Corrigé du CCM 2005 Mah2 PSI
Proposé par Abdelaziz KHOUTAIBI

I

1. $\chi_A(X) = (1-X)(2-X)(3-X)$, donc $sp(u) = \{1,2,3\}$
   A admet trois valeurs propres réelles distincts , donc elle est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$

2. $e_1 = (-1,1,0)$;$e_2 = (1,1,-1)$;$e_3 = (1,1,0)$

3. - **1ere methode**
     $det(e_1, e_2, e_3) = -2 \neq 0$
   - **2eme méthode**
     Pour $i \in 1,2,3$,Soit $E_i = vect(u - \lambda_i Id_{\mathbb{R}^3})$,le sous espace propre associé a la valeur propre λ_i.
     u est diagonalisable donc $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ donc $E_i = vect(e_i)$,on déduit que $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

   $mat_\beta(u) = diag(1,2,3) = D$
   La formule de changement de matrice pour une application linéaire donne:
   $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base β.

4. (a) - Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
         On a: $B = mat_{\mathcal{B}}(v) \Rightarrow B^2 = mat_{\mathcal{B}}(v^2)$ et $A = mat_{\mathcal{B}}(u)$, donc:
         $B^2 = A \Longleftrightarrow v^2 = u$.
       - $vu = vv^2 = v^3 = v^2v = vu$.

   (b) $uv(e_i) = vu(e_i) = v(\lambda_i e_i) = \lambda_i v(e_i)$
       d'où $v(e_i) \in Ker(u - \lambda_i id_{\mathbb{R}^3}) = vect(e_i)$ et parsuite $v(_i)$ est colinéaire à e_i,c.à.d que e_i est un vecteur propre de v

   (c) D'aprés 4-2 $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}, v(e_i) = \alpha_i e_i$ et donc $mat_\beta = diag(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = V$
       $v^2 = u \Longleftrightarrow V^2 = D \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \pm 1 \\ \alpha_2 = \pm\sqrt{2} \\ \alpha_3 = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

5. Soit B une solution de l'équation $X^2 = A$
   D'aprés le question précédente $V = diag(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ avec $\begin{cases} \alpha_1 = \pm 1 \\ \alpha_2 = \pm\sqrt{2} \\ \alpha_3 = \pm\sqrt{3} \end{cases}$,donc:
   $V \in \{diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2\sqrt{2}, \varepsilon_3\sqrt{3}) / (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1,1\}^3\}$, comme $B = PVP^{-1}$ alors :
   $B \in \{Pdiag(\varepsilon_1, \varepsilon_2\sqrt{3}, \varepsilon_3\sqrt{2})P{-}1 / (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1,1\}^3\}$
   Réciproquement si $B = P^{-1}diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2\sqrt{3}, \varepsilon_3\sqrt{2})P, (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1,1\}^3$, on a bien $B^2 = PD^2P^{-1} = A$
   En conclusion l'ensemble des solutions de l'équation est :
   $\{Pdiag(\varepsilon_1, \varepsilon_2\sqrt{3}, \varepsilon_3\sqrt{2})P^{-1} / (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1,1\}^3\}$, On trouve 8 solutions qui sont:

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{2}) \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & \sqrt{2}-\sqrt{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \sqrt{2}-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

$$X_3 = \{ \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+\sqrt{3}}{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}) \end{pmatrix} \quad X_4 = \{ \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{2}-\sqrt{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{2}-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

II-A

1. facile

---

2. (a) Soit $g : x \mapsto \sum_0^n a_n x^n$

La somme d'une série entiére est de classe C^∞ sur sonintervalle ouvert de convergence et la dérivation s'effectue terme à terme :

$\forall\, x \in]-r,r[, (1+x)g'(x) - \alpha g(x) = \sum_0^\infty ((k+1)a_{k+1} - (\alpha-k)a_k)x^k$

y est une solution de (1) sur $]-r,r[$ si et seulement si :

$\forall\, x \in]-r,r[, (1+x)y'(x) - \alpha g(x) = \sum_0^\infty ((k+1)a_{k+1} - (\alpha-k)a_k)x^k = 0$

Or si une série entiére est de somme nulle sur un intervalle ouvert centré en 0 alors cette série entiére est nulle ,donc : $\forall\, k \in \mathbb{N}, (k+1)a_{k+1} = (\alpha-k)a_k$.

(b) On montre par une récurrence simple sur k que: $\forall\, k \geq 1, a_k = a_0 \dfrac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)}{n!}$.

(c) Pour $a_0 = 1$,deux cas à distinguer:

- $\alpha \in \mathbb{N}$, alors $\forall\, k \geq \alpha, a_k = 0$, donc la série entiére est une fonction polynumiale ,donc $\rho = +\infty$:
- $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$, alors la suite $\forall\, k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0$ et $\left|\dfrac{a_{k+1}}{ak}\right| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, la régle de d'Alembert donne $\rho = 1$.

$I =]-\rho,\rho[\cap]-1,+\infty[$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ contenant $]-1,1[$,et g et f_α sont deux solutions de l'éq diff linéaire (1) ,vérifiant :$g(0) = f_\alpha(0) = 1$,$x \mapsto (1+x)$ ne s'annulant pas sur I,le théoréme de cauchy-lipshitz linéaire affirme l'unicité de la solution sur I de l'eq diff (1) vérifiant la condition initiale:$y(0) = 1$,d'où $g = f_\alpha$ sur I.
pour $\alpha \in \mathbb{N},]-\rho,\rho[=]-\infty,+\infty[$, or la fonction f_α est définie sur $]-1,+\infty[$, donc dans le cas général f_α coincide avec g sur I et non sur $]-\rho,\rho[$ comme le dit le sujet.Et dans le cas $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}, I =]-\rho,\rho[$.

3.
- $f_{\frac{1}{2}}(0) = 1 \Rightarrow b_0 = 1$
- f étant développable en série entiére à l'origine il en est de meme de f^2 et le developpement en série entiére $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$ de f^2 s'obtient comme produit de cauchy de $\sum_{k=0}^\infty b_k x^k$ par elle meme, ce qui donne :$\forall\, q \in \mathbb{N}, c_q = \sum_{k=0}^q b_k b_{q-k}$

D'autre part On a $\forall\, x \in]-1,1[, f_{\frac{1}{2}}^2(x) = 1 + x$

L'unicitédu developpement en série ntiére à l'origine donn alors:

$$c_1 = 2b_0 b_1 = 1 \text{ et } \forall\, q \geq 2, c_q = \sum_{k=0}^q b_k b_{q-k} = 0$$

II.B

1. (a) Par définition de l'entier p on a:$u^{p-1} \neq 0$, donc $\exists x_0 \in E, u^{p-1}(x_0) \neq 0$

(b) c'est une question classique:

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tq $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0$, montrons par récurrence fini sur i que $\forall i \in [1,n] \lambda_i = 0$

Base de récurence:$0 = f^{p-1}\left(\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^{p+k-1}(x_0) = \lambda_0 u^{p-1}(x_0)$

Comme $u^{p-1}(x_0) \neq 0.$, alors$\lambda_0 = 0$
Hypothése de récurrence:Soit $j_in[1, p-1]$,Supposons que: $\forall\, i \in [1, j-1], \lambda_i = 0$ et montrons que $\lambda_j = 0$
$0 = f^{p-1-j}\left(\sum_{k=j}^{p-1} \lambda_k u^k(x_0)\right) = \sum_{k=j}^{p-1} \lambda_k u^{p+k-j-1}(x_0) = \lambda_j u^{p-1}(x_0)$, Or $u^{p-1}(x_0) \neq 0$ d'où $\lambda_j = 0$
Conclusion :$\forall\, i \in [1, n], \lambda_i = 0$.

(c) $dim(E) = n$ et $(x_0, u(x_0), ..., u^{p-1}(x_0))$ est une famille libre de E à p vecteurs , donc $p \neq n$, car le cardinal d'une famille liobre esr inférieur à la dimension.
Ona $n - p \geq 0$,donc: $u^p = 0 \Rightarrow u^n = u^{n-p}u^p = 0$

---

2. (a) $v^{2p} = u^p = 0$ et $v^{2(p-1)} = u^{p-1} \neq 0$,donc v est nilpotent d'indice de nilpotence $q \geq 2p - 1$
D'aprés la question 2-1: $q \leq n$ donc $2p - 1 \leq n$ ie $p \leq \dfrac{n+1}{2}$

(b) $n = 2$, il suffit de prendre une matrice nilpotente d'indice de nilpotence $p > \frac{3}{2}$ c.a.d $p = 2$, par exemple:$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

3. $w^2 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i u^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} b_i u^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} b_i u^i b_j u^i = \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} b_i b_j u^{i+j}$.
$\sum_{0 \leq i,j \leq n-1} b_i b_j u^{i+j} = \sum_{q=0}^{2n-2}\sum_{k=0}^{q} b_k b_{k-q}$
D'aprés les relations de la question I-3, on alors :$(\pm w)^2 = w^2 = b_0 u^0 + 2b_0 b_1 u = I_E + u$

---

4. (a) D'aprés la question 1-1-2 la famille $(x_1, u(x_1), ..., u^{n-1}(x_1)$ est libre à n vecteurs ,donc c'est une base de E.
$g(x_1) \in E$ donc il s'exprime dans la base précédente , c.à.d: $\exists(\alpha_0, ..., _alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, g(x_1) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u_i(x_1)$

(b) $u = g^2 - I_n \in \mathbb{R}[g]$, donc g commute avec u ie :$gu = ug$.
Soit $h = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u_i$,montrons que $g = h$,il suffit pour cela de montrer que f et g coincident sur la base $(x_1, u(x_1), ..., u^{n-1}(x_1)$,or: $h \in \mathbb{R}[u] \Rightarrow hu = uh$
$\forall\, i \in [0, n-1], h(u^i(x_1)) = u^i(h(x_1)) = u^i(g(x_1)) = g(u^i(x_1))$,d'où $h = g$.

(c) Soit $(\lambda_0, ..., \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tq $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda u^k = 0$,alors $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda u^k(x_1) = 0$ et comme $(x_1, u(x_1), ..., u^{n-1}(x_1)$ est libre alors :$\forall\, i \in [0, n-1],_l ambda_i = 0$.
D'aprés la question 3 $g = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u_i \Rightarrow g^2 = \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} \alpha_i \alpha_j u^{i+j} = \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} \alpha_i \alpha_j u^{i+j} = \sum_{q=0}^{n-1} \beta_k u^q$ où
$\beta_k = \sum_{k=0}^{q} \alpha_k \alpha_{q-k}$
Or $g^2 = I_E + u$, comme $(I_E, u, .., u^{n-1})$ est une base alors :
$\beta_0 = \alpha_0^2 = 1, \beta_1 = 2\alpha_0\alpha_1 = 1$ et $\sum_{k=0}^{q} \alpha_k \alpha_{q-k}$ pour $2 \leq q \leq n-1$

(d) Si $\alpha_0 = 1$ alors par ue récurrence facile on montre que $\alpha_k = b_k$
Si $_0\alpha_0 = -1$ alors la suite $(\gamma_k) = (-\alpha_k)$ vérifie
$\gamma_0^2 = 1, \gamma_0\gamma_1 = 1$ et $\sum_{k=0}^{q} \gamma_k \gamma_{q-k} = 0$ pour $2 \leq q \leq n-1$. Donc $\gamma_k = b_k$,c.a.d $\alpha_k = -b_k$
On déduite que $g = \pm \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k = \pm w$

5. $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $A=I_4+N$ où $N=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice de nilpotence $p=4$,d'aprés ce qui précéde il y' a deux solution de l'équation $X^2=A$ qui sont $\pm B$ où $B=\sum_{k=0}^{3}b_kN^k$

Les calculs donnent:

$b_0=1, b_1=\frac{1}{2}, b_2=-\frac{1}{8}, b_3=\frac{1}{16}$, $B=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{-1}{8}&\frac{1}{16}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{-1}{8}\\0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

III

1. $\nu d=d\nu$, donc les sous espaces prores de d sont stables par ν (c'est du cours!!!)
$\exists p\in\mathbb{N}^*, \nu^p=0\Rightarrow \nu_\lambda^p=0$, donc ν_λ est nilpotent.

---

2. Soit $\lambda\in sp(d)$,alors ν_λ est nilpotent donc non injectif soit $x\in Ker\nu_\lambda-\{0\}$, alors:
$u(x)=d(x)+\nu(x)=\lambda x+\nu_\lambda(x)=\lambda x$,donc $\lambda\in sp(u)$.
Comme $Sp(u)\subset\mathbb{R}_+^*$, alors $Sp(d)\subset\mathbb{R}_+^*$, donc 0 n'est pas une valeur propre de d et ,comme ^n_R est de dim finie alors d est inversible .

3.
   - D'apré le cours ,d étant diagonalisable alors E est somme direct des sous espaces prpores de d,c.à.d:$E=\overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}}E_{\lambda_i}$.
   - $d(x)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x_i$

---

4. Soit $\delta\in\mathcal{L}(E)$ tq $\forall\, x=\sum_{i=1}^{r}x_i\in\overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}}E_{\lambda_i}\delta(x)=\sum_{i=1}^{r}\sqrt{\lambda_i}x_i$, alors:

   - $\delta^2=d$
   - Soit $x=\sum_{i=1}^{r}x_i\in\overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}}E_{\lambda_i}$ .alors $\forall\, i\in[1,r], \nu(x_i)\in E_{\lambda_i}$;on a alors:
   $\nu\delta(x)=\sum_{i=1}^{r}\sqrt{\lambda_i}\nu(x_i)=\delta(\sum_{i=1}^{r}\nu(x_i))=\delta\nu(x)$,c.à.d:$\nu\delta=\delta\nu$

5.
   - $det(\delta^2)=\det(\delta)^2=det(d)$, $det(d)\neq 0\Rightarrow det(\delta\neq 0$,donc $\delta\in GL(E)$
   - $\nu^p=0$ et $\nu et\delta^{-2}$ commutent ,donc
   $(\nu\delta^{-2})^p=\nu^p\delta^{-2p}=0$, c.a.d que $\nu\delta^{-2}$ est nilpotent

---

6. On applique le résultat de la section **II.B**:

   - $f=\nu\delta^{-2}$ endomorphismes nilopoptrent de E donc $w=\sum_{i=0}^{p-1}f^k$ vérifie:
   $w=P(f)$ où $P=\sum_{i=0}^{p-1}X^k\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $w^2=I_E+f$.
   - $v=\delta w$ vérifie $v^2=\delta^2w^2=d+\nu=u$

III-B

1. $\forall\, X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X^t MMX = {}^t (MX)MX = \|MX\|^2 \geq 0$

---

2. (a)
   - Si $A \in S_n^+$, soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$ alors $\exists X \neq 0, AX = \lambda X$, donc ${}^tXAX = \lambda^t XX_geq0$, or ${}^tXX = \|X\|^2 \geq 0$,donc $\lambda \geq 0$
   - Réciproquement supposons $Sp_{\mathbb{R}}(A) \in \mathbb{R}_+$ alors:
     A étant une matrice symétrique réelle,elle est diagonalisable dans le groupe orthognal (c'est le théoréme spectral!!!),c.a.d:$\exists P \in O_n(\mathbb{R}), {}^t PAP = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) = D$ où $\lambda_1, ...\lambda_n$ sont les valeurs propres disticts ou non de A.
     Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = PX = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,alors:
     $${}^tXAX = {}^t (PX)D(PX) = {}^t YDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geq 0$$

   (b)
   - A est semlable à D ,donc $tr(A) = tr(D) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq 0$
   - Si $A \in GL(E) \cap S_n^+$ alors $det(A) = det(D) = \displaystyle\prod_{1=1}^{n} \lambda_i \neq 0$,donc $\forall\, i \in [1, n], \lambda_i > 0$

---

3. Avec les memes notations de la question 2, on a :
   $A = {}^t PDP = {}^t P\Delta P^t P\Delta P = B^2$ où $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_i})$ et $B = {}^t P\Delta P$, de plus :
   ${}^tB = B$ et $Sp(B) = \{\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_i}\} \subset \mathbb{R}_+$,donc $B \in S_n^+$

---

4. (a) question de cours facile

   (b)
   - **1ere methode**:${}^tXBCBX = {}^t (BX)C(BX)$, comme $C \in S_n^+$ alors:${}^t(BX)C(BX) \geq 0$
   - **2eme méthode**:D'aprés la question 3 ,$C \in S_n^+ \Rightarrow \exists T \in S_n^+, C = T^2$, donc :
     $BCB = BTTB = {}^t (TB)(BT)$,la question 1 perme de conclure que $BCB \in S_n^+$

   $tr(AC) = tr(B^2C) = tr(BBC) = tr(BCB) \geq 0$ car $BCB \in S_n^+$.

   (c)
   - $A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow B \in GL_n(E)$
     $AC = B^2C \Rightarrow B^{-1}ACB = BCB$,donc AC est semblable à BCB, or $BCB \in S_n^+$,donc elle est digonalisable et par suite AC est diagnlisable.
   - Un contre exemlpe dans $M_2(\mathbb{R})$:
     $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A \in S_2^+$ non invesible ,$C \in S_2^+(\mathbb{R})$,$AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalsable dans $M_2(\mathbb{R})$.