

CORRIGÉ DU CONCOURS NATIONAL COMMUN
SESSION 2009
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II
FILIÈRE PSI

Par K. Chaira

1^{ère} partie : Étude de l'application f_m

1. R est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n et admet $n+1$ racines x_0, x_1, \dots, x_n distinctes deux à deux, donc R est le polynôme nul.

2. Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}_m^2$.

$$\begin{aligned} f_m(\lambda.P+Q) &= ((\lambda.P+Q)(x_0), \dots, (\lambda.P+Q)(x_n)) = ((\lambda.P(x_0)+Q(x_0), \dots, (\lambda.P(x_n)+Q(x_n))) \\ &= \lambda.f_m(P) + f_m(Q). \end{aligned}$$

3. (a) $P \in \text{Ker } f_m$ équivaut à $P(x_i) = 0$, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, donc le polynôme $\pi = (X - x_0)(X - x_1) \cdots (X - x_n)$ divise P ; et, comme $\deg(P) \leq m$ et $\deg(\pi) = n + 1$, donc il existe $Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}$ tel que $P = Q \pi$. D'où, $\text{Ker } f_m \subseteq \{Q \pi ; Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$. Pour l'autre inclusion, il suffit de remarquer que le polynôme π admet x_0, x_1, \dots, x_n comme racines.

(b) D'abord $\text{Ker } f_m$ et \mathcal{P}_n sont des sous espaces vectoriels de \mathcal{P}_m , puisque $n + 1 \leq m$.

* Si $P \in \text{Ker } f_m \cap \mathcal{P}_m$, alors pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $P(x_i) = 0$, et $\deg(P) \leq n$; et, d'après la question 1), le polynôme P est nul. D'où, $\text{Ker } f_m \cap \mathcal{P}_m = \{0\}$.

* Soit $H \in \mathcal{P}_m$. On effectue la division euclidienne de H par π , il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $H = Q \pi + R$ et $\deg(R) < \deg(\pi) = n + 1$; donc $H \in \text{Ker } f_m + \mathcal{P}_n$. D'où, $\mathcal{P}_m = \text{Ker } f_m + \mathcal{P}_n$.

Ainsi, $\mathcal{P}_m = \text{Ker } f_m \oplus \mathcal{P}_n$.

(c) $\dim(\text{Ker } f_m) = \dim(\mathcal{P}_m) - \dim(\mathcal{P}_n) = (m + 1) - (n + 1) = m - n$.

$(X^i \pi)_{0 \leq i \leq m-n-1}$ est une famille de polynômes échelonnées de $\text{Ker } f_m$, donc elle est libre; et, comme son cardinal est égal à la dimension de $\text{Ker } f_m$, donc $(X^i \pi)_{0 \leq i \leq m-n-1}$ est une base de $\text{Ker } f_m$.

(d) * $\text{rg}(f_m) = \dim(\mathcal{P}_m) - \dim(\text{Ker } f_m) = (m + 1) - (m - n) = n + 1$.

* Comme $\text{Im}(f_m) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ et $\text{rg}(f_m) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$, donc $\text{Im}(f_m) = \mathbb{R}^{n+1}$. Ainsi, l'application f_m est surjective.

4. Dans cette question, $m \leq n$.

(a) Si $P \in \text{Ker } f_m$, alors les $n + 1$ réels x_0, x_1, \dots, x_n sont des racines de P deux à deux distinctes et $\deg(P) \leq m < n + 1$, donc P est nul. D'où, f_m est injectif.

(b) f_m étant injective, donc $\text{Ker } f_m = \{0\}$; et, par suite

$$\text{rg}(f_m) = \dim(\mathcal{P}_m) - \dim(\text{Ker } f_m) = m + 1.$$

(c) f_m est surjective si, et seulement si, $\text{rg}(f_m) = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$ si, et seulement si, $m = n$.

5. (a) Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\deg(L_i) = n$.

Soit $(k, i) \in \{0, 1, \dots, n\}^2$.

$$\text{Si } k = i, L_i(x_i) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} = 1,$$

$$\text{si } k \neq i, \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_k - x_j) = 0; \text{ et, par suite } L_i(x_k) = \frac{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_k - x_j)}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x_i - x_j)} = 0.$$

(b) Soit $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

$f_n(L_i) = (L_i(x_0), L_i(x_1), \dots, L_i(x_n)) = (\delta_{i,0}, \delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,i}, \dots, \delta_{i,n}) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, le réel 1 est situé à la $(i + 1)^{\text{ème}}$ place.

La famille $(f_n(L_0), f_n(L_1), \dots, f_n(L_n))$ représente la base canonique de l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+1} .

(c) Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i = 0$. Donc, pour tout $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, on

$$\text{a } \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x_j) = 0 \text{ c'est-à-dire } \sum_{i=0}^n \alpha_i \delta_{i,j} = 0 \text{ ce qui traduit à } \alpha_j = 0. \text{ D'où, } (L_0, L_1, \dots, L_n)$$

est une famille libre; et, comme le cardinal de cette famille est égal à $\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$, donc

(L_0, L_1, \dots, L_n) est une base de \mathcal{P}_n .

(d) i. D'après la question 4), l'application f_n est bijective de \mathcal{P}_n sur \mathbb{R}^{n+1} . Donc, pour tout $y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P_y \in \mathcal{P}_n$ tel que

$$f_n(P_y) = y = (y_0, y_1, \dots, y_n).$$

ii. D'après la question précédente, $f_n(P_y) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$. Comme $P_y \in \mathcal{P}_n$ et (L_0, L_1, \dots, L_n)

est une base de \mathcal{P}_n , donc il existe $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P_y = \sum_{i=0}^n \beta_i L_i$. Et, par suite

$$(y_0, y_1, \dots, y_n) = f_n(P_y) = \sum_{i=0}^n \beta_i f_n(L_i) = \sum_{i=0}^n \beta_i \varepsilon_i = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n). \text{ Ainsi, } P_y = \sum_{i=0}^n y_i L_i.$$

2^{ème} partie : Approximation polynômiale au moindres carrés

A. On suppose $m \geq n + 1$.

1. D'après la question d-3) de la première partie, l'application f_m est surjective de \mathcal{P}_m vers \mathbb{R}^{n+1} . Donc, pour l'élément $(y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe $Q_0 \in \mathcal{P}_m$ tel que

$$f_m(Q_o) = (y_o, y_1, \dots, y_n).$$

2. * On rappelle que $f_m(Q_o) = (Q_o(x_o), \dots, Q_o(x_n))$. Pour tout $P \in \mathcal{P}_m$, $\Phi_m(P) = \sum_{i=0}^n (y_i - P(x_i))^2$

est positif; et, comme $\Phi_m(Q_o) = \sum_{i=0}^n (y_i - Q_o(x_i))^2 = 0$, donc la valeur minimal λ_m de $\Phi_m(P)$ lorsque P décrit \mathcal{P}_m est nulle.

* $(Q \in \mathcal{P}_m, \Phi_m(Q) = 0)$ équivaut à $(Q \in \mathcal{P}_m, Q(x_i) = y_i = Q_o(x_i), \text{ pour tout } i \in \{0, 1, \dots, n\})$ équivaut à $Q - Q_o \in \text{Ker } f_m$.

L'ensemble des polynômes en lesquels cette valeur minimale est atteinte est $Q_o + \text{Ker } f_m$.

B. On suppose que $m \leq n$.

1. * On pose $M = [m_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ et $N = [n_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$. On a $M + N = [m_{i,j} + n_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$; donc, ${}^t(M + N) = [m_{j,i} + n_{j,i}]_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 1 \leq i \leq p}} = [m_{j,i}]_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 1 \leq i \leq p}} + [n_{j,i}]_{\substack{1 \leq j \leq q \\ 1 \leq i \leq p}} = {}^tM + {}^tN$.

* On pose $M' = [m'_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ et $N' = [n'_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq r}}$.

$$M'N' = [c_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}}, \text{ où } c_{i,j} = \sum_{k=1}^q m'_{i,k} n'_{k,j} \text{ et,}$$

$${}^tN' {}^tM' = [d_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq p}}, \text{ où } d_{i,j} = \sum_{k=1}^q n'_{k,i} m'_{j,k} = \sum_{k=1}^q m'_{j,k} n'_{k,i} = c_{j,i}.$$

Ainsi, ${}^tN' {}^tM' = {}^t(M'N')$.

2. (a) $Av = (P_v(x_o), P_v(x_1), \dots, P_v(x_n))$.

(b) Si $Av = 0$, où ${}^t v = (v_o, \dots, v_m)$, alors pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $P(x_i) = 0$. Donc, le polynôme P_v s'annule en $n + 1$ points distinctes deux à deux et, comme $\deg(P_v) \leq m < n + 1$, donc $P = \sum_{k=0}^m v_k X^k$ est nul; et, par suite $v = 0$.

3. * ${}^t u u = \sum_{k=0}^n u_k^2$.

* ${}^t u u \geq 0$ car c'est la somme des réels positifs.

${}^t u u = 0$ si, et seulement si, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $u_k^2 = 0$ si, et seulement si,

$$u = (u_o, u_1, \dots, u_n) = 0.$$

4. (a) Par hypothèse ${}^t A A v = 0$ et $u = Av$, donc ${}^t u u = {}^t v ({}^t A A v) = {}^t v \cdot 0 = 0$. D'après la question 3) de la même partie, $u = 0$ c'est-à-dire $Av = 0$. Et, en tenant compte de la question b-2) de cette partie, $v = 0$.

(b) Comme ${}^t A A$ est une matrice carrée réelle d'ordre $m + 1$ et vérifie l'implication suivante : pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, $({}^t A A)v = 0$ implique $v = 0$, on déduit que $\text{rg}({}^t A A) = m + 1$ et ${}^t A A$ est inversible.

(c) ${}^t A A = [c_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq m+1}$, où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} x_{k-1}^{i-1} x_{k-1}^{j-1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_{k-1}^{i+j-2}$, pour tout $(i, j) \in \{0, \dots, m+1\}^2$.

5. Puisque $M = {}^tAA$ est inversible, $MZ = c$ est un système de Cramer. Donc, il admet une unique solution $Z = M^{-1}c$.

6. (a) * Soit $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$.

$$g(v) = {}^t(b - Av)(b - Av) = ({}^tb - {}^tv {}^tA)(b - Av) = {}^tbb - {}^tbAv - {}^tv {}^tAb + {}^tv {}^tAAv.$$

$$* \text{ On a } Aw = \begin{pmatrix} P_w(x_o) \\ \cdots \\ \cdots \\ P_w(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_o \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = b, \text{ donc } {}^tAAw = {}^tAb.$$

$$g(w) = {}^tbb - {}^tbAw - {}^tw {}^tAb + {}^tw {}^tAAw = {}^tbb - {}^tbAw - {}^tw({}^tAb - {}^tAAw) = {}^tbb - {}^tbAw.$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } {}^t(w - v) {}^tAA(w - v) &= ({}^tw {}^tA - {}^tv {}^tA)(Aw - Av) \\ &= {}^tw {}^tAAw - {}^tw {}^tAAv + {}^tv {}^tAAw - {}^tv {}^tAAv \\ &= {}^tw({}^tAb) - {}^tbAv + {}^tv {}^tAb - {}^tv {}^tAAv \\ &= g(v) - g(w). \end{aligned}$$

(c) * D'après les questions b-2) et 3) de cette partie, $g(v) - g(w) = {}^t(Aw - Av)(Aw - Av) \geq 0$; et, $g(v) = g(w)$ si, et seulement si, $A(w - v) = 0$ si, et seulement si, $w = v$.

7. Soit $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \langle Av, b - Aw \rangle &= {}^t(Av)(b - Aw) = {}^tv {}^tA(b - Aw) = {}^tv {}^tAb - {}^tv {}^tAAw = {}^tv({}^tAb - {}^tAAw) \\ &= {}^tv \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Donc, $b - Aw \in F^\perp$. Ce qui justifie que Aw est la projection orthogonale de b sur $F = \text{Im}(A)$.

$$g(w) = \|b - Aw\|^2 = \min(\{\|b - Av\|^2, v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})\}).$$

8 - (a) $b - AV_P = {}^t(y_o - P(x_o), y_1 - P(x_1), \dots, y_n - P(x_n))$.

$$\Phi_m(P) = \sum_{i=0}^n (y_i - P(x_i))^2 = \|b - AV_P\|^2 = g(V_P).$$

9. (a) D'après la question c-6) de cette partie, pour tout $P \in \mathcal{P}_m$,

$$\Phi_m(P) = g(V_P) \geq g(w) = \Phi_m(P_w).$$

Et, $\Phi_m(P) = \Phi_m(P_w)$ si, et seulement si, $g(V_P) = g(w)$ si, et seulement si, $V_P = w$ si, et seulement si, $P = P_w$.

(b) $\lambda_m = \|b - Aw\|^2$.

$$10. \text{ (a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tAA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 18 \\ 6 & 8 & 18 & 32 \\ 8 & 18 & 32 & 66 \end{pmatrix}.$$

$$(b) {}^tAb = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) On pose $Z = {}^t(x, y, z, t)$.

$$\text{Le système } {}^tAAZ = {}^tAb \text{ équivaut à } (S) \begin{cases} 2x + y + 3z + 4s = 2 & (L_1) \\ x + 3y + 4z + 9s = 0 & (L_2) \\ 3x + 4y + 9z + 16s = 1 & (L_3) \\ 4x + 9y + 16z + 33s = 0 & (L_4) \end{cases}$$

On effectue les opérations suivantes : $2L_2 - L_1 \rightarrow L_2$, $2L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3$ et $L_4 - 2L_1 \rightarrow L_4$, on

$$\text{obtient } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z + 4s = 2 \\ 5y + 5z + 14s = -2 \\ 5y + 9z + 20s = -4 \\ 7y + 10z + 25s = -4 \end{cases}.$$

On effectue les opérations suivantes : $L_3 - L_2 \rightarrow L_3$ et $5L_4 - 7L_2 \rightarrow L_4$, on obtient

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z + 4s = 2 \\ 5y + 5z + 14s = -2 \\ 4z + 6s = -2 \\ 15z + 27s = -6 \end{cases}$$

$$\text{On effectue l'opération suivante : } 4L_4 - 15L_3 \rightarrow L_4, \text{ on obtient } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z + 4s = 2 \\ 5y + 5z + 14s = -2 \\ 4z + 6s = -2 \\ 18s = 6 \end{cases}.$$

Ainsi, $(S) \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (2, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3})$.

$$(d) \text{ On a } V_{P_o} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, P_o = 2 - \frac{1}{3}X - X^2 + \frac{1}{3}X^3 \text{ et}$$

$$\lambda_3 = (1 - P_o(-1))^2 + (2 - P_o(0))^2 + (1 - P_o(1))^2 + (0 - P_o(2))^2 = 0.$$

La représentation graphique de la courbe de la fonction $t \mapsto P_0(t)$ et les points (x_i, y_i) est :

