Corrigé CNC PSI 2007 MATHS1

A.CHABCHI Professeur en classe MP au lycée Ibn Taimyia - www.mathprepa.africa-web.org

Problème I : Equations différentielles de Bessel modifiées

PARTIE I

1. Soit x un réel

   (a) La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,1]$ et $t^{x-1}e^{-t} \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$ au $\mathcal{V}(0^+)$, donc elle est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $1-x<1$ càd $\boxed{x>0}$

   (b) La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et $t^{x-1}e^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ au $\mathcal{V}(+\infty)$, donc elle est intégrable sur $[1,+\infty[$ pour toute valeur du réel x.

2. La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si, elle l'est au $\mathcal{V}(0^+)$ et au $\mathcal{V}(+\infty)$. Selon la question1, cela est réalisé si et seulement $\boxed{x>0}$.

   Pour un complexe z, on a d'abord $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t}$. Elle donc intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$ si et seulement si $\boxed{\mathrm{Re}(z)>0}$.

3. Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(z)>0$, on note $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$

   (a) A l'aide d'une intégration par partie, on a $\Gamma(z+1) = \displaystyle\lim_{(A,B)\longrightarrow(0^+,+\infty)} \left([-e^{-t}t^z]_A^B + z\int_A^B t^z e^{-t}dt\right) = z\Gamma(z)$.

   (b) Par récurrence sur p :

   - Pour $p=1$, on a $\Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)$ c'est juste.
   - Soit $p \geq 1$, supposons le résultat vrai pour p, alors selon (a), on a $\Gamma(\alpha+p+2) = (\alpha+p+1)\Gamma(\alpha+p+1)$, on conclu alors à l'aide de l'hypothèse de récurrence. D'où le résultat.

   (c) La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue non nulle sur $]0,+\infty[$, donc $\Gamma(x)>0$.

   (d) On a $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ et puisque $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, par récurrence simple, on a $\Gamma(n+1) = n!$.

4. Soit $z \in \mathbb{C}$.

   Pour $\mathrm{Re}(z)>0$, on a d'abord $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$, puis il s'agit d'une intégration terme à terme dans la première intégrale : En effet on a :

   - La série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{t^{n+z-1}}{n!}$ converge simplement sur $]0,1]$ vers $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$.
   - La fonction $t \longmapsto t^{z-1}e^{t}$ est continue sur $]0,1]$.
   - La série des intégrales des modules $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty}\left|(-1)^n \frac{t^{n+z-1}}{n!}\right| dt = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\frac{1}{n+\mathrm{Re}(z)}$ est convergente

   Le résultat en découle alors.

5. Soit $[c,d]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$, alors son image par la valeur absolue $x \longmapsto |x|$ qui est continue est un segment de $\mathbb{R}$, il existe donc $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $0<\alpha\leq\beta$, $\forall\, x \in [c,d]$, $\alpha \leq |x| \leq \beta$, il vient que :

   - $\forall\, z \in B,\ \forall\, n \geq E(\beta)+1$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{1}{n+x}\right| \leq \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{n-\beta}$ et $\sum \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{n-\beta}$ est convergente, d'où la convergence normale, donc uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geq E(\beta)+1}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+x}$ sur le segment (donc aussi sur tout compact) de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$.

- Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $z \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n!} \dfrac{1}{n+x}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

On conclut alors que $z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=E(\beta)+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, puis il évident que la sommation finie $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{E(\beta)} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, d'où la continuité de $z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

6. Soit $0 < a < b$.
   (a) Pour $t > 0$ fixé, la fonction $x \longmapsto t^{x-1}$ est croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$ pour $t \geq 1$ et décroissante pour $t \leq 1$, il vient alors que
   $\max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = \begin{cases} t^{a-1} & \text{si } t \leq 1 \\ t^{b-1} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.
   (b) Découle de la monotonie de la fonction $x \longmapsto t^{x-1}$ sur $[a, b]$, en utilisant le (a).
   (c) On devra vérifier les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale (formule de Leibniz)
   - D'abord la fonction $f : (x, t) \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et y est aussi continue sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$.
   - Pour $x \in [a, b]$, $t > 0$, on a $|f(x, t)| \leq e^{-t} \max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = \phi(t)$ avec :
     - ϕ continue sur $\mathbb{R}^{*+}$
     - Intégrable au $\mathcal{V}(+\infty)$ car négligeable devant $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$
     - Intégrable au $\mathcal{V}(0^+)$ car équivalente à $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{1-a}}$ avec $1 - a < 1$
   - Pour $x \in [a, b]$, $t > 0$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq e^{-t} |\ln(t)| \max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = \psi(t)$ avec :
     - ψ continue sur $\mathbb{R}^{*+}$
     - Intégrable au $\mathcal{V}(+\infty)$ car négligeable devant $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$
     - Intégrable au $\mathcal{V}(0^+)$ car équivalente à $t \longmapsto \dfrac{-\ln(t)}{t^{1-a}} = o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$ avec $1 - \dfrac{a}{2} < 1$

   Ainsi la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt$.

PARTIE II

1. On sait que la somme d'une série entière de rayon $R > 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et se dérive infiniment sous le signe somme, en écrivant $y_\alpha(x) = x^\alpha \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on en déduit que y_α est de classe C^∞ sur $]0, R[$ et se dérive terme à terme.
   y_α est solution de (F_λ) sur $]0, R[$ si et seulement si
   $$x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha-2} + x \sum_{n=0}^{+\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1} - \left(x^2 + \lambda^2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\alpha} = 0$$
   Après avoir fait le changement $n' = n + 2$ dans la sommation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2+\alpha}$, il vient
   $$x^\alpha \left(\left(\alpha^2 - \lambda^2\right) a_0 x^0 + \left((1+\alpha)^2 - \lambda^2\right) a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left((n+\alpha)^2 - \lambda^2\right) a_n - a_{n-2} \right) x^n \right) = 0$$
   ou encore après simplification par le terme non nul x^α,
   $$\left(\alpha^2 - \lambda^2\right) a_0 x^0 + \left((1+\alpha)^2 - \lambda^2\right) a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left((n+\alpha)^2 - \lambda^2\right) a_n - a_{n-2} \right) x^n \quad = \quad 0 \text{ pour tout } x \in]0, R[$$
   (valable en aussi en 0)

A ce stade, on ne peut utiliser directement l'unicité d'un développement en série entière puisque $[0, R[$ n'est pas un voisinage de zéro! Soit alors $y \in \left]-\sqrt{R}, \sqrt{R}\right[$, on a alors $y^2 \in [0, R[$, donc

$$\left(\alpha^2 - \lambda^2\right) a_0 y^0 + \left((1+\alpha)^2 - \lambda^2\right) a_1 y^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left((n+\alpha)^2 - \lambda^2\right) a_n - a_{n-2}\right) y^{2n} = 0 \text{ pour tout } y \in \left]-\sqrt{R}, \sqrt{R}\right[$$

Par unicité d'un DSE, et en tenant compte de $a_0 \neq 0$, il vient $\begin{cases} \alpha^2 = \lambda^2 \\ \left((1+\alpha)^2 - \lambda^2\right) a_1 = 0 \\ \forall\, n \geq 2, \ \left(\left((n+\alpha)^2 - \lambda^2\right) a_n - a_{n-2}\right) = 0 \end{cases}$.

2. On suppose $\alpha = \lambda \geq 0$ et $a_0 \neq 0$.

   (a) Puisque $\alpha = \lambda \geq 0$, alors la relation $\left((1+\alpha)^2 - \lambda^2\right) a_1 = 0$ donne $a_1 = 0$, puis la relation $\forall\, n \geq 2, \ \left(\left((n+\alpha)^2 - \lambda^2\right) a_n - a_{n-2}\right) = 0$ assure que $\forall\, p \in \mathbb{N}, \ a_{2p+1} = 0$.
   D'autres part $\forall\, p \geq 1, \ (2p+\alpha)^2 - \alpha^2 \neq 0$ car $\alpha \geq 0$, donc $a_{2p} = \dfrac{a_{2(p-1)}}{(2p+\alpha)^2 - \alpha^2} = \dfrac{a_{2(p-1)}}{2^2 p\,(p+\alpha)}$.
   Par récurrence sur $p \geq 1$, on aura $a_{2p} = \dfrac{a_0}{2^{2p} p!} \dfrac{1}{(p+\alpha)(p+\alpha-1)\dots(\alpha+1)}$. On conclut à l'aide de la question I-3-b.

   (b) On vu que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$, donc $a_{2p} \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   Pour z un complexe non nul, on note $u_p = \left|a_{2p} z^{2p}\right|$, alors
   $\lim\limits_{p \longrightarrow +\infty} \dfrac{u_{p+1}}{u_p} = \lim\limits_{p \longrightarrow +\infty} |z|^2 \dfrac{\Gamma(\alpha+p+1)}{2^2 (p+1)\,\Gamma(\alpha+p+2)} = \lim\limits_{p \longrightarrow +\infty} |z|^2 \dfrac{1}{2^2 (p+1)(\alpha+p+1)} = 0 < 1$. D'où la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n = \sum\limits_{p \geq 0} a_{2p} z^{2p}$ converge pour tout complexe z. Ainsi le rayon cherché est $+\infty$.

   (c) On suppose $a_0 2^{\lambda} \Gamma(\lambda+1) = 0$, puisque $\Gamma(\lambda+1) > 0$ car $\lambda + 1 > 0$, alors $a_0 = \dfrac{1}{2^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)}$. De plus le rayon de $\sum a_n z^n$ est infini, alors pour tout $x > 0$,
   $y_\lambda(x) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)} \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{2^{2p} p!\,\Gamma(\lambda+p+1)} x^{2p+\lambda} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{p!\,\Gamma(\lambda+p+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2p+\lambda}$. CQFD
   On a aussi $y_\lambda(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\lambda} \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{p!\,\Gamma(\lambda+p+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2p}$, et or $x \longmapsto \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{p!\,\Gamma(\lambda+p+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2p}$ est continue en 0, donc
   $$\boxed{y_\lambda(x) \sim_0 \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}}$$

3. On suppose que $2\lambda \notin \mathbb{N}$, soit $p \geq 1$.

   (a) Le fait que $2\lambda \notin \mathbb{N}$, assure que $\forall\, p \geq 1, \ (-\lambda+n)^2 - \lambda^2 \neq 0$, donc comme dans le 2-$(a)$, on trouve que :
   $\forall\, p \in \mathbb{N}, \ a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{a_0}{2^{2p} p!} \dfrac{1}{(p+\alpha)(p+\alpha-1)\dots(\alpha+1)}$, puis en prenant comme le 2-(b) : $a_0 2^{-\lambda}\Gamma(-\lambda+1) = 1$, puisque $-\lambda \notin \mathbb{Z}^{*-}$ (car sinon $2\lambda \in \mathbb{N}$), alors le fait de "noter" le produit non nul : $(-\lambda+p)(-\lambda+p+1)\dots(-\lambda+1)$ par $\dfrac{\Gamma(-\lambda+p+1)}{\Gamma(-\lambda+1)}$, assure que $\Gamma(-\lambda+1) \neq 0$, donc
   $a_0 = \dfrac{1}{2^{-\lambda}\Gamma(-\lambda+1)}$, on obtient que $x \longmapsto \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{p!\,\Gamma(-\lambda+p+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2p-\lambda}$ est aussi solution de (F_λ) sur $\mathbb{R}^{*+}$.

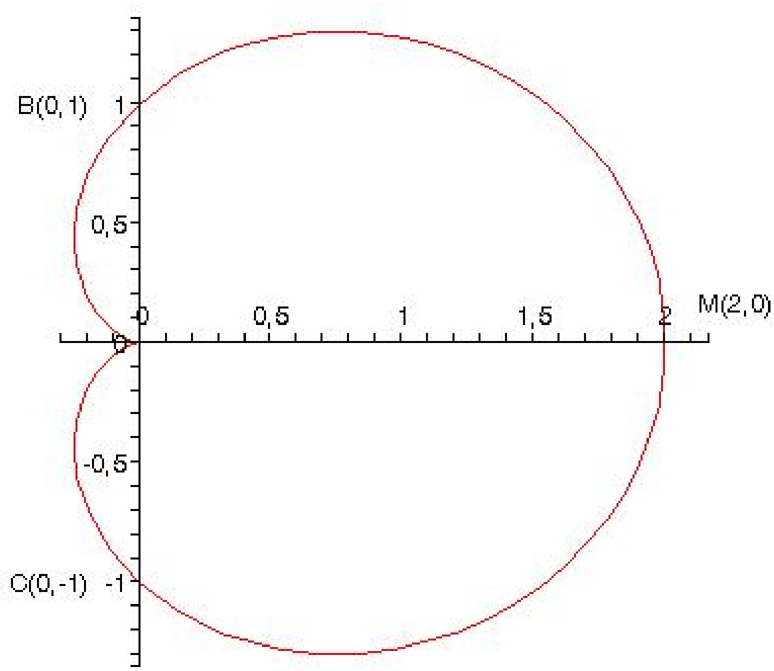
   (b) Il est à noter d'abord que $\lambda \neq 0$ car $2\lambda \notin \mathbb{N}$, puis comme dans le 3$(c)$, on a $y_{-\lambda}(x) \sim_0 \left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\lambda} \dfrac{1}{\Gamma(-\lambda+1)}$.
   Ainsi y_λ et $y_{-\lambda}$ ont des comportements non propotionnel au voisinage de zéro : l'une tend vers 0 et l'autre vers $+\infty$, la famille $(y_\lambda, y_{-\lambda})$ est alors libre.
   D'autres part (F_λ) est une équation différentielle linéaire sans second membre d'ordre deux et dont les coefficients sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^{*+}$ et aussi le coefficient de y'' ne s'annule jamais sur

$\mathbb{R}^{*+}$, donc l'espace des solutions de (F_λ) sur $\mathbb{R}^{*+}$ est $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, contenant la famille libre $(y_\lambda, y_{-\lambda})$, qui sera donc une base de cet espace. D'où la solution générale de (F_λ) sur $\mathbb{R}^{*+}$ est : $x \longmapsto Ay_\lambda(x) + By_{-\lambda}(x)$ où A et B sont des constantes réelles.

Problème II : Etude d'une cardioïde et sa développée

PARTIE I

1. .
   (a) Le domaine de définition de ρ est $\mathbb{R}$ et ρ est $2\pi-$périodique.
   (b) Par parité de la fonction cosinus, ρ est aussi paire, donc l'arc γ_1 est symétrique par rapport à l'axe $\left(O\ \vec{\mathbf{i}}\right)$.
   (c) Le support de γ_1 est obtenu en prenant le support de γ_2 union son symétrique par rapport à l'axe $\left(O\ \vec{\mathbf{i}}\right)$.
2. Le pôle O est paramétré par $\theta = \pi$, de plus $\rho(\pi) = \rho'(\pi) = 0$ et $\rho''(\pi) = -\cos(\pi) = 1 \neq 0$. Puisque 2 est pair alors le pôle O est un point de rebroussement du premier espèce et la tangente est porté par $\vec{u}(\pi)$, càd horizontale.
3. Soit $M_0 = \phi(\theta_0)$ un point de γ_1 autre que le pôle O, donc $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ avec $\theta_0 \neq \pi$. On a alors
   $\rho^2(\theta_0) + 2(\rho'(\theta_0))^2 - \rho(\theta_0)\rho''(\theta_0) = 3(1 + \cos(\theta_0)) > 0$. Ainsi la concavité de γ_1 en M_0 est tournée vers le pôle O (ou contient le pôle O) .
4. On a la fonction ρ est dérivable sur $[0, \pi]$ et $\rho'(\theta) = -\sin(\theta) \leq 0$. Donc est décroissante sur $[0, \pi]$: elle décroit de la valeur $\rho(0)$ =2 à la valeur $\rho(\pi)$ =0.
5. Le tracé est ci-contre :



- La tangente à l'origine est horizontale
- Le point $M(2, 0)$ est paramétré par $\theta = 0$, puisque $\rho(0) = 2 \neq 0$ et $\rho'(0) = 0$, la tangente est alors portée par $v(0) = \vec{j}$ càd verticale.

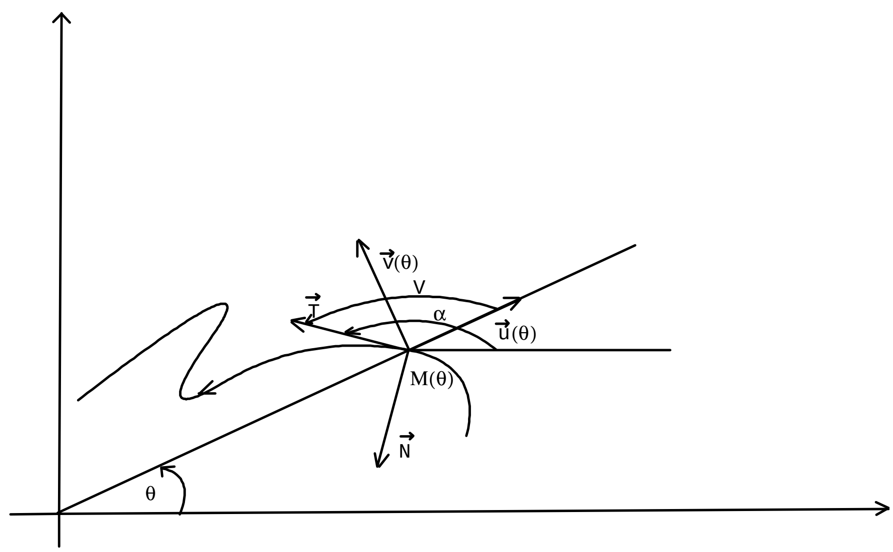
- Le point $B(0,1)$ est parmétré par $\theta=\frac{\pi}{2}$, puisque $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ et $\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$. Si $V\left(\frac{\pi}{2}\right)=\widehat{\left(\vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right),\vec{T}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}$ désigne l'angle que le vecteur $\vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ avec le vecteur tangent, alors ici $\tan\left(V\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=-1$, donc $V\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$. Dans $\mathcal{R}\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ cette tangente a pour équation : $y=x+1$
- Par symètrie, la tangente en $C(0,-1)$ dans $\mathcal{R}\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ a pour équation : $y=-x-1$.

6. L'arc γ_1 étant de classe C^1, donc sa longueur $l(\gamma_1)$ est donnée par : $l(\gamma_1)=\int_0^{2\pi}||\phi'(\theta)||d\theta=2\int_0^{\pi}||\phi'(\theta)||d\theta$ par symétrie, donc
$l(\gamma_1)=2\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2(\theta)+(1+\cos(\theta))^2}d\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos(\theta))}d\theta=2\int_0^{\pi}2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=8$
7. L'aire cherché est donnée par la formule de Green-Reimman en polaire: Aire$(\gamma_1)=\frac{1}{2}\int_{\overleftarrow{\partial\gamma_1}}\rho^2 d\theta$: il s'agit ic d'intégrale curviligne, où $\overleftarrow{\partial\gamma_1}$ désigne la fronière de γ_1 orienté dans le sens direct.
Donc Aire$(\gamma_1)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos(\theta))^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos(\theta)+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 2\pi=\frac{3\pi}{2}$.

PARTIE II

A- Questions de cours

1. Voir figure ci-contre : (permettez mes outils de dessin vectoriel modestes!)



2. L'abscisse curvuligne est un paramétrage admissible de l'arc γ, elle consiste à choisir une origine et de paramétrer chaque point par la longueur (algébrique) de l'arc joignant ce point à l'origine. dans ce cas la courbe est parcourue à vitesse uniforme valant 1.

   On choisit pour origine $\theta=0$, et on oriente γ dans le sens des θ croissant. Alors $s(\theta)=\int_0^{\theta}||(f(t)\vec{u}(t))'||dt=\int_0^{\theta}\sqrt{f^2(t)+f'^2(t)}dt$ et $\frac{ds}{d\theta}(\theta)=\sqrt{f^2(\theta)+f'^2(\theta)}$.
3. D'abord la fonction angulaire V est dérivable selon le théorème de relévement, et en dérivant la relation : $\tan(V(\theta))=\frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$, on obtient :
$V'(\theta)\left(1+\tan^2(V(\theta))\right)=\frac{f'^2(\theta)-f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta)}$. D'où $V'(\theta)=\frac{f'^2(\theta)-f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta)}\times\frac{1}{1+\frac{f^2(\theta)}{f'^2(\theta)}}=\frac{f'^2(\theta)-f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta)+f^2(\theta)}$.

Par ailleurs (à la physicienne, que l'on justifie mathématiquement à l'aide de dérivée de composée), on a $R=\dfrac{ds}{d\alpha}=\dfrac{ds}{d\theta}\dfrac{d\theta}{d\alpha}=\dfrac{ds}{d\theta}\times\left(\dfrac{d\alpha}{d\theta}\right)^{-1}$, or $\alpha=V+\theta$, donc $\dfrac{d\alpha}{d\theta}=1+\dfrac{dV}{d\theta}=1+\left(\dfrac{f'^2(\theta)-f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta)+f'^2(\theta)}\right)$, ainsi $\dfrac{d\alpha}{d\theta}(\theta)=\dfrac{f^2(\theta)+2f'^2(\theta)-f(\theta)f''(\theta)}{(f^2(\theta)+f'^2(\theta))}$ et par suite : $R(\theta)=\dfrac{\left(f^2(\theta)+f'^2(\theta)\right)^{\frac{3}{2}}}{f^2(\theta)+2f'^2(\theta)-f(\theta)f''(\theta)}$.

4. On a $\overrightarrow{MI}=R\overrightarrow{N}$, donc les coordonnées de M dans le repère mobile $(M,\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))$ sont $\left(\cos\left(V+\dfrac{\pi}{2}\right),\sin\left(V+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=(-\sin V,\cos V)$ où V désigne l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{T}}\right)$.

B - Retour à l'arc γ_1

1. L'arc γ_1 privé de son pôle O est décrit lorsque θ parcourt l'intervalle $]-\pi,\pi[$, il est un arc birégulier. Commençons par déterminer l'abscisse curviligne orienté d'origine $\theta=0$, puis la normale et le rayon de courbure :

   - $s(\theta)=\displaystyle\int_0^\theta\sqrt{f^2(t)+f'^2(t)}dt=\int_0^\theta\sqrt{4\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt=4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $s'(\theta)=2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

   - Vecteur tangent et normal : On a $\overrightarrow{T}=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds}=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}\times\dfrac{d\theta}{ds}=\dfrac{1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\1+\cos\theta\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))}=\begin{pmatrix}-\sin\dfrac{\theta}{2}\\\cos\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))}$,

     Ainsi $V=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{2}$ et $\alpha=V+\theta=\dfrac{3\theta}{2}+\dfrac{\pi}{2}$ et $\overrightarrow{N}=\begin{pmatrix}-\sin V\\\cos V\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))}=\begin{pmatrix}-\cos\dfrac{\theta}{2}\\-\sin\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))}$

   - Rayon de courbure : $R=\dfrac{ds}{d\alpha}=\dfrac{ds}{d\theta}\times\dfrac{d\theta}{d\alpha}=2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

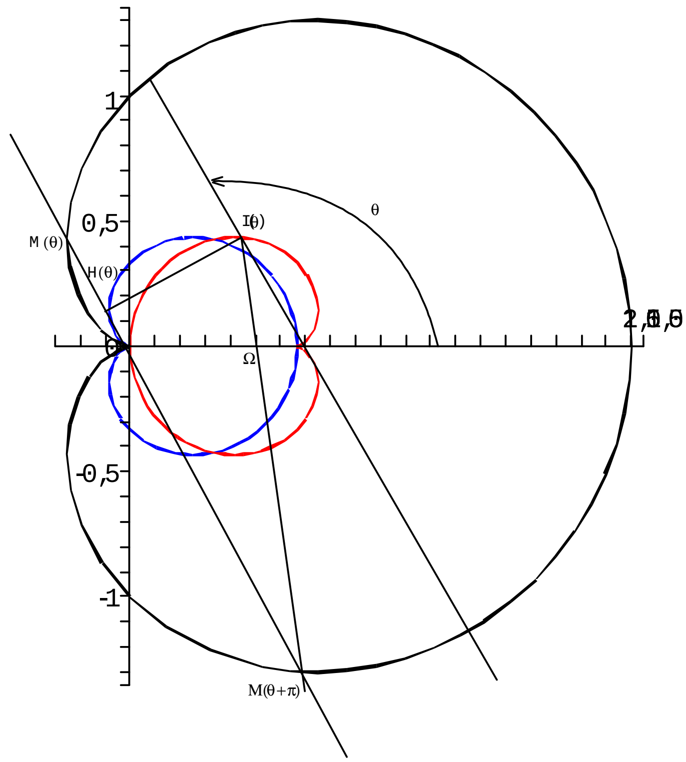
   - Enfin $\overrightarrow{MI}=R\overrightarrow{N}$, donc $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OM}+R\overrightarrow{N}=\begin{pmatrix}1+\cos\theta\\0\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))}+\dfrac{4}{3}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\begin{pmatrix}-\cos\dfrac{\theta}{2}\\-\sin\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))}$,

     d'où
     $\overrightarrow{OI}(\theta)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1+\cos\theta\\-2\sin\theta\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2+\cos\theta(1-\cos\theta)\\\sin\theta(1-\cos\theta)\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}$

2. On a $\overrightarrow{OM}(\theta+\pi)=\begin{pmatrix}-\cos\theta(1-\cos\theta)\\-\sin\theta(1-\cos\theta)\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}$, alors le rapport de cette homothétie est $\lambda=-\dfrac{1}{3}$. Si $\Omega=(a,b)$ désigne les coordonées de son centre dans le repère fixe $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$, alors on aura $\overrightarrow{\Omega I}(\theta)=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\Omega M}(\theta+\pi)$, donc $\overrightarrow{\Omega O}+\overrightarrow{OI}(\theta)=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\Omega O}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OM}(\theta+\pi)$, en identifiant les coordonnées, en obtient $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=0$. Ainsi le centre de cette homothétie est : $\Omega=\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

3. On a $\overrightarrow{OI}(\theta)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1+\cos\theta\\-2\sin\theta\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))}$, donc $\overrightarrow{OH}(\theta)=\dfrac{1}{3}(1+\cos\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$. Ainsi $H(\theta)$ est l'image de $M(\theta)$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{3}$.

4. Voir figure ci-dessous (Merci Maple) : En noir la cardioïde γ_1, en rouge sa développée γ_I et en bleu la courbe γ_H. (Attention Daltoniens ...)



5. Puisque γ_H se déduit de γ_1 par homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{3}$, alors selon I-(6) et I-(7) , on a :

   $l\left(\gamma_H\right) = \dfrac{1}{3} l\left(\gamma_1\right) = \dfrac{8}{3}$ et $\text{Aire}(\gamma_H) = \dfrac{1}{3}\text{Aire}(\gamma_1) = \dfrac{\pi}{2}$

$* * * * * *\ \mathcal{FIN}\ * * * * * *$