

CONCOURS MAROCAIN : *Corrigé 2004* *Maths 2, PSI*

Maths-MPSI

Mr Mamouni : myismail@altern.org

Partie I. Résultats généraux

- 1) a) Il est clair que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \|A\|^n$ est convergente dont la somme est $e^{\|A\|}$.
 b) $\|E_{n+m}(A) - E_n(A)\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\|A\|^k}{k!} = E_{n+m}(\|A\|) - E_n(\|A\|) \rightarrow 0$ car $(E_n(\|A\|))_{n \in \mathbb{N}}$ est de CAUCHY puisque convergente, ainsi $(E_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ est de CAUCHY dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ qui est complet, donc converge.
- 2) $\|BA_nC - BAC\| = \|B(A_n - A)C\| \leq \|B\| \|A_n - A\| \|C\| \rightarrow 0$ car $\|A_n - A\| \rightarrow 0$, d'où la suite $(BA_nC)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice BAC .
- 3) a) $E_n(PAP^{-1}) = \sum_{k=0}^n \frac{(PAP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{PA^kP^{-1}}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \right) P^{-1} = PE_n(A)P^{-1}$.
 b) $E_n(PAP^{-1}) \rightarrow \exp(PAP^{-1})$, et d'autre part $E_n(PAP^{-1}) = PE_n(A)P^{-1} \rightarrow P \exp(A)P^{-1}$ car $E_n(A) \rightarrow \exp(A)$, d'où $\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A)P^{-1}$.
- 4) a) L'application $X \mapsto {}^tX$ est continue car linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie.
 b) Comme la transposée est linéaire et que ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k$, alors $\exp({}^tA) = \lim E_n({}^tA) = \lim {}^tE_n(A) = {}^t \lim E_n(A) = {}^t(\exp(A))$. Noter bien qu'on a utilisé ici la continuité de la fonction $X \mapsto {}^tX$ pour le passage $\lim {}^tE_n(A) = {}^t \lim E_n(A)$.

Partie II. Exemples de calcul de l'exponentielle d'une matrice

$$1) \quad a) \quad D = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}.$$

$$b) \quad E_n(D) = \begin{pmatrix} E_n(\alpha) & 0 \\ 0 & E_n(\beta) \end{pmatrix}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ et par suite } \exp(D) = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}.$$

$$2) \quad a) \quad A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a\mu \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

$$b) \quad \text{Par récurrence sur } n \geq 2, \text{ on montre que } :A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}\mu \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

$$c) \quad \text{On en déduit que : } E_n(A) = \begin{pmatrix} E_n(a) & E_{n-1}(a)\mu \\ 0 & E_n(a) \end{pmatrix}, \text{ pour tout } n \geq 1, \text{ puis que } \exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & e^a\mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix}.$$

$$3) \quad \text{En identifiant } a \text{ avec } b, \text{ on a : } B = {}^tA, \text{ d'où } \exp(B) = \exp({}^tA) = {}^t \exp(A) = \begin{pmatrix} e^b & 0 \\ e^b\mu & e^b \end{pmatrix}.$$

$$4) \quad a) \quad \text{Commençons d'abord par chercher les valeurs propres de } C \text{ de son polynôme caractéristique } \det(C - XI_2) = (c - X)^2 - \mu^2, \text{ qui sont } \lambda_1 = c - \mu \text{ et } \lambda_2 = c + \mu, \text{ puis déterminons les vecteurs propres de chacune d'elles. } CX = (c - \mu)X \iff X = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, CX = (c + \mu)X \iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, \text{ on prend alors } P \text{ dont les colonnes sont formées par des vecteurs propres par exemple } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

dans ce cas $P \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}CP = D = \begin{pmatrix} c - \mu & 0 \\ 0 & c + \mu \end{pmatrix}$ est diagonale.

$$b) \quad P^{-1} \exp(C) P \exp(P^{-1}CP) = \exp(D) = \begin{pmatrix} e^{c-\mu} & 0 \\ 0 & e^{c+\mu} \end{pmatrix}, \text{ d'où } \exp(C) = P \exp(D) P^{-1} = e^c \begin{pmatrix} \text{ch}(\mu) & \text{sh}(\mu) \\ \text{sh}(\mu) & \text{ch}(\mu) \end{pmatrix}.$$

$$c) \quad A + B = \begin{pmatrix} a + b & \mu \\ \mu & a + b \end{pmatrix}, \text{ donc } \exp(A + B) = e^{a+b} \begin{pmatrix} \text{ch}(\mu) & \text{sh}(\mu) \\ \text{sh}(\mu) & \text{ch}(\mu) \end{pmatrix},$$

d'autre part $\exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & e^a \mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$ et $\exp(B) = \begin{pmatrix} e^b & 0 \\ e^b \mu & e^b \end{pmatrix}$ d'où

$$\exp(A) \exp(B) = e^{a+b} \begin{pmatrix} 1 + \mu^2 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc une condition nécessaire et suffisante sur } \mu \text{ pour que } \exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) \text{ est que } \mu = 0.$$

5) a) Avec un raisonnement pareil que celui adopté pour la matrice C , les valeurs propres de R sont $\lambda_1 = a + ib$ et $\lambda_2 = a - ib$, dont les vecteurs propres associés sont respectivement de la forme $\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}, \text{ on a alors } Q^{-1} R Q = D \text{ où } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{pmatrix}.$$

$$b) \quad R = Q D Q^{-1}, \text{ d'où } \exp(R) = \exp(Q D Q^{-1}) = Q \exp(D) Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{a+ib} & 0 \\ 0 & e^{a-ib} \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

$$c) \quad \text{On prend } J = R \text{ avec } a = 0 \text{ et } b = \pi \text{ alors } J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } \exp(J) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Partie III. Détermination de l'image de la fonction exponentielle

A- Étude dans le cas complexe

1) a) Si A est diagonalisable, alors $\exists D$ diagonale et P inversible telles que $A = P D P^{-1}$, d'où $\exp(A) = \exp(P D P^{-1}) = P \exp(D) P^{-1}$ est semblable à $\exp(D)$ qui est aussi diagonale.

b) i. Si A n'est pas diagonalisable, alors elle n'admet qu'une seule valeur propre $a \in \mathbb{C}$ et elle est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique est scindé dans \mathbb{C} , donc A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$ puisque la matrice n'est pas diagonalisable.

ii. A semblable à $T = \begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ donc $\exp(A)$ est semblable à $\exp(T) = \begin{pmatrix} e^a & e^a \mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$.

iii. Si la matrice $\exp(A)$ était diagonalisable, alors $\exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & e^a \mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$ le serait aussi, donc $\exists Q$ inversible tel que $\begin{pmatrix} e^a & e^a \mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} Q^{-1} = Q e^a I_2 Q^{-1} = e^a I_2$, ce qui n'est pas le cas puisque $\mu \neq 0$.

2) - 1^{er} cas : A est diagonalisable, alors $A = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $a \neq b$ valeurs propres de A , donc $\text{Tr}(A) = a + b$ et $\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix} P^{-1}$, d'où $\det(\exp(A)) = e^a e^b = e^{a+b} = e^{\text{Tr}(A)}$.

- 2^{ème} cas : A n'est pas diagonalisable, donc admet une seule valeur propre a , et trigonalisable, alors $A = P \begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix} P^{-1}$, donc $\text{Tr}(A) = 2a$ et $\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^a & e^a \mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix} P^{-1}$, d'où $\det(\exp(A)) = e^a e^a = e^{2a} = e^{\text{Tr}(A)}$.

3) $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad \det(\exp(A)) = e^{\text{Tr}(A)} \neq 0 \implies A \in GL_2(\mathbb{C})$.

4) On a montré que toute matrice qui s'écrit comme exponentielle d'une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est inversible, il suffit alors de montrer que toute matrice B inversible s'écrit comme exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. En effet, d'après ce qui précède A diagonalisable si et seulement si $\exp(A)$ diagonalisable.

- 1^{er} cas : B diagonalisable, on cherche alors A diagonalisable telle que $B = \exp(A)$, donc $A = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} \implies B = \exp(A) = P \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix} P^{-1}$, donc si λ et μ sont les valeurs propres de B , il suffit de trouver a et b tels que : $\lambda = e^a$, prendre alors $\mu = e^b$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(a) = \ln |\lambda| & \operatorname{Im}(a) = \operatorname{Arg}(\lambda) \\ \operatorname{Re}(b) = \ln |\mu| & \operatorname{Im}(b) = \operatorname{Arg}(\mu) \end{cases}$$

- 2^{ème} cas : B n'est pas diagonalisable, on cherche alors A non diagonalisable telle que $B = \exp(A)$, donc A et B sont trigonalisables et admettent chacune une seule valeur propre $A = P \begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix} P^{-1} \implies B = \exp(A) = P \begin{pmatrix} e^a & e^a \mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix} P^{-1}$, donc si b est la valeur propre de B , il suffit de trouver a et μ tels que : $b = e^a$, prendre alors $\lambda = e^a \mu$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(a) = \ln |b| & \operatorname{Im}(a) = \operatorname{Arg}(b) \\ \mu = \frac{\lambda}{b} \end{cases}$$

N'oublier pas que puisque la matrice B est inversible alors ses valeurs propres sont non nulles, en particulier on peut parler de leurs arguments.

B- Étude dans le cas réel

- 1) a) Si $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, alors A ne peut pas avoir de valeurs propres complexes non réelles, puisque la conjuguée aussi serait valeur propre de A et A admet au plus deux valeurs propres, ainsi le polynôme caractéristique de A est scindé dans \mathbb{R} donc A diagonalisable, (semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à une matrice, réelle, diagonale) ou bien trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à une matrice, réelle, du type $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$) puisqu'elle n'admet dans ce cas qu'une seule valeur propre réelle.
- b) Si $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, alors A admet deux valeurs propres complexes non réelles simples et conjuguées, a et \bar{a} donc semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$, avec $a \neq \bar{a}$.

- c) Reprendre le même raisonnement que celui de III.A.2, d'où tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a : $\det(\exp(A)) = e^{\operatorname{tr} A} > 0$.

- 2) a) $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(N) = \{-1\}$, supposons N diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, alors N est inversible telle que $N = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = P(-I_2)P^{-1} = -I_2$ qui n'est pas le cas, donc N n'est pas diagonalisable.
- b) Supposons que : $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, on a d'abord A non diagonalisable, donc d'après la question III.A.2, A semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à une matrice, réelle, du type $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$, donc $N = \exp(A)$ est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à une matrice, réelle, du type $\begin{pmatrix} e^a & e^a \mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$ donc ont mêmes valeurs propres, d'où $e^a = -1$, impossible puisque $a \in \mathbb{R}$.
- c) Ainsi $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et d'après la question III.B.1.b) A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$, avec $a \neq \bar{a}$, donc $N = \exp(A)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, d'où $N = \exp(A)$ est aussi diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, d'où une contradiction. On peut en conclure qu'ils existent des matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) > 0$ mais qui ne s'écrivent pas comme exponentielles de matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- 3) Soit A un élément quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- a) Si $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$.
Supposons que A est une exponentielle, alors $A = \exp(N)$ avec $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(N) \neq \emptyset$
 - 1^{er} cas : N admet deux valeurs propres réelles distinctes λ et μ , alors N diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $A = \exp(N)$ est diagonalisable semblable à $\begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix}$, donc les valeurs propres de A sont $e^\lambda > 0$ et $e^\mu > 0$.
 - 2^{ème} cas : N admet une seule valeur propre réelle μ et N est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $A = \exp(N)$ est aussi diagonalisable semblable à $\begin{pmatrix} e^\mu & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix} = \lambda I_2$, donc $A = \lambda I_2$.

- 3ème cas : N admet une valeur propre réelle a mais n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc trigonalisable, d'où semblable à $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ donc $A = \exp(N)$ est aussi trigonalisable, d'où semblable à $\begin{pmatrix} e^a & e^a \mu \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$, donc la valeur propre de A est $e^a > 0$.

Inversement, c'est la même discussion, en ajoutant que puisque les valeurs propres sont strictement positifs alors ils s'écrivent des exponentielles.

- b) Si $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, on a vu que la matrice A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, à une matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$, avec $a \neq \bar{a}$.

- i. Soit $X = X_1 + iX_2$ vecteur propre de A associé à a , donc $AX = aX$, d'où
 $AX_1 + iAX_2 = (\text{Re}(a)X_1 - \text{Im}(a)X_2) + i(\text{Re}(a)X_2 + \text{Im}(a)X_1)$,
d'où

$$\begin{aligned} AX_2 &= \text{Re}(a)X_2 + \text{Im}(a)X_1 \\ AX_1 &= -\text{Im}(a)X_2 + \text{Re}(a)X_1 \end{aligned}$$

alors A est semblable, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, à la matrice

$\begin{pmatrix} \text{Re}(a) & -\text{Im}(a) \\ \text{Im}(a) & \text{Re}(a) \end{pmatrix}$, en considérant la matrice de passage (X_2, X_1) .

- ii. Posons $x = \text{Re}(a), y = \text{Im}(a)$, alors $\begin{pmatrix} \text{Re}(a) & -\text{Im}(a) \\ \text{Im}(a) & \text{Re}(a) \end{pmatrix} = e^\epsilon \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, avec $\epsilon = \ln |a|$, $\theta = \text{Arg}(a)$ réels qui existent car $a \neq 0$ puisque A est inversible. A est une exponentielle car semblable à $e^\epsilon \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp(R)$ où $R = \begin{pmatrix} \epsilon & -\theta \\ \theta & \epsilon \end{pmatrix}$.

Fin.