\,t}$. Si $\beta \neq 0$, nous pouvons appliquer la formule trouvée dans la question 7; on obtient :

$$\forall t \in I \quad \mathbf{e}^{\alpha t}\frac{\sin\beta t}{\beta}\,A + \mathbf{e}^{\alpha t}\,\frac{\beta\,\cos\beta t - \alpha\,\sin\beta t}{\beta}\,\mathrm{I}_2$$

En remplaçant A et I_2 par leurs valeurs on obtient :

$$\forall t \in I \quad \Phi_A(t) = \mathbf{e}^{\alpha t}\begin{bmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix}$$

On remarque que ceci est vrai aussi si $\beta = 0$. Pour $t \in I$ donné, $\Phi_A(t)$ est la matrice de la similitude directe de rapport complexe $\mathbf{e}^{(\alpha + \mathbf{i}\beta)t}$.

Troisième partie

Dans ce qui suit l'intervalle I doit être stable par l'addition (question 1), stable par $u \mapsto -u$ (question 2) et doit contenir 0 (préliminaire); I est donc nécessairement un sous-groupe ouvert (cf. préliminaire) de $\mathbb{R}$; ce ne peut être que $\mathbb{R}$.

Question 1

Pour $v \in \mathbb{R}$ fixé, considérons l'application $u \mapsto M(u) = \Phi_A(u+v)$; elle est dérivable, et pour tout $u \in \mathbb{R}$, $M'(u) = \Phi'_A(u+v) = A\,\Phi_A(u+v) = A\,M(u)$; on a $M(0) = \Phi_A(v)$. L'application $u \mapsto N(u) = \Phi_A(u) \cdot \Phi_A(v)$ est aussi dérivable; pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $N'(u) = \Phi'_A(u) \cdot \Phi_A(v) = A \cdot \Phi_A(u) \cdot \Phi_A(v) = A \cdot N(t)$; on a aussi $N(0) = \Phi_A(v)$. Les fonctions $t \mapsto M(t)$ et $t \mapsto N(t)$ (à valeurs dans $\mathcal{M}(n,n)$) sont solutions de la même équation différentielle linéaire, et vérifient la même condition initiale; elles sont donc identiques. On a donc démontré :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad \Phi_A(u+v) = \Phi_A(u) \cdot \Phi_A(v) \ .$$

Question 2

D'après la question 1 on vérifie immédiatement que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\Phi_A(-u)$ est l'inverse de $\Phi_A(u)$.

Question 3

On a :

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Posons ici $M(t) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{bmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et résolvons le système différentiel qui caractérise la fonction Φ_A. Les conditions sont :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} a(0) & b(0) \\ c(0) & d(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui s'écrit :

$$c = a' \ , \ d = b' \ , \ 0 = c' \ , \ 0 = d' \qquad a(0) = 1 \ , \ b(0) = 0 \ , \ c(0) = 0 \ , \ d(0) = 1 \ .$$

On en déduit facilement :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi_A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

De manière analogue on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi_B(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \ .$$

On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi_A(t) \cdot \Phi_B(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t^2 & t \\ t & 1 \end{bmatrix} \ .$$

La matrice $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$. On peut donc appliquer la formule trouvée dans la question 7 de la partie II. On obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi_{A+B}(t) = \mathrm{sh}(t)\, A + \mathrm{ch}(t)\, \mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}t & \mathrm{sh}t \\ \mathrm{sh}t & \mathrm{ch}t \end{bmatrix}$$

Les matrices $\Phi_A(t) \cdot \Phi_B(t)$ et $\Phi_{A+B}(t)$ ne sont jamais identiques, sauf si $t = 0$ (cf. coefficient $(2,2)$)

Question 4

Posons $M(u) = \Phi_A(u) \cdot \Phi_B(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. On obtient pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$M'(u) = \Phi'_A(u) \cdot \Phi_B(u) + \Phi_A(u) \cdot \Phi'_B(u) = A \cdot \Phi_A(u) \cdot \Phi_B(u) + \Phi_A(u) \cdot B \cdot \Phi_B(u)$$

On a remarqué dans la question 2 de la partie II que $\Phi_A(u)$ est pour tout $u \in \mathbb{R}$ un polynôme en A; donc si B commute avec A, alors B commute avec $\Phi_A(u)$; on en déduit :

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad M'(u) = A \cdot \Phi_A(u) \cdot \Phi_B(u) + B \cdot \Phi_A(u) \cdot \Phi_B(u) = (A+B)\, M(u)$$

De plus $M(0) = \mathrm{I}_n$. D'après la question 5 de la partie II, on en déduit que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\Phi_{A+B}(u) = \Phi_A(u) \cdot \Phi_B(u)$.

Quatrième partie

Question 1

La fonction Q étant continue, pour $u \in I$ fixé, d'après le théorème de dérivation des intégrales sur un segment dépendant d'un paramètre, la fonction L est partiellement dérivable par rapport à v, et pour tout $(u,v) \in I^2$:

$$\frac{\partial L}{\partial v}(u,v) = \int_\alpha^u \frac{\partial Q}{\partial v}(v,s)\,\mathrm{d}s\ .$$

Pour v fixé, comme la fonction $s \mapsto Q(v,s)$ est continue, on voit que la fonction L est partiellement dérivable par rapport à u, et que pour tout $(u,v) \in I^2$:

$$\frac{\partial L}{\partial u}(u,v) = Q(v,u)$$

La fonction $\frac{\partial L}{\partial u}$ est évidemment continue sur I^2. Montrons qu'il en est de même pour la fonction $\frac{\partial L}{\partial v}$; pour $u \neq \alpha$, on peut poser dans l'intégrale $s = \alpha + (u-\alpha)\,t$ et on obtient :

$$\frac{\partial L}{\partial v}(u,v) = \int_0^1 \frac{\partial Q}{\partial v}(v, \alpha + (u-\alpha)t)(u-\alpha)\ \mathrm{d}t$$

ce qui est vrai aussi dans le cas où $\alpha = u$. Comme Q est de classe $\mathcal{C}^1$, l'application $((u,v),t) \mapsto \frac{\partial Q}{\partial v}(v, \alpha + (u-\alpha)t)(u-\alpha)$ est continue sur $I^2 \times [0,1]$;

d'après le théorème de continuité d'une intégrale sur un segment dépendant d'un paramètre, nous pouvons en déduire que $\frac{\partial L}{\partial v}$ est bien continue sur I^2.

De ce qui précède, on déduit que l'application L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I^2; en appliquant le théorème de composition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (ou théorème de la chaîne), on en déduit que l'application $t \mapsto L(t,t) = \int_\alpha^t Q(t,s)\ \mathrm{d}s$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et que pour tout $t \in I$ on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_\alpha^t Q(t,s)\ \mathrm{d}s\right] = \frac{\partial L}{\partial u}(t,t) + \frac{\partial L}{\partial v}(t,t) = Q(t,t) + \int_\alpha^t \frac{\partial Q}{\partial t}(t,s)\ \mathrm{d}s\ .$$

Question 2

A la fonction matricielle Y de type $(n,1)$ on peut faire correspondre la fonction matricielle $Z\ :\ t \mapsto \Phi_A(-t)\,Y(t)$, et inversement, pour tout $t \in I$, $Y(t) = \Phi_A(t)\,Z(t)$. La fonction Y est de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si, la fonction Z l'est, et Y est solution du système différentiel de l'énoncé, avec condition initiale si, et seulement si, la fonction Z vérifie les conditions :

$$\Phi_A' \cdot Z + \Phi_A \cdot Z' = A \cdot \Phi_A \cdot Z + B \quad \text{et} \quad \Phi_A(0) \cdot Z(0) = D\ .$$

Comme $\Phi_A' = A \cdot \Phi_A$ et $\Phi_A(0) = \mathrm{I}_n$, ces conditions deviennent :

$$\forall t \in I \quad Z'(t) = \Phi_A(-t)\,B(t) \quad \text{et} \quad Z(0) = D\ ,$$

ce qui équivaut à :

$$\forall t \in I \quad Z(t) = D + \int_0^t \Phi_A(-s) \cdot B(s)\ \mathrm{d}s\ .$$

On en déduit par conséquent qu'il y a une unique solution pour la fonction Y et que :

$$\begin{aligned}
\forall t \in I \quad Y(t) &= \Phi_A(t) \cdot D + \Phi_A(t) \int_0^t \Phi_A(-s) \cdot B(s)\ \mathrm{d}s = \\
&= R(t,0) \cdot D + \int_0^t \Phi_A(t) \cdot \Phi_A(-s) \cdot B(s)\ \mathrm{d}s = \\
&= R(t,0) \cdot D + \int_0^t R(t,s) \cdot B(s)\ \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

N.B. On pourrait utiliser la question 1 pour vérifier que la fonction proposée est bien solution, mais c'est bien lourd. De plus dans le cas présent le paramètre t sort visiblement de sous l'intégrale puisque :

$$\int_0^t \Phi_A(t) \cdot \Phi_A(-s) \cdot B(s)\ \mathrm{d}s = \Phi_A(t) \cdot \int_0^t \Phi_A(-s) \cdot B(s)\ \mathrm{d}s\ ,$$

ce qui rend bien inutiles les difficultés de la question 1.

Question 3

On remarque que la somme de chacune des lignes de A vaut 2; autrement dit :

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\ .$$

Cela prouve que 2 est valeur propre de A, et que le vecteur $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ est la base canonique de $\mathcal{M}(3,1)$, est un vecteur propre pour la valeur propre 2. Posons $e_1 = \varepsilon_1$, $e_2 = \varepsilon_2$ et $e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, et notons f l'application linéaire de matrice A dans la base canonique. On a :

$$f(e_1) = f(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2 - 3\varepsilon_3 = 2e_1 - e_2 - 3e_3$$

et :

$$f(e_2) = f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 2e_2 + e_3 \ .$$

La matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est donc :

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \ .$$

Notons maintenant x, y, z les coordonnées de la fonction inconnue Y dans la base (e_1, e_2, e_3); comme $B(t) = \mathbf{e}^t\,\varepsilon_1 = \mathbf{e}^t\,e_1$ et $D = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = e_1 + e_2$, les conditions sur les fonctions (x, y, z) sont :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Posons $x = \mathbf{e}^{2t}u$, $y = \mathbf{e}^{2t}v$, $z = \mathbf{e}^{2t}w$; les conditions sur les fonctions (u, v, w) sont :

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ce qui équivaut au système différentiel triangulaire

$$\begin{array}{ll} u' = \mathbf{e}^{-t} & u(0) = 1 \\ v' = -u & v(0) = 1 \\ w' = -3u + v & w(0) = 0 \end{array}$$

On trouve successivement :

$$\begin{array}{ll} u = 2 - \mathbf{e}^{-t} & x = 2\mathbf{e}^{2t} - \mathbf{e}^t \\ v = (2 - 2t) - e^{-t} & y = (2 - 2t)\,\mathbf{e}^{2t} - e^t \\ w = (2 - 4t - t^2) - 2\,\mathbf{e}^{-t} & z = (2 - 4t - t^2)\,\mathbf{e}^{2t} - 2\,\mathbf{e}^t \end{array}$$

On en déduit :

$$Y = \left(2\mathbf{e}^{2t} - \mathbf{e}^t\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left((2 - 2t)\,\mathbf{e}^{2t} - e^t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \left((2 - 4t - t^2)\,\mathbf{e}^{2t} - 2\,\mathbf{e}^t\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

soit finalement :

$$Y = \mathbf{e}^{2t} \begin{bmatrix} 4 - 4t - t^2 \\ 4 - 6t - t^2 \\ 2 - 4t - t^2 \end{bmatrix} - \mathbf{e}^t \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \ .$$

On pouvait évidemment utiliser la méthode de l'énoncé, ou une bonne calculatrice.