Corrigé du CNC 2008 Mah1 PSI

Rédigé par KHOUTAIBI Abdelaziz professeur en PSI à Marrakech

Partie1

A

1. $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ sont des $\mathbb{R}$-ev de dimesions finie 2 et Ψ est linéaire, donc elle est continue, de plus, il est clair que $ker(\psi) = \{0\}$, donc ψ est injective de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{C}$ qui sont de même dimensions, donc elle est bijective et sa bijection réciproque Ψ^{-1} est linéaire donc aussi continue de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}^2$.

2. Posons $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + iy \in \Omega\}$ alors :
$\mathcal{U} = \psi^{-1}(\Omega)$, et par suite $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque de l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ par l'application continue Ψ.

B

1. (a) $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tilde{f}(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$, alors:

   - $\tilde{f}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$, car elle est polynômiale.
   - $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = 2x + 2iy$ et $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = -2y + 2ix = i\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$

   Ainsi f vérifie la proriété (H).

   (b) $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tilde{f}(x, y) = e^x e^{iy}$, donc

   - $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, comme produit de deux fonctions de classe C^1.
   - $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = e^{x+iy}$ et $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = ie^{x+iy}$, donc $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = i\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y)$

   D'où f vérifie la propriété(H).

   (c) $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = 1$ et $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = -i$, donc $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \neq i\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$
   Donc f ne vérifie pas $(\mathbf{H})$

2. (a) La fonction $u : t \mapsto e^{-zt^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, et $\forall\, t \in [0 + \infty[, |e^{-zt^2}| = e^{-Re(z)t^2}$.
   Si $Re(z) > 0$, $|e^{-zt^2}| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc u intégrable sur $[0, +\infty[$
   Si $Re(z) \leq 0$ alors $1 \underset{t\to+\infty}{=} O(u(t))$, et 1 n'est pas integrable sur $[0, +\infty[$, donc u ne aussi

   En conclusion: u intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $Re(z) > 0$

   (b) $\Omega = Re^{-1}(]0, +\infty[)$ où $Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto Re(z)$ est continue car linéaire du $\mathbb{R}$-ev de dim finie $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}$.
   Ω est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue, donc c'est un ouvert de $\mathbb{C}$.

   (c) Soit $x > 0$ fixé et $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (t, y) \mapsto e^{-(x+iy)t^2}$, alors :

   - h est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, comme composée de fonctions de classe C^1, donc h et $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
   - $\forall\, (t, y) \in \mathbb{R}^2, |h(t, y)| = e^{-xt^2} = \phi_1(t)$ et $\left|\dfrac{\partial h}{\partial y}(t, y)\right| = t^2 e^{-xt^2} = \phi_2(t)$,

     De plus pour $i \in \{1, 2\}$, ϕ_i est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ car $\phi_i(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

D'après le théorème de dérivabilité sous l'intégrale, l'application $\tilde{f}_x : y \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2(x+iy)}dt$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et :

$\forall\, y \in \mathbb{R}, \tilde{f}_x'(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial y}(t,y)dt.$

Donc $\tilde{f}$ admet une dérivée partielle en tout (x,y) par rapport à y, donnée par:

$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = -i\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-zt^2}dt$

(d) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé et $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}, (t,x) \mapsto e^{-(x+iy)t^2}$, alors :

- h est de classe C^1 sur sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, comme composée de fonctions de classe C^1, donc h et $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
- Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$, alors:
  $\forall\,(t,x) \in \mathbb{R}\times[a,b],\ \ |h(t,x)| = e^{-xt^2} \leq e^{-at^2} = \phi_1(t)$
  $\forall\,(t,x) \in \mathbb{R}\times[a,b],\ \ \left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(t,x)\right| = t^2e^{-xt^2} \leq t^2e^{-at^2} = \phi_2(t),$
  De plus pour $i \in \{1,2\}$, ϕ_i est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ car $\phi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

D'après le théorème de dérivabilité sous l'intégrale, l'application $\tilde{f}_y : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2(x+iy)}dt$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et:

$\forall\, y \in \mathbb{R}, \tilde{f}_y'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(t,y)dt.$

Donc $\tilde{f}$ admet une dérivée partielle en tout (x,y) par rapport à y, donnée par:

$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-zt^2}dt.$

(e) D'aprés les questions c) et d) précédentes, $\tilde{f}$ posséde des dérivées partielles $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = i\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y).$

Il reste à montrer que $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, comme $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = i\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$, il suffit de montrer que $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ est continue sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$:

Pour éviter d'appliquer le théorème de continuité sous l'inégrale pour plusieurs variables qui n'est pas au programme PSI, on se raméne à une seule variable de la manière suivante.

On pose $u = t\sqrt{x}$ alors :

$\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2(x+iy)}dt = -\frac{1}{x\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} u^2e^{-u^2}e^{-i\frac{y}{x}u^2}du = -\frac{1}{x\sqrt{x}}g\left(\frac{y}{x}\right),$

Où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, X \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} u^2e^{-u^2}e^{-iXu^2}du$

Soit $h : (u,X) \mapsto u^2e^{-u^2}e^{-iXu^2}$, alors :

- h est continue sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$
- $\forall\,(u,X) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}, |h(u,X)| = u^2e^{-u^2} = \varphi(u)$ et φ est continue intégrable sur $[0,+\infty[$ car $\varphi(u) \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$.

D'aprés le théorème de continuité d'une intégrale, g est continue sur $\mathbb{R}$.

D'autre part $(x,y) \mapsto \dfrac{y}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, donc $(x,y) \mapsto g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ l'est aussi et par suite $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ est continue sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

3. (a) f et g sont de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ et $\lambda\in\mathbb{C}$, donc $f+\lambda g$ est de calsse C^1 sur $\mathcal{U}$, de plus:
$\forall\,(x,y)\in\mathcal{U},\ \dfrac{\partial \widetilde{f+\lambda g}}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y)+\lambda\dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial y}(x,y)=i(\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)+\lambda\dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x,y))$
D'où $f+\lambda g$ vérifie aussi la propriété (H).

(b) $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont de classe C^1 sur $\mathcal{U}$, donc $\widetilde{fg}=\tilde{f}\tilde{g}$ l'est aussi, de plus:
$\forall(x,y)\in\mathcal{U},\dfrac{\partial \widetilde{fg}}{\partial y}(x,y)=g(x,y)\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y)+f(x,y)\dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial y}(x,y)=i\left(g(x,y)\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)+f(x,y)\dfrac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x,y)\right)$,
ainsi fg vérifie la propriété (**H**).

(c) Posons $F=\dfrac{1}{f}$, $\tilde{f}$ étant de calsse C^1 et ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$, alors $\tilde{F}=\dfrac{1}{\tilde{f}}$ est aussi de classe C^1 sur $\mathcal{U}$, de plus:
$\forall\,(x,y)\in\mathcal{U},\ \ \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{1}{\tilde{f}^2}\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y)=-i\dfrac{1}{\tilde{f}^2}\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)=i\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x,y)$
Ainsi $\dfrac{1}{f}$ vérifie aussi la propriété (H).

(d) i. Posons $u_0=(x_0,y_0)$, alors $df_{u_0}=\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0)dy=(a+ib)dx+(-b+ia)dy$.
Donc $A=mat_{(e_1,e_2),(1,i)}(df_{u_0})=\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$

ii. Posons $a+ib=re^{i\theta}$, avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$.Soit $\varphi\in L(\mathbb{R}^2)$ l'endmorphisme canoniquement associé à A, on a: $mat_{(e_1,e_2)}(\varphi)=\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta\\ r\cos\theta & r\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & 0\\ 0 & r\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}$,
il en résulte que φ est le composée de l'homothétie de rapport r et la rotation d'angle θ, c.à.d la similitude directe de rapport r et d'angle θ.
φ est une rotation si et seulement si A est orthogonale de deteminant 1, c.à.d $a^2+b^2=1$.

(e) On a :$\forall\,(x,y)\in\mathcal{U},\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y)=i\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)$
On dérive cette relation par rapprt à x et y, on obtient:
$\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x\partial y}=i\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}=i\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y\partial x}$.
Comme $\tilde{f}$ est de classe C^2 sur $\mathcal{U}$, alors on a d'aprés le théorème de shwarz:
$\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x\partial y}(x,y)$, il en résulte alors que :
$\forall\,(x,y)\in\mathcal{U},\ \ \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}(x,y)=i\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x\partial y}(x,y)=-\dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}(x,y)$,

et par suite $\Delta\tilde{f}=0$.

Partie 2
A.

1. (a) $\gamma_{r,\alpha}$ est de classe C^1 sur $[0,1]$, de plus $r>0$, donc $\forall\,t\in[0,1],\ \ \gamma_{r,\alpha}(t)\neq 0$, et $\gamma_{r,\alpha}$ est bien un chemin contenu dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
$\displaystyle\int_{\gamma_{r,\alpha}}\frac{dz}{z}=\int_0^1\frac{1}{re^{i\alpha t}}ir\alpha e^{i\alpha t}dt=\int_0^1 i\alpha dt=i\alpha.$

(b) i. On a: $\displaystyle\int_{\gamma_{r,\pi}}\frac{e^{iz}-1}{z}dz=i\pi\int_0^1(e^{ire^{i\pi t}}-1)dt=-i\pi+i\pi\int_0^1 e^{ire^{i\pi t}}dt$
En effectuant le changement de variable $u=\pi t$, on obitent:

$I(r) = -i\pi + i\int_0^{\pi} e^{-rsinu+ir\cos u}du.$

ii. On a:

$\left|\int_0^{\pi} e^{-r\sin u+ir\cos u}du\right| \leq \int_0^{\pi} \left|e^{-r\sin u+ir\cos u}\right| du = \int_0^{\pi} e^{-r\sin u}du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin u}du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-r\sin u}du$

En effectuant le changement de variable $v = \pi - u$, la dernière intégrale devient $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin v}dv$ et on a alors :

$$\left|\int_0^{\pi} e^{-r\sin u+ir\cos u}du\right| \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin u}du$$

iii. La fonction sinus étant concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, sa courbe est au dessus de la corde d'extrémités les points $(0,0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$, on en déduit que :

$\forall\, t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \ \frac{2}{\pi}t \leq \sin t$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin u}du \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}ur}du = \frac{-\pi}{2r}(e^{-r} - 1) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

D'aprés i) et ii) on a: $\lim\limits_{r\to+\infty} I(r) = -i\pi.$

2. (a) Soit $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision associée à γ, alors :

$\forall\, i \in [0, n-1], F\circ\gamma_{|[a_i,a_{i+1}]}$ est de classe C^1, donc $F\circ\gamma$ de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$.
Posons $\gamma_1 = Re(\gamma)$ et $\gamma_2 = Im(\gamma)$ alors :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{\partial\tilde{F}}{\partial x}(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_a^b \frac{\partial x}{\partial x}(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t))dt \\
&= \int_a^b (\frac{\partial F}{\partial x}\gamma_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\gamma_2'(t))dt \\
&= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)dt \\
&= F\circ\gamma(b) - F\circ\gamma(b)
\end{aligned}$$

(b) Si γ est un lacet alors $\gamma(a) = \gamma(b)$ et par suite $\int_\gamma f(z)dz = 0.$

3. (a) Si $t \in [b, b+c-d]$ alors :$t - b + c \in [c; d]$, donc γ est bien définie .
Soit $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a, b]$ assocée à γ_1 et $(c_j)_{0\leq j\leq p}$ une subdivision de $[c, d]$, associée à γ_2, alors :
$(a_0, ..., a_n = c - b + c, ..., c_p - b + c)$ est une subdivision de $[a, b+c-d]$ assocée à γ, d'où γ est un chemin.

(b)

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz = \int_a^{b+d-c} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt + \int_b^{b+d-c} f(\gamma_2(t-b+c))\gamma_2'(t-b+c)dt \\
&= \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt + \int_c^d f(\gamma_2(u))\gamma_2'(u)du \\
&= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz
\end{aligned}$$

.

B.

1. (a) Posons $I =]-\sqrt{R^2 - y_0^2}, \sqrt{R^2 - y_0^2}[$ et pour $n \in \mathbb{N},\ \ u_n(x) = f_n(x + iy_0)$, on a alors :

- Pour tout $\in \mathbb{N}$, u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- $\forall\, x \in I, (x+iy_0) \in D(0,R)$, et par suite la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge de somme: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = f(x+iy_0)$, d'où la convergence simple de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ sur I vers la fonction $g : x \mapsto f(x+iy_0)$
- Soit $0 < a < \sqrt{R^2 - y_0^2}$, alors :
  $\forall\, x \in [-a,a], |u_n'(x)| = n|a_n||x+iy_0|^{n-1} \leq n|a_n||a^2+y_0^2|^{n-1}$,
  or $\sqrt{a^2+y_0^2} < R$ et d'aprés le cours la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ a le même rayon de convergence que sa série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n|a_n||a^2+y_0^2|^{n-1}$ converge et par suite la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge uniformément sur $[-a,a]$, il résulte des trois points précédents, via le théorème de dérivation terme à terme que la fonction $g : x \mapsto f(x+iy_0)$ est de classe C^1 sur I et :

  $$\forall\, x \in I, g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy_0)^{n-1}$$

(b) Soit $(x_0,y_0) \in \mathcal{U}$, alors $x_0^2 + y_0^2 < R^2$, donne $x_0 \in I$ et d'aprés II.B.a) la fonction partielle $x \mapsto f(x+iy_0)$ est dérivable en x_0, d'où l'existence de $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0)$ en tout point $(x_0,y_0) \in U$, par suite $\tilde{f}$ admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ sur $\mathcal{U}$ et:
$\forall\,(x,y) \in \mathcal{U}, \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy)^{n-1}$
D'autre part :$f(x+iy) = f(i(y-ix)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(y-ix)^n$ où $b_n = i^n a_n$.
La série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ a même rayon de convergence que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, en remplcant a_n par b_n, on obtient d'aprés ce qui précéde que $\tilde{f}$ admet une dérivée partielle par rapport à y sur $\mathcal{U}$ donnée par $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} ni^n a_n(y-ix)^{n-1} = i\sum_{n=1}^{\infty} n(x+iy)^{n-1} = i\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)$.

(c) D'aprés la question précédente les dérivées partielles de $\tilde{f}$ existent sur $\mathcal{U}$ et $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y) = g(x+iy)$ où $g : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}$ qui est continue sur $D(0,R)$, donc $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}$ sont continues sur $\mathcal{U}$, par suite la fonction $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur U, et d'aprés b) $\forall\,(x,y) \in U, \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = i\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)$,
Il en résulte que f vérifie la propriété (**H**).

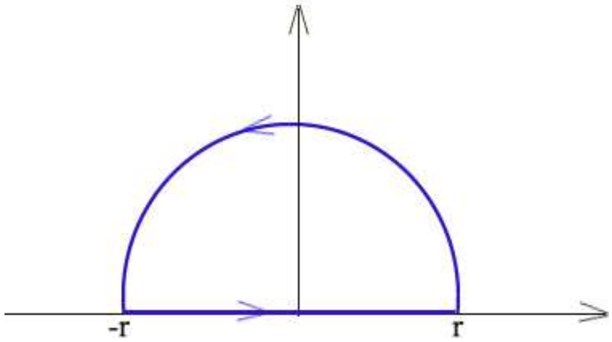
(d) Soit F la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\leq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$, qui a même rayon de convergence que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, donc d'aprés c) F vérifie (**H**), de plus d'apès b)
$\forall\,(x,y)\; \mathcal{U}, \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}(x+iy)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x+iy)^n = \tilde{f}(x,y)$

2. (a) On pose $a_n = \dfrac{i^{n+1}}{(n+1)!}$ et on applique la régle de d'AlemBert:

$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par suite $R = +\infty$

$\forall\, z \in \mathbb{C}^*, g(z) = \dfrac{1}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(iz)^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{e^{iz}-1}{z}$

(b) On a γ_r^1 et γ_r^2 sont de classes C^1, donc sont des chemins, de plus $\gamma_r^1(1) = \gamma_r^2(0) = r$, il en résulte d'aprés II.A.3) que $\gamma_r = \gamma_r^1 \vee \gamma_r^2$ est bien défini.



D'aprés II.B.1.c) g vérifie la propriété ((H)) et d'aprés II.B.1.d il existe $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant (**H**) telle que $\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = \tilde{g}$, et γ_r est un lacet car $\gamma_r(0) = \gamma_r(2) = -r$, donc d'aprés la question II.A.2.b :

$$\int_{\gamma_r} g(z)dz = 0$$

(c) D'aprés II.A.3.b on a:

$\displaystyle\int_{\gamma_r} g(z)dz = \int_{\gamma_r^1} g(z)dz + \int_{\gamma_r^2} g(z)dz = 0$, d'où:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_r^1} g(z)dz &= -\int_{\gamma_r^2} g(z)dz\\ &= -\int_{\gamma_r^2} \frac{e^{iz}-1}{z}dz \quad (\text{Car } \gamma_r^2 \text{ est contenu dans } \mathbb{C}^*)\end{aligned}$$

(d) On a : $\displaystyle\int_{\gamma_r^1} g(z)dz = \int_0^1 g((2t-1)r)2rdt$,

En effectuant le changement de variable $u = (2t-1)r$, on obtient :

$\displaystyle\int_{\gamma_r^1} g(z)dz = \int_{-r}^{r} g(u)du = \int_{-r}^{r} \frac{\cos u - 1}{u}du + i\int_{-r}^{r} \frac{\sin u}{u}du$

$u \mapsto \dfrac{\cos u - 1}{u}$ est impaire et $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est paire donc:

$\displaystyle\int_{-r}^{r} \frac{\sin u}{u}du = 2\int_0^r \frac{\sin u}{u}$ et $\displaystyle\int_{-r}^{r} \frac{\cos u - 1}{u}du = 0$,

d'où: $\displaystyle\int_{\gamma_r^1} g(z)dz = 2i\int_0^r h(u)du$

D'aprés les questions c) et d) précédentes on a:

$$\int_0^r h(u)du = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_r^1} g(z)dz = -\frac{1}{2i}\int_{\gamma_r^2} g(z)dz = -\frac{1}{2i}I(r),$$

et d'aprés la question II.A.1.b.iii on a $\displaystyle\int_{\gamma_r^2} g(z)dz = I(r) \underset{r\to+\infty}{\to} -i\pi$, d'où :

$\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\int_0^r h(u)du = \frac{\pi}{2}$

Partie 3

1. Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$, donc $\exists \rho > 0$ tel que $D(z_0,\rho) \subset \Omega$ et par suite:

   $\{\rho > 0 / D(z_0,\rho) \subset \Omega\} \neq \emptyset$

2. On a $\varphi = \tilde{f} \circ u$ où :
   $u :]0,R[\times\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2, (r,\theta) \mapsto (x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) = (x,y)$ et $\tilde{f}$ est de classe C^1 car ses deux composantes $(r,\theta) \mapsto x_0 + r\cos\theta$ et $(r,\theta) \mapsto y_0 + r\sin\theta$ le sont, donc φ est de classe C^1 sur $]0,R[\times\mathbb{R}$.

   D'aprés les formules des dérivées partielles composées et la relation $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial y} = i\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial x}$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,y)\cos\theta + \frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(x,y)\sin\theta \\ &= e^{i\theta}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial\theta}(r,\theta) + \frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial\theta}(r,\theta) = rie^{i\theta}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$$

   D'où: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = ri\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$

3. (a) φ_r est 2-π périodique car $\theta \mapsto z_0 + re^{i\theta}$ l'est
   φ_r est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car c'est une application partielle de φ qui est de classe C^1 sur $]0,R[\times\mathbb{R}$

   D'aprés les calculs de la question précédente on a:
   $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \varphi_r'(\theta) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}(r,\theta) = rie^{i\theta}\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$.

   (b) φ_r est 2-π périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc elle vérifie les hypothèses du théorème de convergence normale de Dirichlet qu'on rappelle :
   Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue et C^1 par moceaux alors la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable (c.à.d les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0}|c_n|$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}|c_{-n}|$ sont convergentes) et la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.
   D'où la famille $(c_n(r))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et la série de Fourier de φ_r convrege normalement sur $\mathbb{R}$ vers φ_r.

4. (a) $c_n(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi_r(\theta)e^{-in\theta}d\theta$.

   (b) Soit $G :]0,R[\times\mathbb{R}, (r,\theta) \mapsto \varphi(r,\theta)e^{in\theta}$, alors

G est de classe C^1 sur $]0,R[\times\mathbb{R}$, comme produit des deux fonctions φ et $(r,\theta)\mapsto e^{-in\theta}$ qui sont de calsse C^1 sur $]0,R[\times\mathbb{R}$, en particulier G et $\dfrac{\partial G}{\partial r}$ existent et sont continues sur $]0,R[\times[0,2\pi]$ et on a d'aprés un théorème de dérivation sous une intégrale, $r\mapsto c_n(r)$ est de classe C^1 sur $]0,R[$ et $c_n'(r)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\partial G}{\partial r}(r,\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)d\theta$
En intégrant par parties on obtient:

$$\begin{aligned}
c_n'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}\frac{1}{ir}\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)d\theta \quad (\text{ car } \varphi_r'(\theta)=ir\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta))\\
&= \frac{1}{2\pi ir}\left(\left[\varphi_r(\theta)e^{-in\theta}\right]_0^{2\pi}+in\int_0^{2\pi}\varphi_r(\theta)e^{-in\theta}d\theta\right)\\
&= \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_r'(r)e^{-in\theta}d\theta \quad (\text{Crochet nul car } \varphi_r\ \ 2-\pi\text{périodique})\\
&= \frac{n}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\varphi_r(\theta)e^{-in\theta}d\theta\\
&= \frac{n}{r}c_n'(r)
\end{aligned}$$

D'où $c_n'(r)=\dfrac{n}{r}c_n(r)$

(c) Soit $n\in\mathbb{Z}$, On a $\forall\, r\in]0,R[, h_n'(r)=\dfrac{r^nc_n'(r)-nr^{n-1}c_n(r)}{r^{2n}}=0$
Il en résulte que h_n est constante sur $]0,R[$

(d) Montrons que $r\mapsto c_{-n}(r)$ est bornée au voisinage de 0 à droite.

Soit $0<\rho<R$.
f est continue sur $D(0,R)$ donc φ est définie est continue le compact $K=[0,\rho]\times[0,2\pi]$ donc bornée sur K, par suite $\exists M>0,\forall\,(r,\theta)\in K, |\varphi(r,\theta)|\leq M$, d'où :
$\forall\, r\in[0,\rho], |c_{-n}(r)|\leq\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|\varphi(r,\theta)|d\theta\leq M$, d'où $r\mapsto c_{-n}(r)$ est bornée sur $[0,\rho]$.
$\forall\, r\in[0,\rho], |h_{-n}(r)|\leq Mr^n\underset{r\to 0}{\longrightarrow}0$, donc :
$\lim\limits_{r\to 0}h_{-n}(r)=0$ et comme h_{-n} est constante sur $]0,R[$, alors elle y est nulle .

5. Notons R_a le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}a_nz^n$.

   Soit $|z|<R$ et $r\in]|z|,R[$, alors :
   $|a_nz^n|=|a_n||z|^n=|c_n(r)|\left|\dfrac{z}{r}\right|^n\leq|c_n(r)|$.
   Or d'aprés III.3.b la série $\sum\limits_{n\geq 0}|c_n(r)|$ converge donc $\sum\limits_{n\geq 0}|a_n||z^n|$ converge et par suite $R_a\geq R$.
   Soit $z\in D(z_0,R)$

   - Si $z_0\neq 0$ alors $\exists(r,\theta)\in]0,R[\times\mathbb{R}, z=z_0+re^{i\theta}$.

$$\begin{aligned} f(z) = f(z_0 + re^{i\theta}) = \varphi(r,\theta) &= \varphi_r(\theta) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(r) e^{in\theta} \quad \text{(D'aprés 3.b) et 4.d)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (re^{in\theta})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \end{aligned}$$

- Si $z = z_0$, alors $a_0 = c_0(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(r,\theta)d\theta.$
  L'appliaction φ est continue sur $[0, R[\times[0, 2\pi]$, et d'apés un théorème de continuité sout l'intégrale, l'application c_0 est continue sur $[0, R[$ et par suite
  $a_0 = \lim\limits_{r\to 0} c_0(r) = c_0(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(0,\theta)d\theta = f(z_0).$

6. $\forall\, x \in]-R, R[, f(z_0 + x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
   Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est le développement en série entière de la fonction $g :]-R, R[\to \mathbb{C}, x \mapsto f(x + z_0)$, et par suite $a_n = \dfrac{g^{(n)}(0)}{n!}$, d'où l'unicité de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Soit $r \in]0, R[$, d'aprés III.3.a φ_r est 2-π périodique et de classe C^1 donc vérifie les hypothèses du théorème de Parseval, et puisque $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, c_{-n}(r) = 0$ alors :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi_r(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(r)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

8. Supposons que f est bornée sur $\mathbb{C}$, $\exists M > 0, \forall\, z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq M$
   D'après III.7), $\forall\, r \in]0, +\infty[, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta \leq M^2$, c.à.d que la fonction $u : r \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$ est bornée sur $]0, +\infty[$.
   S'il existe $k \geq 1$ tel que $a_k \neq 0$, alors $\forall\, r > 0, u(r) \geq |a_k|^2 r^{2k} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   Donc $\lim\limits_{r\to+\infty} u(r) = +\infty$, ce qui contredit u bornée sur $]0, \infty[$.
   Donc d'apés 3.5 $f = a_0$ est constante sur $\mathbb{C}$.

Fin du corrigé.