

I.

1. (a)  $M \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) \iff \exists P \in GL_2(\mathbb{K}), M = PAP^{-1}$

d'où  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{PAP^{-1} / P \in GL_2(\mathbb{K})\}$ .

(b)  $\forall x \in \mathbb{K}, \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(xI_2) = \{xI_2\}$ .

2. (a) Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors  $\det(E_\lambda) = \det(F_\lambda) = 1 \neq 0$  donc  $E_\lambda$  et  $F_\lambda$  sont inversibles et

$$E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

(b)  $E_\lambda A E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} a + \lambda c & -c\lambda^2 + (d - a)\lambda + b \\ c & d - \lambda c \end{pmatrix}, \quad F_\lambda A F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} a - \lambda b & b \\ -b\lambda^2 + (a - d)\lambda + c & b\lambda + d \end{pmatrix}$ .

(c) Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

$A$  est semblable à elle même, donc  $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(A)$ .

Si  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$  est réduite à un singleton alors  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{A\}$ ,

de plus,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, E_\lambda A E_\lambda^{-1} \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$  et  $F_\lambda A F_\lambda^{-1} \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ , donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, E_\lambda A E_\lambda^{-1} = F_\lambda A F_\lambda^{-1} = A$$

En identifiant les premières lignes on obtient:

$$b = c = 0, a = d \text{ et par suite } A = aI_2.$$

3. Soit  $\psi : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^4, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d)$  l'isomorphisme canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  sur  $\mathbb{K}^4$  et  $N : (a, b, c, d) \mapsto (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)^{1/2}$  la norme euclidienne usuelle de  $\mathbb{K}^4$  alors

$$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \|A\|_s = N(\psi(A))$$

Soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{K}))^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- $\|A\|_s = 0 \iff N(\psi(A)) = 0 \iff \psi(A) = 0 \iff A = 0$
- $\|\lambda A\|_s = N(\psi(\lambda A)) = N(\lambda \psi(A)) = |\lambda| N(\psi(A)) = |\lambda| \|A\|_s$ .
- 

$$\begin{aligned} \|A + B\|_s &= N(\psi(A + B)) \\ &= N(\psi(A) + \psi(B)) \\ &\leq N(\psi(A)) + N(\psi(B)) \\ &= \|A\|_s + \|B\|_s \end{aligned}$$

Des trois points précédents on déduit que  $\|\cdot\|_s$  est une norme sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

4. (a) Posons

$$\mathcal{E} = \{E_\lambda A E_\lambda^{-1}, \lambda \in \mathbb{K}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a + \lambda c & -c\lambda^2 + (d - a)\lambda + b \\ c & d - \lambda c \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\mathcal{F} = \{F_\lambda A F_\lambda^{-1}, \lambda \in \mathbb{K}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a - \lambda b & b \\ -b\lambda^2 + (a - d)\lambda + c & b\lambda + d \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

On a alors

$\mathcal{E} \subset \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$  et  $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ , et puisque  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$  est bornée, alors  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  le sont aussi.

(b) Puisque toute application polynômiale à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , bornée sur  $\mathbb{K}$  est constante alors:

$$b = c = 0 \text{ et } a = d, \text{ par suite } A = aI_2.$$

5. Si  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$  est compacte alors elle est bornée et d'après b)  $A$  est scalaire.

6. L'application trace est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , qui est de dimension finie, donc elle est continue.

L application det:

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$$

est polynômiale donc continue sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

7. Soit  $A$  et  $B$  deux matrices semblables de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  alors, il existe  $P \in GL_2(\mathbb{K})$  tel que  $B = PAP^{-1}$ , d'où

- $\det(B) = \det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) = \det(PP^{-1})\det(A) = \det(A)$ .
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_2) = \det(PAP^{-1} - \lambda I_2) = \det(P(A - \lambda I_2)P^{-1}) = \det(A - \lambda I_2) = \chi_A(\lambda)$ ,  
d'où  $\chi_A = \chi_B$ .

## II.

1. (a) Si  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$  alors  $A$  est une matrice d'ordre 2 qui admet deux valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  et par suite elle est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ .

(b)  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$  donc,

$A$  est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à  $\lambda I_2$  c.à.d  $A = \lambda I_2$ .

(c) Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ ,  $id$  l'identité de  $\mathbb{K}^2$  et notons  $N_\lambda := \text{Ker}(f - \lambda id)$ .

$\chi_f$  est de degré 2 et admet une unique racine  $\lambda$ , donc il est scindé sur  $\mathbb{K}$  et  $\chi_f = (\lambda - X)^2$ , comme  $f$  non diagonalisable alors  $\dim N_\lambda = 1$ .

Soit  $v \in \mathbb{K}^2 \setminus N_\lambda$  et  $u = (f - \lambda id)(v)$ .

On a  $v \notin N_\lambda$ , donc  $u = (f - \lambda id)(v) \neq 0$ , et d'après Cayley-hamilton  $(f - \lambda id)^2 = 0$  donc,

$(f - \lambda id)(u) = (f - \lambda id)^2(v) = 0$  et par suite  $u \in N_\lambda \setminus \{0\}$  et  $(u, v)$  est libre de  $\mathbb{K}^2$  qui est de dimension

2, donc  $\beta' = (u, v)$  est une base de  $\mathbb{K}^2$  et  $\text{mat}_{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ .

$A$  et  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  représentent le même endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{K}^2$ , donc elles sont semblables dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

2. (a) Si  $A = xI_2$  où  $x \in \mathbb{K}$ , alors d'après I.1.b  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A) = \{xI_2\}$  est un singleton qui est un fermé de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

(b) On pose  $P_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  alors  $A_k = P_k T P_k^{-1}$ ,  $P_k \in GL_2(\mathbb{K})$  donc  $A_k$  est semblable à  $T$  et  $T$  semblable à  $A$  d'après II.1.c donc par transitivité  $A_k$  est semblable à  $A$ , d'où  $\forall k \in \mathbb{N}, A_k \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$

D'autre part:  $\forall k \in \mathbb{N}, A_k = \begin{pmatrix} \lambda & 2^{-k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , donc  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = \lambda I_2$ .

$\lambda I_2$  est diagonale et  $A$  n'est diagonalisable, donc  $A$  n'est pas semblable à  $\lambda I_2$  et par suite

$\lambda I_2 \notin \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ .

$(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$  qui converge vers  $\lambda I_2 \notin \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ , donc d'après la caractérisation séquentielle d'un fermé  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$  n'est pas fermée.

(c) i.  $\forall k \in \mathbb{K}, P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1} = P_k A P_k^{-1} - \alpha I_2$ , donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1} = B - \alpha I_2$$

d'après 7) l'application  $\det$  est continue sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \det(P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1}) = \det(B - \alpha I_2)$$

D'autre part,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \det(P_k(A - \alpha I_2)P_k^{-1}) = \det(A - \alpha I_2) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \det(P_k^{-1}(A - \alpha I_2)P_k) = 0.$$

L'unicité de la limite donne  $\det(B - \alpha I_2) = 0$ .

ii. D'après i) on a  $\det(B - \lambda I_2) = \det(B - \mu I_2) = 0$ , donc  $\{\lambda, \mu\} \subset \text{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$ , comme  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  alors elle admet au plus deux valeurs propres, d'où  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(B) = \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$ , et d'après 1.a,  $A$  et  $B$  sont semblables à  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  et par transitivité de la relation de similitude dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ,  $B$  est semblable à  $A$  d'où  $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ .

On a montré que pour toute suite d'éléments de  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$  qui converge dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , sa limite est dans  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$  donc  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$  est fermée.

3.  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{C}$ , soit  $\lambda$  et  $\mu$  ses valeurs propres éventuellement confondues.

$\Rightarrow$

Supposons que  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(A)$  est fermée

Si  $A$  n'est pas diagonalisable alors  $\lambda = \mu$  et d'après 2.b  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$  n'est pas fermée, ce qui contredit l'hypothèse, d'où  $A$  est diagonalisable.

$\Leftarrow$

Supposons que  $A$  est diagonalisable

- Si  $\lambda = \mu$  alors d'après 1.b,  $A = \lambda I_2$  et d'après 2.a,  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$  est fermée.
- Si  $\lambda \neq \mu$  alors d'après 2.c,  $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$  est fermée.

4. (a) On a  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ , donc le polynôme caractéristique  $\chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$  de  $A$  n'admet pas de racines dans  $\mathbb{R}$ , par suite son discriminant  $\Delta = (\text{tr}(A))^2 - 4\det(A)$  est strictement négatif, d'où  $4\det(A) - (\text{tr}(A))^2 > 0$ .

$$(b) A^2 = \frac{4}{\delta^2} \left( A^2 - \text{tr}(A)A + \frac{(\text{tr}(A))^2}{4} I_2 \right), \text{ or d'après Cayley-Hamilton } A^2 = \text{tr}(A)A - \det(A)I_2, \text{ donc}$$

$$A^2 = \frac{4}{\delta^2} \left( -\det(A) + \frac{(\text{tr}(A))^2}{4} \right) I_2 = \frac{4}{\delta^2} \frac{(-\delta^2)}{4} I_2 = -I_2$$

(c) Supposons que  $(e, f(e))$  liée, comme  $e \neq 0$  alors :  $\exists \alpha \in \mathbb{R}, f(e) = \alpha e$  et comme  $f^2 = -id_{\mathbb{R}^2}$  alors:

$$f^2(e) = \alpha f(e) = \alpha^2 e \Rightarrow -e = \alpha^2 e \Rightarrow \alpha^2 = -1,$$

ceci est absurde car  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

d'où  $\beta_1 = (e, f(e))$  est libre de  $\mathbb{R}^2$  qui est de dimension 2 et par suite c'est une base de  $\mathbb{R}^2$  et

$$\text{mat}_{\beta_1}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) On a  $A' = PA_1P^{-1}$  où  $P$  est la matrice de passage de la base canonique à la base  $\beta_1$  de  $\mathbb{R}^2$ .

$$A'' = \frac{\delta}{2}A_1 + \frac{\text{tr}(A)}{2}I_2 = \frac{\delta}{2}P^{-1}A'P + \frac{\text{tr}(A)}{2}I_2 = P^{-1} \left( \frac{\delta}{2}A' + \frac{\text{tr}(A)}{2}I_2 \right) P = P^{-1}AP,$$

d'où  $A$  et  $A''$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

(e) i. D'après I.7), on a  $\forall k \in \mathbb{N}, \text{tr}(P_kAP_k^{-1}) = \text{tr}(A)$  et  $\det(P_kAP_k^{-1}) = \det(A)$  or d'après I.6, les applications  $\text{tr}$  et  $\det$  sont continues sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{tr}(P_kAP_k^{-1}) = \text{tr}(\tilde{A}) \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} \det(P_kAP_k^{-1}) = \det(\tilde{A})$$

l'unicité de la limite donne alors:  $\text{tr}(\tilde{A}) = \text{tr}(A)$  et  $\det(A) = \det(\tilde{A})$ .

ii. D'après i)  $\chi_A = \chi_{\tilde{A}}$  donc  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(\tilde{A}) = \emptyset$  et d'après 4.d,  $A$  est semblable à  $A'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{tr}(A) & -\delta \\ \delta & \text{tr}(A) \end{pmatrix}$  et

$$\tilde{A} \text{ est semblable à } \tilde{A}'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{tr}(\tilde{A}) & -\delta' \\ \delta' & \text{tr}(\tilde{A}) \end{pmatrix} \text{ où } \delta' = \sqrt{4\det(\tilde{A}) - (\text{tr}(\tilde{A}))^2},$$

Comme d'après i)  $\det(\tilde{A}) = \det(A)$  et  $\text{tr}(\tilde{A}) = \text{tr}(A)$  alors  $\delta = \delta'$  et par suite  $A'' = \tilde{A}''$ .

Ainsi  $A$  et  $\tilde{A}$  sont semblables à  $A''$  donc elles sont semblables.

5.  $\Rightarrow$ )

On procède par contraposée et on suppose que  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$  et  $A$  non diagonalisable alors  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda\}$  et donc d'après II.2.b  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$  n'est pas fermée.

$\Leftarrow$ )

- Si  $A$  est diagonalisable alors  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda\}$  ou  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda, \mu\}$  donc d'après II.2.a et II.2.c  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$  est fermée.
- Si  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$  alors d'après II.4, pour toute suite  $(A_k)$  d'éléments de  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$  qui converge vers  $\tilde{A}$ , on a  $\tilde{A} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ , et par suite  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$  est fermée.

### III.

A

1. Le polynôme caractéristique de  $G$  est de degré 2 et puisque  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$  alors  $\chi_G$  admet au moins une racine réelle  $\lambda$ , d'où il existe  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\chi_A = (\lambda - X)(\mu - X)$  et par suite les racines de  $\chi_G$  sont  $\lambda$  et  $\mu$  qui sont réelles.

2. (a) Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  alors  $A {}^tA = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$  d'où,

$$\|A\|_S = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(A {}^tA)}$$

(b)

$$\begin{aligned} \|UA {}^tU\|_S &= (\text{tr}(U {}^tA {}^tUUA {}^tU))^{1/2} \\ &= \text{tr}(U {}^tAA {}^tU)^{1/2} \quad (\text{car } {}^tUU = I_2) \\ &= (\text{tr}({}^tAA {}^tUU))^{1/2} \quad (\text{car } \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)) \\ &= (\text{tr}({}^tAA))^{1/2} = \|A\|_S \end{aligned}$$

En remplaçant  $U$  par  ${}^tU$  qui est aussi orthogonale on obtient l'autre égalité

$$\|A\|_S = \|{}^tUAU\|_S$$

3.  $\mathcal{A} = \{\|PAP^{-1}\|_S; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$  est une partie de  $\mathbb{R}$

$\mathcal{A}$  n'est pas vide car  $GL_2(\mathbb{R})$  n'est pas vide et  $\mathcal{A}$  est minorée par 0, donc elle possède une borne inférieure.

**B.**

1. (a)  $u_1 = \frac{u'_1}{\|u'_1\|}$  et  $u_2 = \frac{w}{\|w\|}$  où  $w = u'_2 - (u'_2|u_1)u_1$   
 (b)  $U$  est la matrice de passage de la base canonique à la base  $(u_1, u_2)$ , ces deux bases sont orthonormées pour le produit scalaire  $(\cdot|\cdot)$  donc  $U$  est orthogonale et par suite  ${}^tUU = I_2$ .  
 (c) On a:  $g(u_1) = \frac{1}{\|u'_1\|} g(u'_1) = \frac{\lambda}{\|u'_1\|} u'_1 = \lambda u_1$ , posons  $g(e_2) = \alpha u'_1 + \gamma u'_2$ , alors :  
 $T = \text{mat}_{(u'_1, u'_2)}(g) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ , de plus  $(\lambda - X)(\mu - X) = \chi_g(X) = \chi_T(X) = (\lambda - X)(\gamma - X)$ , d'où  $\gamma = \mu$   
 et  $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$   
 D'après la formule de changement de matrice :  $G = UTU^{-1} = UT {}^tU$  car d'après b)  ${}^tU = U^{-1}$ .

D'après A.2.b on a:  $\|G\|_s = \|T\|_s = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \alpha^2}$

2. (a) Soit  $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$  alors  $A$  et  $B$  sont semblables donc d'après I.7) elles ont le même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  et d'après 1.c), il existe  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$  tel que:

$$\|B\|_s = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \alpha_1^2} \geq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$$

- (b) Soit  $t \in \mathbb{R}^*$ , alors  $\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , donc  $\begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$

- (c) Posons pour  $t \in \mathbb{R}^*$ ,  $A(t) = \begin{pmatrix} \lambda & t\alpha \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ , alors d'après b)  $\forall t \in \mathbb{R}^* A(t) \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$  et par suite

$$\|A(t)\|_s = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + t^2\alpha^2} \geq \inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_s$$

En faisant tendre  $t$  vers 0, on obtient:

$$\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \geq \inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_s$$

,

et d'après 2.a), on a:

$$\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_s = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$$

- (d)  $\Rightarrow$

On suppose que  $A$  est diagonalisable alors,  $A$  est semblable à  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  donc  $D \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$  et  $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} = \|D\|_s$ , d'où  $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_s$  est atteinte en  $D$ .

$\Leftarrow$ ) On suppose que  $\exists G \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ ,  $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_s = \|G\|_s$ .

Puisque  $G \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$  alors  $\chi_A = \chi_B = (\lambda - X)(\mu - X)$  et d'après 1)c) il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $G$  est semblable à  $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  et  $\|G\|_s = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \alpha^2}$  d'où,

$\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \alpha^2} = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ , par suite  $\alpha = 0$  et  $G$  est semblable à  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  donc elle est bien diagonalisable.

3. (a) Soit  $\mathcal{A} = \{\|PAP^{-1}\|_s; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$ .

On a  $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} = \inf \mathcal{A}$ , donc d'après la caractérisation de la borne inférieure:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \|PAP^{-1}\|_S \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A), \|PAP^{-1}\|_S \leq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} + \varepsilon,$$

en particulier pour  $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\exists P_k \in GL_2(\mathbb{R})$ ,  $\|P_k A P_k^{-1}\|_S \leq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} + \frac{1}{k+1}$ ,  
d'où l'existence de la suite  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  souhaitée.

(b) D'après a)  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\|P_k A P_k^{-1}\|_S \leq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} + \frac{1}{k+1} \leq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} + 1$

Donc la suite  $(P_k A P_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée.

(c) Il existe une application  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que la suite  $(P_{\varphi(k)} A P_{\varphi(k)}^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\tilde{A}$ .

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|P_{\varphi(k)} A P_{\varphi(k)}^{-1}\|_S \leq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} + \frac{1}{\varphi(k)+1}, \text{ de la continuité de l'application } \|\cdot\|_S, \text{ on déduit que}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|P_{\varphi(k)} A P_{\varphi(k)}^{-1}\|_S = \|\tilde{A}\|_S \leq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$$

D'autre part  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$  est supposée fermée et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $P_{\varphi(k)} A P_{\varphi(k)}^{-1} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$  alors  $\tilde{A} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$  et d'après

2)a)  $\|\tilde{A}\|_S \geq \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ , d'où

$$\|\tilde{A}\|_S = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$$

La borne inférieure de  $\{\|PAP^{-1}\|_S; P \in GL_2(\mathbb{R})\}$  est atteinte en  $\tilde{A} \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ , donc d'après 2.d)  $A$  est diagonalisable.

C.

1. On a  $M' = \frac{2}{\delta} \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ , où  $\alpha = \frac{a-d}{\delta}$ ,  $\beta = \frac{2b}{\delta}$ ,  $\gamma = \frac{2c}{\delta}$

$$-I_2 = M'^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & 0 \\ 0 & \beta\gamma + \alpha^2 \end{pmatrix} = (\alpha^2 + \beta\gamma)I_2, \text{ d'où } \alpha^2 + \beta\gamma = -1$$

2. On a  $f(v) = (\alpha x + \beta y, \gamma x - \alpha y)$ , donc :

$$(v|f(v)) = x(\alpha x + \beta y) + y(\gamma x - \alpha y) = \alpha^2 x^2 + (\beta + \gamma)xy - \alpha^2 y^2$$

- Si  $\alpha = 0$  alors  $(v|f(v)) = (\beta + \gamma)xy$ , il suffit de prendre  $e = (1, 0)$ .
- Si  $\alpha \neq 0$ , on prend  $y = 1$ , le discriminant du polynôme du second degré en  $x$  est  $\Delta = (\beta + \gamma)^2 + 4\alpha^4 \geq 0$ ,  
donc il admet au moins une racine  $x$  dans  $\mathbb{R}$  on prend alors  $e = (x, 1)$ .

On a  $\det(f) = \det(M') = -\alpha^2 - \beta\gamma = 1$ , donc  $f \in GL(\mathbb{R}^2)$  et comme  $e \neq 0$  alors  $f(e) \neq 0$ .

3. On a  $(u_1|u_2) = \frac{1}{\|e\| \|f(e)\|} (e|f(e)) = 0$  car  $(e|f(e)) = 0$  et  $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$ , donc  $(u_1, u_2)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$ .

$$f(u_1) = \frac{1}{\|e\|} f(e) = \frac{\|f(e)\|}{\|e\|} u_2 \text{ et } f(u_2) = \frac{1}{\|f(e)\|} f^2(e) = -\frac{1}{\|f(e)\|} e = -\frac{\|e\|}{\|f(e)\|} u_1 \text{ d'où}$$

$$M_1 = \text{mat}_{(u_1, u_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\|e\|}{\|f(e)\|} \\ \frac{\|f(e)\|}{\|e\|} & 0 \end{pmatrix}$$

4. Pour  $U$  matrice orthogonale, c'est la même réponse que la question III.B.1.b.

On a  $\frac{\delta}{2} M' = M - \frac{\text{tr}(M)}{2} I_2$  donc

$$M = \frac{\delta}{2}M' + \frac{\text{tr}(M)}{2}I_2 = \frac{\delta}{2}UM_1 {}^tU + \frac{\text{tr}(M)}{2}I_2 = U \left( \frac{\delta}{2}M_1 + \frac{\text{tr}(M)}{2}I_2 \right) {}^tU = UM_2 {}^tU, \text{ où}$$

$$M_2 = \left( \frac{\delta}{2}M_1 + \frac{\text{tr}(M)}{2}I_2 \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{tr}(M) & -\delta\ell \\ \frac{\delta}{\ell} & \text{tr}(M) \end{pmatrix} \text{ et } \ell = \frac{\|e\|}{\|f(e)\|}.$$

5. (a)  $M''$  est semblable à  $M$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  donc  $M'' \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$  et par suite :

$$\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S \leq \|M''\|_S.$$

$$\|M''\|_S = \sqrt{\frac{1}{2}((\text{tr}(M))^2 + \delta^2)} = \sqrt{2\det(M)}.$$

$$(b) \|M_2\|_S = \sqrt{\frac{1}{2}(\text{tr}(M))^2 + \frac{1}{4}(\ell^2 + \frac{1}{\ell^2})\delta^2},$$

d'autre part d'après l'inégalité  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  on a

$$\|M_2\|_S \geq \sqrt{\frac{1}{2}((\text{tr}(M))^2 + \delta^2)} = \|M''\|_S.$$

Soit  $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$ , alors  $B$  est semblable à  $M$  et comme  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$  alors  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \emptyset$  et d'après 4)

$$\exists U \in O_2(\mathbb{R}), B = UB_2 {}^tU \text{ et d'après I.7) } \text{tr}(B) = \text{tr}(M) \text{ et } \det(B) = \det(M), \text{ donc } B_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{tr}(M) & -\delta\ell' \\ \frac{\delta}{\ell'} & \text{tr}(M) \end{pmatrix}$$

où  $\ell'$  est un réel strictement positif,

et d'après III.A.2.b  $\|B\|_S = \|B_2\|_S \geq \|B''\| = \|M''\|_S = \sqrt{2\det(M)}$  (d'après a)

6. D'après 5.b),  $\forall B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M), \|B\|_S \geq \sqrt{2\det(M)}$  donc  $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S \geq \sqrt{2\det(M)}$ ,

d'autre part  $\|M''\|_S = \sqrt{2\det(M)}$  et  $M'' \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$  donc

$$\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S = \sqrt{2\det(M)} = \|M''\|_S (*)$$

d'où  $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)} \|B\|_S$  est atteinte en  $M''$ .

Soit  $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(M)$ , tel que  $\|B\|_S = \sqrt{2\det(M)}$  et soit comme dans 4) la matrice  $B_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{tr}(M) & -\delta\ell' \\ \frac{\delta}{\ell'} & \text{tr}(M) \end{pmatrix}$

on a d'après 4)  $B = UB_2 {}^tU$  où  $U \in O_2(\mathbb{R})$ , donc

$$\|B\|_S = \|B_2\|_S = \sqrt{\frac{1}{2}(\text{tr}(M))^2 + \frac{1}{4}(\ell'^2 + \frac{1}{\ell'^2})\delta^2},$$

$$\|B\|_S = \|M''\|_S \iff \sqrt{\frac{1}{2}(\text{tr}(M))^2 + \frac{1}{4}(\ell'^2 + \frac{1}{\ell'^2})\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\text{tr}(M))^2 + \frac{1}{2}\delta^2}$$

$$\iff \ell' = 1 \text{ ( car } \ell' > 0)$$

$$\iff B_2 = B'' = M'' \text{ ( car } \text{tr}(M) = \text{tr}(B) \text{ et } \det(M) = \det(B))$$

Ainsi si  $\|B\|_S = \|M''\|_S$  alors  $B_2 = M''$ , et d'après 4),

$$\exists U \in O_2(\mathbb{R}), B = UB_2 {}^tU = UM'' {}^tU$$

Réciproquement si  $B = UM'' {}^tU$ , alors d'après III.A.2.b) et (\*) on a

$$\|B\|_S = \|M''\|_S = \inf_{P \in GL_2(\mathbb{R})} \|PMP^{-1}\|_S,$$

$$\text{d'où: } \inf_{P \in GL_2(\mathbb{R})} \|PMP^{-1}\|_S = \|B\|_S \iff \exists U \in O_2(\mathbb{R}), B = UM'' {}^tU$$

**D.**

D'après l'équivalence du II.5, il suffit de montrer que:

$\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$  est atteinte si et seulement si  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$  ou bien  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

$\Rightarrow$ )

On suppose que  $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$  est atteinte alors

Si  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$  on a d'après III.B.2.d  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

$\Leftarrow$ )

Si  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$  alors d'après III.C.6  $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$  est atteinte.

Si  $A$  est diagonalisable alors  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$  et d'après III.B.2.d  $\inf_{B \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)} \|B\|_S$  est atteinte.

---