

Mr Mamouni : *myisma1@menara.ma*
CPGE Med V, Casablanca, Maroc

CORRIGÉ

Notes du correcteur :

- Des questions de cours dans ce problème ne seront pas redémontrées, l'étudiant peut se référer à son propre cours.
- Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la relation tXY définit un produit scalaire, on écrira parfois

$${}^tXY = \langle X, Y \rangle, \quad {}^tXX = \|X\|^2$$

1^{ère} Partie.

- 1) - Si a, b, c, d sont tous nuls, alors $\text{rg}A = 0$.
 - Si a, b, c, d ne sont pas tous nuls et $\det A = 0$, alors $\text{rg}A = 1$.
 - Si a, b, c, d ne sont pas tous nuls et $\det A \neq 0$, alors $\text{rg}A = 2$.
- 2) a) $\text{rg}A = 0 \iff \text{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) = 0$
 $\iff C_i(A) = 0, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$
 $\iff a_{i,j} = 0, \forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$
 $\iff A = 0$
 Donc $A \neq 0 \iff \text{rg}(A) \neq 0 \iff \text{rg}(A) \geq 1$.

- b) Question de cours.
- 3) Question de cours.
- 4) a) Un calcul simple, montre que

$$a_{i,j} = u_i v_j$$

$$\text{b) } \text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n u_i v_i = {}^tUV = \langle U, V \rangle.$$

- c) D'après 4.a) on peut conclure que

$$C_j(A) = v_j U$$

- d) $U \neq 0, V \neq 0 \implies \exists i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $u_i \neq 0, v_j \neq 0$
 $\implies \exists i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $a_{i,j} \neq 0$
 $\implies A \neq 0$
 $\implies \text{rg}A \geq 1$

D'autre part toutes les colonnes sont proportionnelles à U , donc $\text{rg}A = \dim \text{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) \leq 1$, d'où l'égalité.

- 5) a) Supposons le contraire, dans ce cas $A = 0$, donc $\text{rg}A = 0$, contradiction.
- b) On a $\text{rg}A = \dim \text{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) = 1$, donc $C_{i_0}(A) \neq 0$ en constitue une base, donc pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\exists \lambda_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.
- c) D'après la question précédente, on peut conclure que $a_{i,j} = x_i \lambda_j$ où $x_i = a_{i,i_0}$, d'après 4.a) on conclut aussi que $A = X^t Y$ où $X = C_{i_0}(A)$ et $Y = (\lambda_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- d) D'après 4.c) on peut affirmer que :
 $A = X_1^t Y_1 \implies X = C_{i_0}(A) = y_{i_0} X_1 \neq 0$, donc

$$X_1 = \alpha X$$

avec $\alpha = \frac{1}{y_{i_0}} \neq 0$, mais aussi

$$Y_1 = \frac{1}{\alpha} Y$$

- 6) $\text{rg}A = r \implies \exists P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P J_r Q$ avec

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où 1 se répète r fois, on peut écrire $J_r = \sum_{i=1}^r E_{i,i}$ où $E_{i,i}$ matrice formé par des 0 sauf à la i -ème ligne et i -ème colonne où il y a 1, il est clair que $\text{rg}E_{i,i} = 1$, donc $\text{rg}P E_{i,i} Q = 1$ car équivalentes avec $A = \sum_{i=1}^r P E_{i,i} Q$

$$\begin{aligned} 7) \text{ a) } \sum_{i=1}^p Y_i^t Z_i = 0 &\implies \sum_{i=1}^p Y_i^t Z_i Z_i = 0 \\ &\implies \sum_{i=1}^p \lambda_i Y_i = 0 \quad \text{avec } \lambda_i = {}^t Z_i Z_i = \|Z_i\|^2 \\ &\implies \lambda_i = \|Z_i\|^2 \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{car } (Y_i) \text{ libre} \\ &\implies Z_i \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \end{aligned}$$

L'implication réciproque est évidente.

$$\begin{aligned} \text{b) } \sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_{i,j} X_i^t Y_j = 0 &\implies \sum_{i=1}^n X_i \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} {}^t Y_j \right) = 0 \\ &\implies \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} {}^t Y_j = 0, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{car } (X_i) \text{ libre} \\ &\implies \lambda_{i,j} = 0 \quad \forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{car } ({}^t Y_j) \text{ libre} \end{aligned}$$

Ainsi la famille $(X_i {}^t Y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de cardinal $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc base formé de matrices de rang égal.

- 8) a) Posons $M = (a_{i,j}), N = (b_{i,j})$, donc $MN = (c_{i,j})$ avec

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,j}$$

Et donc

$$\langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^t M N) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{1 \leq k, i \leq n} a_{k,i} b_{k,i}$$

Montrons maintenant qu'il s'agit bien d'un produit scalaire

- **Symétrie** : évident, d'après la formule précédente
- **Bilinéarité** : découle de la linéarité de la trace et celle de la transposé et la distributivité du produit par rapport à la somme.
- **Positive** : $\langle M, M \rangle = \sum_{1 \leq k, i \leq n} a_{k,i}^2 \geq 0$.

- **Définie** : $\langle M, M \rangle = 0 \implies \sum_{1 \leq k, i \leq n} a_{k,i}^2 = 0$.
 $\implies a_{k,i} = 0, \forall k, i \in \llbracket 1; n \rrbracket$
 $\implies A = 0$

b) $\langle X^t Y, X'^t Y' \rangle = \text{Tr}(Y^t X X'^t Y') = \text{Tr}(Y \langle X, X' \rangle^t Y')$
 $= \langle X, X' \rangle \text{Tr}(Y^t Y') = \langle X, X' \rangle \langle Y, Y' \rangle$

c) Il suffit de prendre (X_i) orthonormale et (Y_j) unitaire.

2^{ème} Partie.

1) $A^2 = U^t V U^t V = U \underbrace{\langle U, V \rangle}_{\alpha}^t V = \alpha U^t V = \alpha A$.

2) Par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}^*$, on montre que $A^n = \alpha^{n-1} A$, comme $A \neq 0$, alors elle est nilpotente *si et seulement si* $\alpha = 0$.

3) Supposons A non nilpotente, donc $\alpha \neq 0$, dans ce cas pour tout réel λ , on a $(\lambda A)^2 = \lambda^2 \alpha A = \lambda \alpha (\lambda A)$, ainsi λA est un projecteur *si et seulement si* $\lambda \alpha = 1$, pendre donc $\lambda = \frac{1}{\alpha}$.

4) a) $\text{rg} A = 1 \neq n \geq 2$, donc A n'est pas inversible, d'où $\det A = 0$, autrement dit 0 est racine de $\chi_A(X) = \det(A - X I_n)$, le polynôme caractéristique de A , d'où 0 est une valeur propre de A , dont le sous espace vectoriel propre associé n'est autre que :

$$\begin{aligned} \ker A &= \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } AY = 0\} \\ &= \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } U \underbrace{^t V Y}_{\text{réel}} = 0\} \\ &= \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } ^t V Y = 0\} \quad \text{car } U \neq 0 \end{aligned}$$

D'autre part $\text{rg} A = 1$, donc $\dim \ker A = n - 1$. Ainsi 0 est une valeur propre de multiplicité au moins $n - 1$, comme la somme des valeurs propres vaut $\text{Tr}(A)$, alors l'autre valeur propre sera $\text{Tr}(A)$.

b) $AU = U \underbrace{^t V U}_{^t V U = \alpha \text{ réel}} = \alpha U$, d'où α est une valeur propre et $U \neq 0$ vecteur propre associé, dont le

sous espace vectoriel propre associé sera de dimension 1, car la somme des sous espace vectoriel propre ne peut jamais dépasser n et déjà un sous espace vectoriel propre $(\ker A)$ est de dimension $n - 1$.

c) **En résumé :**

- Si $\alpha \neq 0$, alors A admet deux valeurs propre 0, dont le sous espace vectoriel propre associé est de dimension $n - 1$ et α dont le sous espace vectoriel propre associé est de dimension 1.

- Si $\alpha = 0$, alors A admet une seule valeur propre 0, dont le sous espace vectoriel propre associé est de dimension $n - 1$.

5) Résultat immédiat du résumé de la question précédente.

6) a) Si A était diagonalisable alors elle serait semblable à la matrice nulle, car 0 est son unique valeur propre, donc $A = 0$, ce qui ne l'est pas.

b) D'après II.4.b) $AU = \alpha U = 0$ n d'où $U \in \ker A = \ker f$ et par suite $W = \lambda U \in \ker f$ où $\lambda = ^t V V = \|V\|^2 \in \mathbb{R}$. Or $W \neq 0$, donc forme une famille libre dans \ker et on conclut à l'aide du théorème de la base incomplète.

c) Posons $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_{n-2}, W, V)$ Comme $\text{card}(\mathcal{B}) = n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il suffit de montrer qu'elle est libre pour conclure que c'est une base.

En effet : Supposons que $\lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_{n-2} E_{n-2} + \alpha W + \beta V = 0$, on multiplie à gauche par $^t V$, comme (E_1, \dots, E_{n-2}, W) est une base de $\ker A = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } ^t V Y = 0\}$ alors il ne reste que l'égalité $\beta ^t V V = \beta \|V\|^2 = 0$ d'où $\beta = 0$ car $V \neq 0$, l'égalité initiale devient alors $\lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_{n-2} E_{n-2} + \alpha W = 0$, or (E_1, \dots, E_{n-2}, W) est une base de $\ker A$ donc en particulier libre, d'où $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \alpha = 0$.

$f(E_1) = AE_1 = 0, \dots, f(E_{n-2}) = AE_{n-2} = 0, f(W) = AW =$

$0, f(V) = AV = U^tVV = \|V\|^2U = W$, donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 \\ \vdots & & \vdots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Découle immédiatement de la question précédente car toutes les deux semblables à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 \\ \vdots & & \vdots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3^{ème} Partie.

1) a) $rgA = n \implies A$ inversible $\implies \det A \neq 0$, d'où $\frac{A}{\det A}A^c = I_n$ donc ${}^tA^c$ est inversible de rang n et dont l'inverse est

$$({}^tA^c)^{-1} = \frac{A}{\det A}$$

Après transposition on conclut que A^c est inversible de rang n et dont l'inverse est

$$(A^c)^{-1} = \frac{{}^tA}{\det A}$$

D'où

$$A^c = \frac{{}^tA^{-1}}{\det A}$$

b) Si $rgA \leq n-2$, alors toutes les $n-1$ colonnes de A sont liées donc les cofacteurs, coefficients de A^c obtenus à partir des déterminants de ces colonnes, sont nuls, d'où $A^c = 0$.

2) a) Si $rgA = n-1$, alors il existe au moins $n-1$ colonnes de A qui sont libres donc le cofacteur, coefficient de A^c obtenu à partir du déterminant de ces colonnes, est non nul, d'où $A^c \neq 0$, d'où $rgA^c \geq 1$.

b) $rgA = n-1 \implies A$ non inversible

$$\implies \det A = 0$$

$$\implies A^tA^c = 0$$

$$\implies \text{Im}({}^tA^c) = \text{Im}(g) \subset \ker A = \ker f$$

Ainsi $rgA^c = rg({}^tA^c) = rg g \leq \dim \ker f = \dim \ker A = n - rgA = 1$, d'où l'égalité.

3) a) Rappelons que si $u_1(t), \dots, u_n(t)$ sont dérivables, comme le déterminant est n -linéaire alors $t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1(t), \dots, u_n(t))$ est dérivable de dérivée égale à

$$\sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(u_1(t), \dots, u'_i(t), \dots, u_n(t))$$

Dans notre cas $P_A(t) = \det(A - tI_n) = \det_{\mathcal{B}}(C_1(A) - te_1, \dots, C_n(A) - te_n)$ est dérivable de dérivée égale à

$$P'_A(t) = - \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(C_1(A) - te_1, \dots, e_i, \dots, C_n(A) - te_n)$$

b) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} P'_A(0) &= - \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(C_1(A), \dots, e_i, \dots, C_n(A)) \\ &= - \sum_{i=1}^n (A^c)_{i,i} \end{aligned}$$

on a développé le déterminant par rapport à la i ème ligne
 $= -\text{Tr}(A^c)$

- 4) a) Question de cours.
- b) Comme $P_A = P_B$ alors $P'_A(0) = P'_B(0)$, d'où $\text{Tr}(A^c) = \text{Tr}(B^c)$.
- c) $\text{rg}A = n \implies A^c = \frac{{}^t A^{-1}}{\det A}$, or $A = PBP^{-1}$ et $\det A = \det B$, d'où $A^c = Q \frac{{}^t B^{-1}}{\det B} Q^{-1} = QB^c Q^{-1}$ où $Q = {}^t P$, donc A^c et B^c sont semblables.
- d) $\text{rg}A = \text{rg}B \leq n - 2 \implies A^c = B^c = 0$, donc semblables.
- e) i. On a $\text{rg}A = \text{rg}B = n - 1$, d'après 2.b) on a $\text{rg}(A^c) = \text{rg}(B^c) = 1$, or $\text{Tr}(A^c) \neq 0$, d'après II.5 A^c est semblable à $\text{diag}(0, \dots, 0, \text{Tr}(A^c))$, de même B^c est semblable à $\text{diag}(0, \dots, 0, \text{Tr}(B^c))$, or $\text{Tr}(A^c) = \text{Tr}(B^c)$, donc A^c et B^c sont semblables.

- ii. On a $\text{rg}A = \text{rg}B = n - 1$, d'après 2.b) on a $\text{rg}(A^c) = \text{rg}(B^c) = 1$, or $\text{Tr}(A^c) = 0$, donc $\text{Tr}(B^c) = 0$ car égales, d'après II.6.d) A^c et B^c sont semblables.

Fin.