Corrigé CNM 2011 Maths 1 Option PSI

Mr A.CHABCHI[1]

Exercice : Résolution d'une équation différentielle

1. Notons $y_\alpha(t) = t^\alpha$, alors y_α est solution de (H) sur I si et seulement si

$$\forall\, t \in I,\quad t^2 y_\alpha''(t) + 3t y_\alpha'(t) + y_\alpha(t) = 0 \Longleftrightarrow \forall\, t \in I,\quad t^\alpha\left(\alpha^2 + 2\alpha + 1\right) = 0 \Longleftrightarrow \alpha = -1$$

Ainsi $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est la seule solution sur I de (H) qui soit de la forme $t \longmapsto t^\alpha$.

2. Un calcul simple donne : $\forall\, t \in I,\ t\lambda''(t) + \lambda'(t) = \left(t\lambda'(t)\right)' = 0$, càd :
il existe $A \in \mathbb{R}$, $\forall\, t \in I,\ t\lambda'(t) = A$, en intégrant une seconde fois :

$$\exists\, A, B \in \mathbb{R},\quad \lambda(t) = A \ln|t| + B$$

Ainsi les solutions de (H) sur I de la forme $\dfrac{\lambda(t)}{t}$ sont

$$y(t) = \frac{A\ln|t|}{t} + \frac{B}{t},\ \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

3. (H) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène dont les coefficients sont continues sur I avec celui de y'' : $x \longmapsto x^2$ ne s'annule jamais sur I, ainsi l'ensemble $S_H(I)$ des solutions de (H) sur I est $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2, contenant la famille libre $\left(\dfrac{\ln|t|}{t}, \dfrac{1}{t}\right)$ des deux fonctions trouvées à la question (2). D'où $S_H(I) = vect\left(\dfrac{\ln|t|}{t}, \dfrac{1}{t}\right)$.
Ainsi les solutions de (H) sur I sont

$$y(t) = \frac{A\ln|t|}{t} + \frac{B}{t},\ \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

4. Il s'agit ici de prolonger les solutions obtenues en 0. Or on a $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{A\ln|t|}{t} + \dfrac{B}{t}$ existe si et seulement si $A = B = 0$ puisque $\dfrac{1}{t} = o\left(\dfrac{\ln|t|}{t}\right)$ en 0. La seule solution sur $\mathbb{R}$ de (H) est la solution nulle.

5. Ce calcul est déjà fait à la question (2), $t \longmapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$ est solution de (L) si et seulement si

$$\forall\, t \in I,\ t\lambda''(t) + \lambda'(t) = \left(t\lambda'(t)\right)' = \frac{1}{1+t^2}$$

Une première intégration donne : $\exists\, A \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in I,\ t\lambda'(t) = \arctan(t) + A. \quad (1)$

[1] a_chabchi@yahoo.fr

La fonction $t \longmapsto \dfrac{\arctan(t)}{t}$ est continue sur I et admet une limite finie en 0, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}^-$, soit

$$\phi(t) = \int_0^t \frac{\arctan(u)}{u} du, \text{ la primitive s'annulant en } 0$$

Une deuxième intégration de (1) donne :

$$\exists\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, B \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in I,\ \lambda(t) = \phi(t) + A \ln|t| + B$$

6. L'espace $S_L(I)$ des solutions de (L) sur I est plan affine de direction $S_H(I)$: $S_L(I) = y_p + S_H(I)$, où $y_p(t) = \dfrac{\phi(t)}{t} = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \frac{\arctan(u)}{u} du$ une solution particulière de (L) et $S_H(I) = vect\left(\dfrac{\ln|t|}{t}, \dfrac{1}{t}\right)$.
7. **Méthode 1 :** La solution générale de (L) sur I est :
$$y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\arctan(u)}{u} du + \frac{A\ln|t|}{t} + \frac{B}{t}, \text{ où } A, B \in \mathbb{R}$$
On a $\forall u \in \left]-1, 1\right[,\ \dfrac{\arctan(u)}{u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{2n+1}$ est la somme d'une série entière de rayon 1, donc s'intégre terme à terme sur $\left]-1, 1\right[$, donc
$$\forall t \in \left]-1, 1\right[,\ y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)^2} + \frac{A\ln|t|}{t} + \frac{B}{t}, \text{ où } A, B \in \mathbb{R}$$
Ainsi la seule solution DSE à l'origine est :
$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)^2},\ R = 1 \text{ selon D'Alembert et } a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2},\ a_{2n+1} = 0$$
Méthode 2 : Soit $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$, alors y est solution de (L) sur $\left]-R, R\right[$ si et seulement si
$$\forall\, x \in \left]-R, R\right[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$
Par unicité d'un développement en série entière ceci est réalisé si et seulement si
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0 \text{ et } a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$
on retrouve la solution $y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)^2}$, définie sur $\left]-1, 1\right[$.
8. On a :
$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\arctan(u)}{u} du = \lim_{t\to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)^2} = 1$$
Donc $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\arctan(u)}{u} du + \frac{A\ln|t|}{t} + \frac{B}{t}$ existe si et seulement si $A = B = 0$.

Ainsi $y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \frac{\arctan(u)}{u} du \text{ si } t \neq 0 \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (coïncident avec la somme d'une série enitère sur $\left]-1, 1\right[$ et produit de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^*$), elle est donc la seule solution de (L) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Problème : Formule sommation de Poisson - Applications

Partie I

1. Les fonctions $t \longmapsto t^2 g(t)$ et $t \longmapsto t^2 g'(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et bornées aux $\mathcal{V}(\pm\infty)$, donc bornées sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc :

$$\exists\, M > 0,\ \forall\, t \neq 0,\quad |g(t)| \leq \frac{M}{t^2} \text{ et } \left|g'(t)\right| \leq \frac{M}{t^2}$$

1.1. La fonction $t \longmapsto g(t)\, e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\left|g(t)\, e^{-ixt}\right| = |g(t)| \leq \dfrac{M}{t^2}$ avec $t \longmapsto \dfrac{M}{t^2}$ intégrable aux $\mathcal{V}(\pm\infty)$: Riemann $\alpha = 2 > 1$. Ainsi $t \longmapsto g(t)\, e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

1.2. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, on prend $n \geq \max\left(-\dfrac{a}{2\pi}, \dfrac{b}{2\pi}\right)$ de façon que :

$\forall\, t \in [a,b], \begin{cases} 2n\pi + t \geq 2n\pi + a \geq 0 \\ 2n\pi - t \geq 2n\pi - b \geq 0 \end{cases}$, donc $\forall\, t \in [a,b]$:

$|g_n(t)| \leq M\left(\dfrac{1}{(2n\pi + t)^2} + \dfrac{1}{(2n\pi - t)^2}\right) \leq M\left(\dfrac{1}{(2n\pi + a)^2} + \dfrac{1}{(2n\pi - b)^2}\right) \sim \dfrac{M}{2\pi^2 n^2}$ avec $\sum \dfrac{M}{2\pi^2 n^2}$ convergente (Riemann $\alpha = 2 > 1$). Ainsi $\sum g_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

1.3.

1.3.1. On a :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
- La série $\sum g_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- Le même raisonnement du **1.2.** appliqué à g_n', prouve que la série des dérivées $\sum g_n'$ converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$

Ainsi la somme $\tilde{g}(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et se dérive terme à terme.

1.3.2. Comme indiqué, on a : $\tilde{g}(t + 2\pi) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=-n}^{n} g((t + 2\pi) + 2p\pi)$, dans cette sommation on effectue le changement d'indice $q = p + 1$, on obtient :

$$\tilde{g}(t + 2\pi) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{q=-n+1}^{n+1} g(t + 2q\pi) = \lim_{n\to+\infty} \left(-g(-n) - g(-n-1) + \sum_{q=-(n+1)}^{n+1} g(t + 2q\pi)\right)$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -g(-n) = \lim_{n\to+\infty} -g(-n-1) = 0$ car $g(t) = O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ au $\mathcal{V}(-\infty)$. D'où

$$\tilde{g}(t + 2\pi) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{q=-(n+1)}^{n+1} g(t + 2q\pi) = \tilde{g}(t)$$

Ainsi $\tilde{g}$ est une fonction 2π-périodique.

Par ailleurs, on a : $c_k(\tilde{g}) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \tilde{g}(t)\, e^{-ikt} dt = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\, e^{-ikt} dt.$

La série $\sum g_n$ converge uniformément sur le segment $[0, 2\pi]$ selon **1.2.** et pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $\left|g_n(t)\, e^{-ikt}\right| = |g_n(t)|$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} g_n(t)\, e^{-ikt}$ converge aussi uniformément sur **le segment**

$[0, 2\pi]$, on peut alors intégrer terme à terme :

$$c_k(\tilde{g}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} g_n(t) e^{-ikt} dt$$

Mais $\int_0^{2\pi} g_n(t) e^{-ikt} dt = \int_0^{2\pi} g(t+2n\pi) e^{-ikt} dt + \int_0^{2\pi} g(t-2n\pi) e^{-ikt} dt$, en faisant respectivement les changements $u = t + 2n\pi$ et $u = t - 2n\pi$ et sachant que $e^{2in\pi} = e^{-2in\pi} = 1$, on obtient :

$$\forall n \geq 1, \int_0^{2\pi} g_n(t) e^{-ikt} dt = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} g(t) e^{-ikt} dt + \int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi} g_n(t) e^{-ikt} dt$$

Et par la relation de Charles, on aura :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} g_n(t) e^{-ikt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} g(t) e^{-ikt} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi} g(t) e^{-ikt} dt$$

Ainsi :

$$c_k(\tilde{g}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} g_n(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} g(t) e^{-ikt} dt + \int_{-\infty}^0 g(t) e^{-ikt} dt \right) = \frac{1}{2\pi} \hat{\mathbf{g}}(k)$$

1.3.3.

- $\tilde{g}$ est un signal de classe C^1 et 2π-périodique, donc sa suite des coefficients de Fourier $(c_n(\tilde{g}))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable (Notion peut-être hors programme PSI !!); or on vient de montrer que $c_n(\tilde{g}) = \frac{1}{2\pi} \hat{\mathbf{g}}(n)$, d'où la famille $(\hat{\mathbf{g}}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est aussi sommable.
- $\tilde{g}$ est un signal de classe C^1 et 2π-périodique, donc la série de Fourier de $\tilde{g}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{g}$, en particulier

  $$\tilde{g}(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(2n\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\tilde{g}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{g}}(n)$$

  D'où la formule sommatoire de Poisson.

PARTIE II

2. Soit $\lambda > 0$ et $h_\lambda(t) = e^{-\lambda^2 t^2}$

2.1. On a h_λ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $t^2 h_\lambda(t) = t^2 e^{-\lambda^2 t^2}$ et $t^2 h'_\lambda(t) = -2\lambda^2 t^3 e^{-\lambda^2 t^2}$ sont de limites nulles en $\pm\infty$ puisque les exponentielles l'emportent sur les puissances, donc en particulier bornées aux $\mathcal{V}(\pm\infty)$. Les hypothèses sont alors satisfaites.

2.2. La fonction $\hat{h}_1$ est définie par :

$$\hat{h}_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-ixt} dt$$

On note $f(x,t) = e^{-t^2} e^{-ixt}$, il s'agit d'une dérivation sous l'intégrale[2], on a alors

- f est continue sur $\mathbb{R}^2$ intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout x fixé dans $\mathbb{R}$

[2] On peut aussi utiliser les hypothèses du programme français

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -ite^{-t^2}e^{-ixt}$ continue sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie la domination : $\forall\ t \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a,b]$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq |t|\, e^{-t^2} = \phi(t)$ avec ϕ C^0 et intégrable sur $\mathbb{R}$ car négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $\pm\infty$.

Ainsi $\hat{h}_1$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et se dérive sous l'intégrale (*Formule de Leibniz*) :

$$\hat{h}_1'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-t^2}e^{-ixt}dt$$

A l'aide d'une intégration par parties[3], on a :

$\hat{h}_1'(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-t^2}e^{-ixt}dt = \frac{1}{2}\left(\left[e^{-t^2}ie^{-ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-t^2}e^{-ixt}\right)$, vu le comportement de e^{-t^2} et le caractère borné du terme e^{-ixt}, le crochet est nul, d'où :

$$\hat{h}_1'(x) = -\frac{x}{2}\hat{h}_1(x) \text{ Càd } \hat{h}_1 \text{ vérifie } y' + \frac{x}{2}y = 0$$

2.3. Les solutions de (1) sont les $y(x) = Ae^{-x^2/4}$; où A une constante réelle. tenant compte de $\hat{h}_1(0) = \sqrt{\pi}$, on obtient $\hat{h}_1(x) = \sqrt{\pi}e^{-x^2/4}$.

2.4. Sachant que $t \longmapsto \lambda t$ est C^1 de $\mathbb{R}$ sur lui même, on effectue le changement de variable $u = \lambda t$, dans l'intégrale $\hat{h}_\lambda(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2t^2}e^{-ixt}dt$, on aura

$$\hat{h}_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2t^2}e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}e^{-ixu/\lambda}\frac{du}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\hat{h}_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda}e^{-\dfrac{x^2}{4\lambda^2}}$$

2.5. Notons d'abord que la fonction h_λ est paire, donc $\forall\ n \in \mathbb{Z},\ c_{-n}(h_\lambda) = c_n(h_\lambda)$, donc la formule sommatoire de Poisson appliqué à $h_\lambda(x) = e^{-\dfrac{ax^2}{4\pi}}$ obtenue pour $\lambda = \dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}$, donne :

$$2\pi\left(h_\lambda(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} h_\lambda(2n\pi)\right) = \left(\hat{h}_\lambda(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{h}_\lambda(n)\right)$$

ou encore

$$2\pi\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 a}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\dfrac{-\pi n^2}{a}}\right)$$

D'où la formule demandée.

PARTIE III

3. On considère $u_n(z) = \exp\left(i\pi n^2 z\right)$

3.1. L'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(z) = \operatorname{Im}(z)$ est continue (linéaire en dimension finie lorsque $\mathbb{C}$ est considéré comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel) et $\Omega = f^{-1}(]0,+\infty[)$ avec $]0,+\infty[$ ouvert de $\mathbb{R}$, donc Ω ouvert de l'espace de départ qui est $\mathbb{C}$.
Par ailleurs Ω est demi-plan donc convexe puisque :
$\operatorname{Im}((1-t)z_1 + tz_2) = (1-t)\operatorname{Im}(z_1) + t\operatorname{Im}(z_2) > 0$ pour $t \in [0,1]$ et $z_1, z_2 \in \Omega$.

3.2. On a $|u_n(z)| = e^{-\pi n^2 \operatorname{Im}^2(z)}$, donc :

[3] Pour être propre, il faut se ramener à un segment et conclure par passage à la limite

- Si $\operatorname{Im}(z) \leq 0$, le terme général $u_n(z)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, donc la série $\sum u_n(z)$ diverge grossièrement.
- Si $\operatorname{Im}(z) > 0$, alors $|u_n(z)| = e^{-\pi n^2 \operatorname{Im}^2(z)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc la série $\sum u_n(z)$ converge absolument donc converge.

Conclusion : $\sum u_n(z)$ converge si et seulement si $z \in \Omega$.

3.3. On a $u(z+1)+u(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z}\left(1+e^{i\pi n^2}\right)$, en remarquant que $e^{i\pi n^2} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$, on va séparer les pairs et les impairs dans la sommation précédante (On peut scinder les deux sommations car elles convergent), on obtient

$$u(z+1)+u(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z}\left(1+e^{i\pi n^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2e^{i\pi 4n^2 z} = 2u(4z)$$

3.4. On pose $\tilde{u}_n(x,y) = u_n(x+iy)$ et $\tilde{u}(x,y) = u(x+iy)$

3.4.1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times [a,+\infty[$, on a $\left|n^k \tilde{u}_n(x,y)\right| \leq n^k e^{-\pi n^2 a^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, avec $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente, donc $\sum n^k \tilde{u}_n$ converge normalement et par suite converge uniformément sur $\mathbb{R}\times [a,+\infty[$.

3.4.2. Pour $y > 0$ fixé, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v_n(x) = \tilde{u}_n(x,y) = e^{i\pi n^2 x} e^{-\pi n^2 y}$, on a alors

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- La série $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ selon **3.4.3.**
- La série des dérivées $\sum v_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ selon **3.4.3.**

Donc la somme $x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et se dérive terme à terme, par suite $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$ existe sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et on a

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} i\pi n^2 \tilde{u}_n(x,y)$$

3.4.3. De même pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, on pose pour tout $y > 0$, $w_n(y) = \tilde{u}_n(x,y) = e^{i\pi n^2 x} e^{-\pi n^2 y}$, on a alors

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, w_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- La série $\sum w_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ selon **3.4.1.**
- La série des dérivées $\sum w_n'$ converge uniformément sur tout $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, selon **3.4.1.**

Donc la somme $y \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(y)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et se dérive terme à terme, par suite $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$ existe sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et on a

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\pi n^2 \tilde{u}_n(x,y) = i\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x,y)$$

3.4.4. On a $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} i\pi n^2 \tilde{u}_n(x,y)$, avec

- Les $i\pi n^2\tilde{u}_n$ continues sur $\mathbb{R}\times\,]0,+\infty[$
- La série $\sum\limits_{n\geq 1} i\pi n^2\tilde{u}_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}\times\,[a,+\infty[$ selon **3.4.1**

Donc la somme $\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}\times\,]0,+\infty[$. Il en est de même pour $\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial y}$.

Ainsi $\tilde{u}$ est différentiable sur $\mathbb{R}\times\,]0,+\infty[$ et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann : $\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+i\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial y}=0$, par suite u est holomorphe sur l'ouvert Ω.

3.5. Pour z complexe non réel négatif, on pose : $z^\alpha=\exp\left(\alpha\log\left(z\right)\right)$

3.5.1. La fonction $z\longmapsto z^\alpha$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ comme composée de deux fonctions holomorphes.

3.5.2. La formule (2) peut-être écrite sous la forme

$$\forall\ a>0,\ \left(\frac{i}{ia}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+2u\left(ia\right)\right)=1+2u\left(-\frac{1}{ia}\right)$$

Ainsi la fonction $z\longmapsto\left(\dfrac{i}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+2u\left(z\right)\right)-\left(1+2u\left(-\dfrac{1}{z}\right)\right)$ qui est holomorphe sur l'ouvert convexe Ω s'annule sur tout le demi-axe ouvert des imaginaires purs : $i\mathbb{R}^{*+}$, donc ses zéros ne sont pas isolés et par suite elle est NULLE sur l'ouvert connexe par arcs Ω tout entier. D'où le résultat connu sous le nom du prolongement analytique.

3.5.3. En utilisant la relation ci-dessus pour $4z$ et pour z, on a aura :

$\left(\dfrac{i}{4z}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+2u\left(4z\right)\right)=\left(1+2u\left(-\dfrac{1}{4z}\right)\right)$ et $\left(\dfrac{i}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+2u\left(z\right)\right)=\left(1+2u\left(-\dfrac{1}{z}\right)\right)$ càd

$\left(1+2u\left(4z\right)\right)=\left(\dfrac{i}{4z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+2u\left(-\dfrac{1}{4z}\right)\right)=\left(\dfrac{i}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}+u\left(-\dfrac{1}{4z}\right)\right)$ et

$\left(\dfrac{1}{2}+u\left(z\right)\right)=\left(\dfrac{i}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}+u\left(-\dfrac{1}{z}\right)\right)$, en faisant la différence membre à membre et tenant compte de $u\left(z+1\right)+u\left(z\right)=2u\left(4z\right)$, on obtient :

$$u\left(z+1\right)+\frac{1}{2}=\left(\frac{i}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(u\left(-\frac{1}{4z}\right)-u\left(-\frac{1}{z}\right)\right)=\left(\frac{i}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(-\frac{i\pi n^2}{4z}\right)-\exp\left(-\frac{i\pi n^2}{z}\right)\right)$$

CQFD.