Corrigé du CNC 2009 Maths 1 PSI

Par KHOUTAIBI Abdelaziz CPGE de Marrakech

Exercice

1. (a) La fonction $h:(x,y)\mapsto \dfrac{y}{x}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, et la fonction φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $g=\varphi\circ h$ est de calsse C^2 sur $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

   (b)
   - $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=-\dfrac{y}{x^2}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right)$
   - $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{x}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right)$

   (c)
   - $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=\dfrac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{2y}{x^3}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right)$
   - $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=\dfrac{1}{x^2}\varphi''\left(\dfrac{y}{x}\right)$

2. On remarque que
$$((1+t^2)x')'=(1+t^2)x''+2tx'$$
Donc
$$\begin{aligned}\forall\, t\in\mathbb{R},((1+t^2)x')'=t &\iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\forall\, t\in\mathbb{R},(1+t^2)x'(t)=\frac{t^2}{2}+\lambda\\ &\iff \exists\lambda\in\mathbb{R},\ x'(t)=\frac{1}{2}\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{\lambda}{t^2+1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)+\frac{\lambda}{t^2+1}\\ &\iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\forall\, t\in\mathbb{R},x(t)=\frac{1}{2}(t-\arctan(t))+\lambda\arctan(t)+\mu\end{aligned}$$
Donc la solution génèrale sur $\mathbb{R}$ de l'équation differentielle (2) s'écrit:
$$x(t)=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\arctan(t)+\lambda\arctan(t)+\mu\qquad\text{où }(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

3. (a) On a $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=\left(\dfrac{y^2}{x^4}+\dfrac{1}{x^2}\right)\varphi''\left(\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{2y}{x^3}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right)$

   Si g vérifie (2) alors :
$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\left(\frac{y^2}{x^4}+\frac{1}{x^2}\right)\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{2y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x^3}$$
   En multipliant par x^2 qui est non nul, on obtient alors :
$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{2y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}$$
   Pour $x=1$ et $y=t$, on obtient $\forall\, t\in\mathbb{R},(t^2+1)\varphi''(t)+2t\varphi'(t)=t$

   Ainsi φ est bien une solution de l'équation differentielle (1)
   Remarque
   Lorsque x décrit $\mathbb{R}^*$ et y décrit $\mathbb{R}$, alors $t=\dfrac{y}{x}$ décrit $\mathbb{R}$, donc on a même équivalence entre g vérifie (2) et φ vérifie (1)

(b) D'aprés 3)a) φ vérifie (1) , donc d'aprés la question 2), il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall\, t\in\mathbb{R}, \varphi(t)=\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\arctan(t)+\lambda\arctan(t)+\mu$$

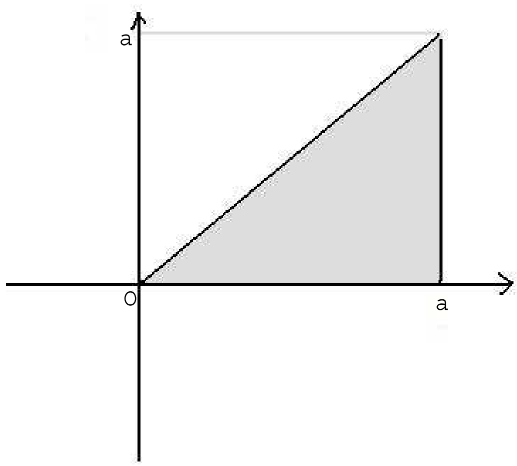
Et donc, $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*, g(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{y}{2x}+\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)+\mu$

(c) **Première méthode**
On prend $g:\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ définie par l'expression trouvée en 3)b) et on vérifie par le calcul que g vérifie (2).
Deuxième méthode
D'aprés la remarque faite à la question 3)a) les fonctions g trouvées dans 3)b) vérifient bien (2) .

Problème

1 ère partie

1. $\mathcal{C}(a)$ est le carré $[0,a]\times[0,a]$ et $\Delta(a)$ est le triangle hachuré en gris.



2. La fonction $f:[0,a]\times[0,a]\to e^{-x^2-y^2}$ est continue sur $[0,a]\times[0,a]$ donc:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{C}(a)} f(x,y)dxdy &= \int_0^a\left(\int_0^a e^{-x^2-y^2}dy\right)dx\\ &= \int_0^a e^{-x^2}\left(\int_0^a e^{-y^2}dy\right)dx\\ &= \left(\int_0^a e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^a e^{-y^2}dy\right)\\ &= \left(\int_0^a e^{-t^2}dt\right)^2\end{aligned}$$

3. Le compact $\Delta(a)$ peut être défini par

$\Delta(a):\begin{cases}0\le x\le a\\ 0\le y\le x\end{cases}$ ou $\Delta(a):\begin{cases}0\le y\le a\\ y\le x\le a\end{cases}$
D'aprés le théorème de Fubini :

$\int_0^a \left(\int_0^x e^{-x^2-y^2}dy\right)dx = \iint_{\Delta(a)} f(x,y)dxdy = \int_0^a \left(\int_y^a e^{-x^2-y^2}dx\right)dy$
En changaent les noms de x et de y on obtient
$\int_0^a \left(\int_0^x e^{-x^2-y^2}dy\right)dx = \int_0^a \left(\int_x^a e^{-x^2-y^2}dx\right)dy$

4. (a)

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{C}(a)} e^{-x^2-y^2}dxdy &= \int_0^a \left(\int_0^a e^{-x^2-y^2}dy\right)dx \\
&= \int_0^a \left(\int_0^x e^{-x^2-y^2}dy + \int_x^a e^{-x^2-y^2}dy\right)dx \\
&= \int_0^a \left(\int_0^x e^{-x^2-y^2}dy\right)dx + \int_0^a \left(\int_x^a e^{-x^2-y^2}dy\right)dx \qquad \text{(D'aprés 3)a))} \\
&= 2\int_0^a \left(\int_0^x e^{-x^2-y^2}dy\right)dx \\
&= 2\iint_{\Delta(a)} e^{-x^2-y^2}dxdy
\end{aligned}$$

5. (a) On passe en coordonnés polaires.
Soit $\varphi : (r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Comme $\Delta(a)$ est incluse dans le premier cadran, on prend $r \in [0,+\infty[$ et $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}[$ on a alors
$(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \Delta(a) \iff \begin{cases} 0 \le r\cos\theta \le a \\ 0 \le r\sin\theta \le r\cos\theta \end{cases}$
Donc si $r \neq 0$ alors $(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \Delta(a) \iff \begin{cases} 0 < r \le \frac{a}{\cos\theta} \\ 0 \le \tan\theta \le 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < r \le \frac{a}{\cos\theta} \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$
Soit $\mathcal{D}(a) = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 0 \le r \le \frac{a}{\cos\theta}\}$ alors $\varphi(\mathcal{D}(a)) = \Delta(a)$

Le jacobien de φ en (r,θ) est $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$
D'aprés la formule de changement de variable on a:

$$\iint_{\Delta(a)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint_{\mathcal{D}(a)} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} re^{-r^2}dr\right)d\theta$$

(b) On a $\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} re^{-r^2}dr = \left[\dfrac{-e^{-r^2}}{2}\right]_0^{\frac{a}{\cos\theta}} = \dfrac{1-e^{-\frac{a^2}{\cos^2(\theta)}}}{2}$
Donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} re^{-r^2}dr\right)d\theta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{a^2}{\cos^2\theta}}d\theta\right)$
Et d'aprés 2) et 3)b)
$\iint_{\mathcal{C}(a)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \left(\int_0^a e^{-t^2}dt\right)^2 = 2\iint_{\Delta(a)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \dfrac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{a^2}{\cos^2\theta}}d\theta$

(c) $\forall\, \theta \in [0,\frac{\pi}{4}], 0 \le \frac{-a^2}{\cos^2(\theta)} \le -a^2$, donc
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{a^2}{\cos^2\theta}}d\theta \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-a^2}d\theta = \dfrac{\pi}{4}e^{-a^2}$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$, on déduit de l'inégalité précédente que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}d\theta = 0$

6. La fonction $h : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$, de plus d'aprés les questions 4)b) et 4)c) $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_0^a \dfrac{\pi}{2}e^{-t^2}dt = \sqrt{\dfrac{\pi}{4}}$
Donc h est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

7. La fonction $g : t \mapsto t^2 e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$, alors une intégration par partie donne
$\displaystyle\int_0^x t^2 e^{-t^2} = \left[-t\frac{e^{-t^2}}{2}\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t^2}dt$
Donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^x t^2 e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$
Ce qui prouve l'intégrabilité de g sur $[0, +\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

8. (a) La fonction $k : t \mapsto \dfrac{1-e^{-t^2}}{t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, de plus :
   - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} k(t) = 1$, donc k est prolongeable par continuité en 0, donc k est intégrable sur $]0, 1]$
   - $\forall\, t \in [1, +\infty[, 0 \leq k(t) \leq \dfrac{1}{t^2}$, et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc k est intégrable sur $[1, +\infty[$

   En conclusion k est bien intégrable sur $]0, +\infty[$

   (b) Soit $(\varepsilon, x) \in]0, +\infty[$ tel que $\varepsilon < x$ .On intégre par partie sur $[\varepsilon, x]$ en posant $u' = \dfrac{1}{t^2}$ et $v = 1 - e^{-t^2}$, on obtient alors :
   $\displaystyle\int_\varepsilon^x k(t)dt = \left[-\frac{1-e^{-t^2}}{t}\right]_\varepsilon^x + 2\int_\varepsilon^x e^{-t^2}dt$
   Lorsque $x \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$ on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} k(t)dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$
   D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}dt = \sqrt{\pi}$

Deuxième Partie

Quelques résultats préliminaires

1. (a) La fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$, donc sa courbe est au dessous de ses tangentes.
   Comme la tangente en 1 a pour équation $y = x - 1$ alors
   $\forall\, x > 0, \ln(x) \leq x - 1$

   (b) Soient $n \geq 1$ et $u \in [0, n]$

   En appliquant le résultat de a) à $x = e^{-u/n}$ on obient $-\frac{u}{n} \leq e^{-u/n} - 1$, d'où
   $0 \leq 1 - \frac{u}{n} \leq e^{-u/n}$.
   Et en utilisant la croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^+$ on obtient $\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u}$
   ou encore $e^{-u} - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \geq 0$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $e^x > 0$ et d'aprés 1)a) on a $\ln(e^x) \leq e^x - 1$
   D'où $e^x \geq x + 1$

   (b) Soit $t \in [0, 1]$
   D'aprés 2)a) on a $e^t \geq 1 + t$
   En multpliant par $(1-t)$, qui est positif, et en utilisant encore une fois la croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

   $$(1-t)^n e^{nt} \geq (1-t^2)^n$$

   (c) En posant $x = t^2$, l'inégalité demandée est équivalente à $\forall\, x \in [0, 1], (1-x)^n \geq 1 - nx$
   Si $n = 1$, l'inégalité est triviale
   Si $n \geq 2$, soit $h : x \mapsto (1-x)^n$, alors h est C^2 sur $[0, 1]$ et

$\forall\, x \in [0,1], h''(x) = n(n-1)(1-x)^{n-2} \geq 0$, donc h est convexe sur $[0,1]$ et sa tangente à l'origine a pour équation $y = 1 - nx$, donc $\forall\, x \in [0,1], h(x) \geq 1 - nx$
c.à.d $\forall\, x \in [0,1], (1-x)^n \geq 1 - nx$

(d) D'aprés 2)b) et 2)c) on a $\forall\, t \in [0,1], \forall\, n \geq 1, (1-t)^n e^{nt} \geq 1 - nt^2$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in [0,n]$, alors $t = \dfrac{u}{n} \in [0,1]$
Donc $(1-\frac{u}{n})^n e^u \geq 1 - \frac{u^2}{n}$ puis $(1-\frac{u}{n})^n \geq (1-\frac{u^2}{n})e^{-u}$ et par suite $e^{-u} - (1-\frac{u}{n})^n \leq \frac{u^2}{n}e^{-u}$

B.Intégrales de Wallis

1. (a) $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$,
L'application $t \to \cos^n t$ est continue positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et non identiquement nulle donc $I_n > 0$.

(b) Une intégration par parties donne
$I_n = [\sin t \cos^{n-1} t]_0^{\pi/2} + (n-1)\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^{n-2} t\, dt$. D'où :

$$\begin{aligned} I_n &= (n-1)\left(\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2 t\right)\cos^{n-2} t\, dt\right) \\ &= (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right), \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$nI_n = (n-1)\, I_{n-2}$$

(c) Posons pour $n \geq 1$, $J_n = nI_nI_{n-1}$, on a alors

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, nI_n = (n-1)\, I_{n-2} \quad &\Rightarrow \quad nI_nI_{n-1} = (n-1)\, I_{n-2}I_{n-1} \\ &\Rightarrow \quad J_n = J_{n-1} \end{aligned}$$

Donc la suite $(J_n)_{n\geq 1}$ est constante et $\forall n \geq 1, J_n = J_1 = I_0I_1 = \dfrac{\pi}{2}$.
On a donc $\forall n \geq 1$, $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos^{n+1} t \leq \cos^n t$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leq I_n$

(b) Soit $n \geq 1$ alors compte tenu de la décroissance et la positivité de (I_n) on a
$nI_n^2 \leq nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2} = (n+1)I_nI_{n+1} \leq (n+1)I_n^2$
D'où l'encadrement $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \leq I_n \leq \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

3. (a) D'aprés 1)b), pour $n \geq 1$, $I_{2n} = \dfrac{(2n-1)}{2n} I_{2(n-1)}$
Et par une récurrence simple on obtient : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, I_{2n} = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\ \dots\ 1}{(2n)(2n-2)\ \dots\ 2} I_0$.
D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

(b) D'aprés la question $B.2.b$ on a

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}} \le I_{2n} \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}} \le \frac{\pi}{2}\lambda_n \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{\pi(n+\frac{1}{2})}} \le \lambda_n \le \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{n}{n+\frac{1}{2}}} \le \lambda_n\sqrt{n\pi} \le 1$$
$$\Rightarrow \quad 0 \le 1-\lambda_n\sqrt{n\pi} \le 1-\sqrt{\frac{n}{n+\frac{1}{2}}}$$

Or $\quad 1-\sqrt{\frac{n}{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1-\frac{n}{n+\frac{1}{2}}}{1+\sqrt{\frac{n}{n+\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{2n+1+2\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}} \le \frac{1}{4n}$

D'où $0 \le 1-\lambda_n\sqrt{n\pi} \le \dfrac{1}{4n}$

(c) D'aprés b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\lambda_n\sqrt{n\pi}) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n\sqrt{n\pi} = 1$

Et parsuite $\lambda_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$

C. Deux suites de polynômes approchant uniformément la fonction valeur absolue sur [-1,1]

1. (a) Soit $n \ge 1$, et $u : t \mapsto \dfrac{1-(1-t^2)^n}{t^2}$ alors
   - u est continue sur $]0,1]$
   - lorsque t tend vers 0 on a $(1-t^2)^n = 1-nt^2+o(t^2)$, donc $u(t) = n+o(1)$ et $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = n$

   Ainsi u est prolongeable par continuité en 0 et par suite elle est integable sur $]0,1]$

   (b) D'aprés la formule du binome de newton on a

   $\forall\, t \in \mathbb{R}, 1-(1-t^2)^n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dbinom{n}{k}t^{2k}.$

   Et $\forall\, t \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1-(1-t^2)^n}{t^2} = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dbinom{n}{k}t^{2k-2}$

   On a alors pour $(n,x) \in \mathbb{N}^*\times]0,1]$:

   $\displaystyle\int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}dt = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\int_0^x t^{2k-2}dt = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{1}{2k-1}x^{2k-1}$

   D'où $\displaystyle\lambda_n x\int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}dt = \lambda_n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{1}{2k-1}x^{2k} = P_n(x)$

   (c) Le changement de variable $t = \dfrac{ux}{\sqrt{n}}$, donne

   $\displaystyle\int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}dt = \sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1-(1-\frac{u^2x^2}{n})^n}{u^2}du$

   D'où $\displaystyle P_n(x) = \lambda_n\sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1-(1-\frac{u^2x^2}{n})^n}{u^2}du$

2. On effectue le changement de variable $t = u|x|$ pour se ramener à l'intégrale calculée dans la question I.7.b)

   On obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}du = |x|\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}dt = |x|\sqrt{\pi}$

3. (a) D'aprés 2) on a pour $x \in]0,1], x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}du$

   Et d'aprés 1)c) on a

$$\begin{aligned}
P_n(x)-x &= \lambda_n\sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}}\frac{1-(1-\frac{u^2x^2}{n})^n}{u^2}du-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}du\\
&= \lambda_n\sqrt{n}\Delta_n(x)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Delta(x)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\lambda_n\sqrt{n\pi}\Delta_n(x)-\Delta(x)\Big)
\end{aligned}$$

La relation précédente s'écrit également
$P_n(x)-x=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\lambda_n\sqrt{n\pi}(\Delta_n(x)-\Delta(x))-(1-\lambda_n\sqrt{n\pi})\Delta(x)\Big)$
Donc par inégalité triangulaire:
$|P_n(x)-x|\leq\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\lambda_n\sqrt{n\pi}|\Delta_n(x)-\Delta(x)|+|1-\lambda_n\sqrt{n\pi}|\Delta(x)\Big)$
Et d'aprés la question on a:$0\leq 1-\lambda_n\sqrt{n\pi}\leq\frac{1}{4n}$ et $\lambda_n\sqrt{n\pi}\leq 1\leq 1+\frac{1}{4n}$. (! ! !)
D'où $|P_n(x)-x|\leq\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big((1+\frac{1}{4n})|\Delta_n(x)-\Delta(x)|+\frac{1}{4n}\Delta(x)\Big)$

(b) D'aprés la relation de chasles sur Δ
$\Delta(x)-\Delta_n(x)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\frac{(1-\frac{u^2x^2}{n})^n-e^{-u^2x^2}}{u^2}du+\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}du$
Donc $|\Delta(x)-\Delta_n(x)|\leq\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\frac{\left|e^{-u^2x^2}-(1-\frac{u^2x^2}{n})^n\right|}{u^2}du+\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\frac{\left|1-e^{-u^2x^2}\right|}{u^2}du$
Or $\forall\, u\in\mathbb{R}, 1-e^{-u^2x^2}\geq 0$
Et $\forall\, u\in[0,\sqrt{n}], 0\leq u^2x^2\leq u^2\leq n$, (car $x\in]0,1]$), d'où $u^2x^2\in[0,n]$ il en résulte d'aprés A.1)b) et A.2)d) de la deuxième partie que
$\forall\, u\in[0,\sqrt{n}], 0\leq e^{-u^2x^2}-(1-\frac{u^2x^2}{n})^n\leq\frac{u^4x^4}{n}e^{-u^2x^2}$
et par suite

$$\begin{aligned}
|\Delta(x)-\Delta_n(x)| &\leq \int_0^{\sqrt{n}}\frac{e^{-u^2x^2}-(1-\frac{u^2x^2}{n})^n}{u^2}du+\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}du\\
&\leq \frac{x}{n}\int_0^{\sqrt{n}}(ux)^2e^{-(ux)^2}d(xu)+\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\frac{1}{u^2}du\\
&\leq \frac{x}{n}\int_0^{+\infty}(ux)^2e^{-(ux)^2}d(xu)+\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\frac{1}{u^2}du\\
&\leq \frac{1}{n}\int_0^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt+\left[\frac{-1}{u}\right]_{\sqrt{n}}^{+\infty}\\
&\leq \frac{\sqrt{\pi}}{4n}+\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad\qquad (\text{Car}\int_0^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{4})
\end{aligned}$$

(c) D'aprés 3)a) $|P_n(x)-x|\leq\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Big((1+\frac{1}{4n})|\Delta_n(x)-\Delta(x)|+\frac{1}{4n}\Delta(x)\Big)$
Or

- D'aprés 3)b) $|\Delta_n(x)-\Delta(x)|\leq\dfrac{\sqrt{\pi}}{4n}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$
- D'aprés 2) $\Delta(x)=x\sqrt{\pi}$, donc $\Delta(x)\leq\sqrt{\pi}$

Donc

$$\begin{aligned}
\forall\, x\in]0,1], |P_n(x)-x| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left((1+\frac{1}{4n})(\frac{\sqrt{\pi}}{4n}+\frac{1}{\sqrt{n}})+\frac{\sqrt{\pi}}{4n}\right)\\
&\leq (1+\frac{1}{4n})(\frac{1}{4n}+\frac{1}{\sqrt{n\pi}})+\frac{1}{4n}
\end{aligned}$$

Cette inégalité est encore vraie pour $x=0$ car $P_n(0)=0$
Donc $\sup\limits_{x\in[0,1]}|P_n(x)-x| \le (1+\frac{1}{4n})(\frac{1}{4n}+\frac{1}{\sqrt{n\pi}})+\frac{1}{4n}$.

La fonction $t\mapsto P_n(t)-|t|$ est clairement paire, donc :
$\sup\limits_{t\in[-1,1]}|P_n(t)-|t|| = \sup\limits_{x\in[0,1]}|P_n(x)-x| \le (1+\frac{1}{4n})(\frac{1}{4n}+\frac{1}{\sqrt{n\pi}})+\frac{1}{4n}$

(d) On pose $\varepsilon_n=(1+\frac{1}{4n})(\frac{1}{4n}+\frac{1}{\sqrt{n\pi}})+\frac{1}{4n}$ alors
$\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$ donc d'aprés 3)c)

$\sup\limits_{t\in[-1,1]}|P_n(t)-|t||\to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$
D'où la convergence uniforme de la suite de fonctions $(P_n)_{n\ge 1}$ vers $|.|$ sur $[-1,1]$
$1+\dfrac{1}{4n}=O(1)$, $\dfrac{1}{4n}+\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}=O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ et $\dfrac{1}{4n}=O(\frac{1}{\sqrt{n}})$
Donc $\varepsilon_n=O(\frac{1}{\sqrt{n}})$

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned}
Q_n(x)-P_n(x) &= \lambda_n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\left(\frac{2k}{2k-1}-\frac{1}{2k-1}\right)X^{2k}\\
&= \lambda_n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}X^{2k}\\
&= -\lambda_n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-x^2)^k=-\lambda_n(1-(1-x^2)^n)
\end{aligned}$$

Donc $\forall\, x\in[-1,1], |Q_n(x)-P_n(x)|=\lambda_n\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-x^2)^k=\lambda_n(1-(1-x^2)^n)\le\lambda_n$
Et par suite $||Q_n-P_n||_\infty\le\lambda_n\to 0$ car $\lambda_n\sim\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$
Donc $||Q_n-|.|||_\infty\le||Q_n-P_n||_\infty+||P_n-|.|||_\infty\to 0$ (d'aprés 3)d)), d'où la convergence uniforme de (Q_n) vers $|.|$ sur $[-1,1]$.
De plus $\lambda_n\sim\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$ donc $\lambda_n=O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ et $||Q_n-P_n||_\infty\le\lambda_n$ donc $||Q_n-P_n||_\infty=O(\frac{1}{\sqrt{n}})$
et d'aprés 3)d) $||P_n-|.|||_\infty=O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ donc $||Q_n-|.|||_\infty=O(\frac{1}{\sqrt{n}})$.