

Corrigé du CCM 2005 Mah1 PSI
Proposé par Abdelaziz KHOUTAIBI

Partie 1

1. C'est une question de cours
(\mathcal{E}_f) est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants d'équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$
D'après le cours, S_0 est un s.e.v de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dim 2, dont une base est (p, q) où $p(x) = \cos x$ et $q(x) = \sin x$.
 2. (a) Les fonctions $u : t \mapsto f(t) \cos t$ et $v : t \mapsto f(t) \sin t$ sont continues sur \mathbb{R} , les fonctions φ_1 et φ_2 sont respectivement les primitives de u et de v qui s'annulent en 0, dont elles sont dérivables sur \mathbb{R} et :
 $\varphi_1'(x) = f(x) \cos x$, $\varphi_2'(x) = f(x) \sin x$
 - (b) Partant de $\sin(x-t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t$ et remplaçant dans l'expression de $\varphi_f(x)$, on obtient facilement par linéarité de l'intégrale : $\varphi_f(x) = \varphi_1(x) \sin x - \varphi_2(x) \cos x$.
 $\varphi_f(0) = 0$.
 - (c) φ_f est d'après la question précédente, est produit et somme de fonctions dérivables, donc elle est dérivable sur \mathbb{R} et $\varphi_f'(x) = \varphi_1(x) \cos x + \varphi_2(x) \sin x$
 - (d) L'expression de $\varphi_f'(x)$ montre que φ_f' est également produit et somme de fonctions dérivables, donc elle est dérivable sur \mathbb{R} et $\varphi_f''(x) = f(x) \cos^2 x + f(x) \sin^2 x - \varphi_1(x) \sin x + \varphi_2(x) \cos x = f(x) - \varphi_f(x)$
Donc $\varphi_f'' + \varphi_f = f$, ie φ_f est solution de l'éq diff (\mathcal{E}_f).
 - (e) φ_f est une solution de (\mathcal{E}_f) vérifiant : $\varphi_f(0) = \varphi_f'(0) = 0$.
Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire assure l'unicité de la solution de (\mathcal{E}_f) vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$, cette solution est donc φ_f .
3. D'après le cours l'ensemble S_f des solutions de l'éq diff (\mathcal{E}_f) est donné par : $S_f = \varphi_f + S_0 = \{y + \varphi_f/y \in S_0\}$, on en déduit d'après I-1 que les solutions de (\mathcal{E}_f) sont toutes de la forme :
- $$x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des réels.}$$

4. (a) h est de classe C^2 sur \mathbb{R} et vérifie : $h'' + h = f_1$, donc h est une solution de (\mathcal{E}_{f_1})
- (b) D'après la question I-3 il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $h(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + \int_0^x f_1(t) \sin(x-t) dt$, donc :
 $h(x+\pi) + h(x) = \int_0^{x+\pi} f_1(t) \sin(x-t) dt - \int_0^{x+\pi} f_1(t) \sin(x-t) dt = \int_0^x f_1(t) \sin(x-t) dt - \int_0^x f_1(t) \sin(x-t) dt - \int_x^{x+\pi} f_1(t) \sin(x-t) dt$.
D'autre part, le changement de variable : $u = t - x$ donne :
 $\int_x^{x+\pi} f_1(t) \sin(x-t) dt = - \int_0^\pi f_1(u+x) \sin(u) du$, d'où : $h(x+\pi) + h(x) = \int_0^x f_1(t) \sin(x-t) dt - \int_0^\pi f_1(u+x) \sin(u) du$.
 $f_1 = h'' + h \geq 0$ et $\sin \geq 0$ sur $[0, \pi]$, donc $\int_0^\pi f_1(u+x) \sin(u) du \geq 0$

5. Cas où f est 2π périodique

- (a) i. D'après le cours on connaît une relation entre les coefficients de Fourier exponentielle de g et g'' :
 $c_n(g'') = (in)^2 c_n(g) = -n^2 c_n(g)$.
Comme $c_n(g) = \frac{a_n(g) - ib_n(g)}{2}$, $c_n(g'') = \frac{a_n(g'') - ib_n(g'')}{2}$, Donc :
 $a_n(g'') = -n^2 a_n(g)$, et $b_n(g'') = -n^2 b_n(g)$.
D'autre part $a_n(f) = a_n(g + g'') = a_n(g) + a_n(g'') = (1 - n^2) a_n(g)$ de même $b_n(f) = (1 - n^2) b_n(g)$
- ii. Les relations précédentes donnent : $a_1(f) = b_1(f) = 0$.

(b) $\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = 0$:

$$\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = \int_x^0 f(t) \sin(t-x) dt + \int_0^{2\pi} f(t) \sin(t-x) dt + \int_{2\pi}^{2\pi+x} f(t) \sin(t-x) dt.$$

D'autre part, le changement de variable: $u = t - 2\pi$ et la 2π -périodicité de f et \sin donne :

$$\int_{2\pi}^{2\pi+x} f(t) \sin(t-x) dt = \int_0^x f(u) \sin(u-x) du,$$

$$\text{D'où } \int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(t-x) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin(u-x) du = \pi(b_1 \cos x - a_1 \sin x) = 0$$

$$\varphi_f(x+2\pi) - \varphi_f(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) = 0, \text{ donc } \varphi_f \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}$$

Si y est une solution de (\mathcal{E}_f) , il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $y(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + \varphi_f(x)$, comme \cos , \sin et φ_f sont 2π -périodiques, il en est de même de y .

- (c) On a établi dans les questions a) et b) l'équivalence entre (\mathcal{E}_f) admet des solutions 2π -périodiques et $a_1(f) = b_1(f) = 0$
Si $f(x) = \sin x$, $a_1(f) = 0$ et $b_1(f) = 1$, donc (\mathcal{E}_f) n'admet pas de solutions périodiques.

Partie 2

- (a) On écrit la définition de la limite:
pour $\varepsilon = 1$, $\exists A > 0$, $x \geq A$, $|f(x) - \ell| \leq 1$, comme $|f(x)| = |f(x) - \ell + \ell| \leq |f(x) - \ell| + |\ell|$, alors pour $x \geq A$, $|f(x)| \leq 1 + |\ell|$
- (b) D'après a) f est bornée sur $[A, +\infty[$, de plus f étant continue sur le segment $[0, A]$, est bornée sur $[0, A]$, ainsi f est bornée sur $[0, +\infty[$.
- (c) f est croissante et de classe C^1 sur \mathbb{R} , donc $f' \geq 0$ et continue sur \mathbb{R} , d'autre part:
$$\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell - f(0)$$
, donc f' est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} f'(t) dt = \ell - f(0)$.

- Les fonctions $\chi : t \mapsto f'(t) \sin t$ et $\psi : t \mapsto f'(t) \cos t$ sont continues sur \mathbb{R} .
 $\forall t \in [0, +\infty[$, $|\chi(t)| \leq f'(t)$ et $|\psi(t)| \leq f'(t)$, comme f' est intégrable sur $[0, +\infty[$, il en est de même des fonctions χ et ψ .

- Une intégration par parties donne:

$$\int_0^x f(t) \sin(x-t) dt = [f(t) \cos(x-t)]_0^x - \int_0^x f'(t) \cos(x-t) dt = f(x) - f(0) \cos x - \int_0^x f'(t) \cos(x-t) dt$$

- D'après I-3 les solutions de (\mathcal{E}_f) sont de la forme:

$$y_{\alpha, \beta}(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$$

En utilisant l'égalité établie dans la question précédente on obtient:

$$y_{\alpha, \beta}(x) = f(x) + \left(\alpha - f(0) - \int_0^x f'(t) \cos t \right) \cos x + \left(\beta - \int_0^x f'(t) \sin t \right) \sin x$$

- On a montré que f est bornée sur $[0, +\infty[$ ie $|f| \leq M_1$. sur $[0, +\infty[$

$$\forall x \in [0, +\infty[, \left| \int_0^x f'(t) \cos t \right| dt \leq \int_0^x f'(t) dt \leq \int_0^{+\infty} f'(t) dt = M_2 \text{ de même } \left| \int_0^x f'(t) \sin t \right| dt \leq M_2$$

Donc $|y_{\alpha, \beta}| \leq M_1 + |\alpha| + |\beta| + |f(0)| + 2M_2$ sur $[0, +\infty[$

- (a) $n\pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc si $y_{\alpha, \beta}$ admet une limite en $+\infty$ il en est de même de $y_{\alpha, \beta}(n\pi)$.

$$y_{\alpha, \beta}(n\pi) = f(n\pi) + (-1)^n \left(\alpha - f(0) - \int_0^{n\pi} f'(t) \cos t dt \right)$$

$$f(n\pi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell, \int_0^{n\pi} f'(t) \cos t dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f'(t) \cos t dt$$

Comme la suite $((-1)^n)_n$ est divergente, $(y_{\alpha, \beta}(n\pi))_n$ va admettre une limite lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si $\alpha - f(0) - \int_0^{+\infty} f'(t) \cos t dt = 0$ ie $\alpha = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t) \cos t dt$.

- (b) En étudiant de même la suite $(y_{\alpha, \beta}(\frac{\pi}{2} + n\pi))_n$, on montre de la même manière que dans la question a) que $\beta = \int_0^{+\infty} f'(t) \sin t dt$

7. L'unicité de Y_f vient de la question précédente car $\alpha = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t) \cos t dt$ et $\beta = \int_0^{+\infty} f'(t) \sin t dt$,

$$\text{ce qui donne } Y_f(x) = f(x) + \int_x^{+\infty} f'(t) \cos(x-t) dt$$

Réciproquement, cette fonction est une solution de (\mathcal{E}_f) de limite 0 en $+\infty$.

Partie 3

1. (a) • Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = 0$, donc $(S_n(0))_n$ est bornée

• Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}, S_n(x) = \frac{\sin(n\frac{x}{2}) \sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}$, donc: $\forall n \in \mathbb{N}, |S_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$

(b) C'est la fameuse **transformation d'Abel** :

En posant $S_0(x) = 0$, on a: $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sin kx = S_k - S_{k-1}$, on a donc:

$$\sum_{k=1}^n b_k \sin kx = \sum_{k=1}^n b_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^n b_k S_k - \sum_{k=1}^n b_k S_{k-1}$$

En effectuant dans la deuxième sommation du dernier terme le changement d'indice: $k' = k - 1$, on obtient alors, compte tenu de $S_0 = 0$:

$$\sum_{k=1}^n b_k \sin kx = \sum_{k=1}^n b_k S_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} S_k = b_n S_n + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) S_k$$

(c) Contrairement à ce que le sujet laisse croire en disant: Montrer alors... cette question ne se déduit pas de la transformation d'Abel, mais uniquement de la question a), en effet, comme $(S_n(x))$ est bornée et $(b_p)_p$ décroissante on a:

$$\exists M > 0, \forall p \in \mathbb{N}, |(b_{p+1} - b_p) S_p(x)| \leq M(b_p - b_{p+1})$$

Comme $b_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$, la série télescopique $\sum_{p \geq 1} (b_p - b_{p+1})$ est convergente, on conclut que la série

$$\sum_{p \geq 1} (b_p - b_{p+1}) S_p(x) \text{ est absolument convergente.}$$

(d) $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $(S_n(x))$ bornée donc $b_n S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et la convergence absolue de la série

$\sum_{p \geq 1} (b_p - b_{p+1}) S_p(x)$ entraîne sa convergence, et par suite la convergence de sa suite de sommes partielles

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) S_k \right)_n, \text{ et compte tenu de la relation de la question b) on déduit que la suite } \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)_n$$

des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est convergente, d'où la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.

Pour tout $n \geq 1$ la fonction v_n est 2π -périodique et impaire, il en est de même de la fonction f .

2. (a) C'est encore la transformation d'Abel, on fait la même chose que 1-b.

(b) Soit $x \in]0, \pi[$

D'après a) et compte tenu de $|S_n(x)| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ on a:

$$\left| \sum_{k=n+1}^q b_k \sin kx \right| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} (b_q + \sum_{k=n+1}^{q-1} (b_k - b_{k+1}) + b_{n+1})$$

$$\text{Or } \sum_{k=n+1}^{q-1} (b_k - b_{k+1}) = b_{n+1} - b_q$$

$$\text{D'où } \left| \sum_{k=n+1}^q b_k \sin kx \right| \leq 2 \frac{b_{n+1}}{\sin\frac{x}{2}}$$

3. (a) D'après 2-b: $\left| \sum_{k=n+1}^q b_k \sin(kx) \sin(px) \right| \leq 2 \frac{b_{n+1}}{\sin\frac{x}{2}} |\sin(px)|$.

Or: $\frac{x}{2} \in [0, \pi/2] \Rightarrow \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{\pi}{x}$ et $|\sin(px)| \leq px$, donc

$$\left| \sum_{k=n+1}^q b_k \sin(kx) \sin(px) \right| \leq 2p\pi b_{n+1}$$

En faisant tendre q vers $+\infty$ et en tenant compte de la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ établie dans la

question 1-d, on obtient: $\forall x \in [0, \pi], \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \sin(kx) \sin(px) \right| \leq 2p\pi b_{n+1}$

D'où : $\sup_{x \in [0, \pi]} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \sin(kx) \sin(px) \right| \leq 2p\pi b_{n+1}$.

- (b) • $\forall x \in \mathbb{R}, w_n(x) = v_n(x) \sin px$, comme la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge simplement sur \mathbb{R} vers f alors la série

$\sum_{n \geq 1} w_n$ converge simplement vers $w : x \mapsto f(x) \sin(px)$.

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction w_n est 2π periodique et paire, donc il suffit de montrer la convergence uniforme de la série de fonction $\sum_{n \geq 1} w_n(x)$ sur $[0, \pi]$.

- Pour $x \in \mathbb{R}$ le reste d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 1} w_n(x)$ est $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \sin(kx) \sin(px)$

D'après la question 3-a: $\sup_{x \in [0, \pi]} |R_n(x)| \leq 2p\pi b_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc la suite de fonction (R_n) converge

uniformément vers 0, d'où la convergence uniforme de la série de fonction $\sum_{n \geq 1} w_n(x)$ sur $[0, \pi]$

- (c) On applique les théorèmes de continuité de la somme d'une série de fonction et d'integration terme à terme d'une série de fonctionne fonctions, vérifions les hypothèses de ces théorème:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction w_n est continue sur $[-\pi, \pi]$
- La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$ vers $w : x \mapsto f(x) \sin(px)$

Donc w est continue sur \mathbb{R} et $\int_{-\pi}^{\pi} w(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} w_n(x) dx$

Or $\int_{-\pi}^{\pi} w_n(x) dx = \begin{cases} \pi b_p & \text{si } n = p \\ 0 & \text{si } n \neq p \end{cases}$

D'où $b_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(pt) dt$

4. (a) • **première méthode**

$$F(\theta + 2\pi) = \int_0^{\theta+2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} f(t) dt$$

Or la périodicité et l'imparité de f donne : $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$, et $\int_{2\pi}^{\theta+2\pi} f(t) dt = \int_0^{\theta} f(t) dt$

- **deuxième méthode**

Soit $G : \theta \mapsto F(\theta + 2\pi) - F(\theta)$, alors G est dérivable sur \mathbb{R} et $G'(x) = f(\theta + 2\pi) - f(\theta) = 0$, donc G est constante sur \mathbb{R} et $G(0) = F(2\pi) - F(0) = 0$, donc $G = 0$.

- (b) $F' = f$, donc $c_n(f) = i n c_n(F)$, on en déduit $a_n(F) = \frac{-1}{n} b_n(f) = \frac{-1}{n} b_n$ et $b_n(F) = 0$ car F est paire.

- (c) F est 2π -periodique de classe C^1 sur \mathbb{R} , le théorème de convergence normale de dirichlet affirme que la série de fourier de F converge normalement vers F sur \mathbb{R} .

On a $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{a_0(F)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(F) \cos(nx) = \frac{a_0(F)}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos(nx)$, pour $x = 0$ on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{a_0(F)}{2}$$

5. (a) $\varphi_f(x) = -\varphi_2(x) \cos x$

Il suffit de montrer que φ_1 est paire et φ_2 est impaire.

Le changement de variable : $u = -t$ donne compte tenu de l'imparité de f : $\varphi_1(-x) = \int_0^{-x} f(t) \cos(t) dt =$

$$\int_0^x f(u) \cos(u) du = \varphi_1(x)$$

de la même façon on a: $\varphi_2(-x) = -\varphi_2(x)$.

(b) Si φ_f est 2π -per alors $0 = \varphi_f(0) = \varphi_f(2\pi) = -\varphi_2(2\pi) = -2\pi b_1$ d'où $b_1 = 0$.

Réciproquement si $b_1 = 0$, alors $\varphi_2(x + 2\pi) = \varphi_2(2\pi) + \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t) \sin(t) dt$.

Or $\varphi_2(2\pi) = \pi b_1 = 0$, et $\int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t) \sin(t) dt = \varphi_2(x)$ d'où φ_2 est 2π périodique et par suite φ_f est 2π périodique.

6. (a) φ_f étant impaire, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(\varphi_f) = 0$.

(b) φ_f est une solution 2π -périodique de (\mathcal{E}_f) , d'après la question I-5a-i, $\forall n \geq 2, b_n(\varphi_f) = \frac{b_n}{1-n^2}$.

(c) φ_f est 2π -périodique de classe C^2 , d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de φ_f converge normalement sur \mathbb{R} vers φ_f , i.e. : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\varphi_f) \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{1-n^2} \sin(nx)$

Donc, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{b_n}{1-n^2} \sin(nx)$ est convergente et : $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{1-n^2} \sin(nx) = \varphi_f(x) - b_1(\varphi_f) \sin(x)$

(d) Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation terme à terme :

- $\forall n \geq 2, h_n : x \mapsto \frac{b_n}{1-n^2}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $h'_n(x) = \frac{nb_n}{1-n^2} \cos(nx)$
- la série de fonction $\sum_{n \geq 2} h_n(x)$ converge simplement sur \mathbb{R} vers $h : x \mapsto \varphi_f(x) - b_1(\varphi_f) \sin(x)$.

- $\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, |h'_n(x)| \leq \frac{nb_n}{1-n^2}$, de plus :

$$\frac{nb_n}{1-n^2} \sim \frac{b_n}{n} \text{ et } \sum_{n \geq 2} \frac{b_n}{n} \text{ est convergente d'après 4-c.}$$

d'où $\sum_{n \geq 2} h'_n(x)$ converge normalement, donc uniformément, sur \mathbb{R} .

Le théorème affirme donc, que h est de classe C^1 sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} h'_n(x), \text{ soit en remplaçant, } \varphi'_f(x) = b_1(\varphi_f) \cos x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{nb_n}{1-n^2} \cos(nx)$$

(e) En faisant $x = 0$ dans la relation précédente on obtient :

$$0 = \varphi'_f(0) = b_1(\varphi_f) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{nb_n}{1-n^2}$$

$$\text{D'où : } b_1(\varphi_f) = - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{nb_n}{n^2-1}$$