# Concours Centrale-Supélec 2020

Épreuve de mathématiques II, PSI, quatre heures

**Corrigé**

## I – Fonctions de Lambert

**Q 1**. L'application $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, en tant que produit d'une application polynomiale et de l'exponentielle. On a de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x. \tag{1}$$

Ainsi, pour tout $x > -1$, on a $f'(x) > 0$. On en déduit que $f$ est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$ ; comme de plus elle est continue, on en déduit qu'elle définit une bijection de $[-1,+\infty[$ dans $\left[f(-1), \lim\limits_{+\infty} f\right[$, d'après le théorème de la bijection monotone. Or on a $f(-1) = -\frac{1}{e}$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, donc $f$ réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ dans $I = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

**Q 2**. L'application $W$ est continue sur $[-e^{-1},+\infty[$ en tant que bijection réciproque de la restriction à $[-1,+\infty[$ de l'application $f$ (dont l'ensemble image est $[-e^{-1},+\infty[$, on l'a vu). Pour justifier qu'elle soit de classe $C^\infty$ sur $]-e^{-1},+\infty[$, il suffit de constater que non seulement $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, mais qu'en plus on a : $\forall x > -1$, $f'(x) \neq 0$ : chose qui est immédiate d'après le calcul de dérivée effectué en (1). Ainsi $W$ est bien de classe $C^\infty$ sur $]-e^{-1},+\infty[$.

**Q 3**. On sait que $W(0)$ est l'unique solution à l'équation $f(t) = 0$ d'inconnue $t \in [-1,+\infty[$. Or $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$, donc $W(0) = 0$.

Pour calculer la dérivée de $W$, on rappelle qu'en tant que bijection réciproque de $f$, on a :

$$\forall x > -e^{-1}, \quad W'(x) = \frac{1}{f'(W(x))}.$$

En particulier :

$$W'(0) = \frac{1}{f'(W(0))} = \frac{1}{f'(0)} \overset{(1)}{=} \frac{1}{1} = 1.$$

**Q 4**. D'après le théorème de Taylor-Young, on a pour tout $x$ au voisinage de 0 :

$$W(x) = W(0) + W'(0)x + \underset{x\to 0}{o}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Pour un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to +\infty$, notons que par définition d'une application réciproque on a :

$$\forall x \geqslant -e^{-1}, \quad f(W(x)) = x \Longleftrightarrow \forall x \geqslant -e^{-1}, \quad W(x)e^{W(x)} = x,$$

et donc : $\forall x \geqslant -e^{-1}$, $W(x) = xe^{-W(x)}$. Cette égalité prouve à la fois que $W$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ (on pouvait aussi le déduire du fait que $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$), et qu'on a : $\forall x \geqslant -e^{-1}$, $\ln(W(x)) = \ln(x) - W(x)$, donc :

$$\forall x > 0, \quad W(x) = \ln(x) - \ln(W(x)). \tag{2}$$

Encadrons $W(x)$ pour tout $x$ assez grand, pour démontrer que $\ln(W(x))$ est négligeable devant $\ln(x)$ quand $x \to +\infty$ : tout d'abord, on a $W(x) \geqslant 1$ pour tout $x$ assez grand, étant donné que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (plus précisément, c'est vrai pour $x \geqslant e$). Cela donne $\ln(W(x)) \geqslant 0$, et donc combiné à (2) on a : $W(x) \leqslant \ln(x)$. Ainsi, pour tout $x$ assez grand :

$$1 \leqslant W(x) \leqslant \ln(x), \text{ c'est-à-dire : } 0 \leqslant \ln(W(x)) \leqslant \ln(\ln(x)).$$

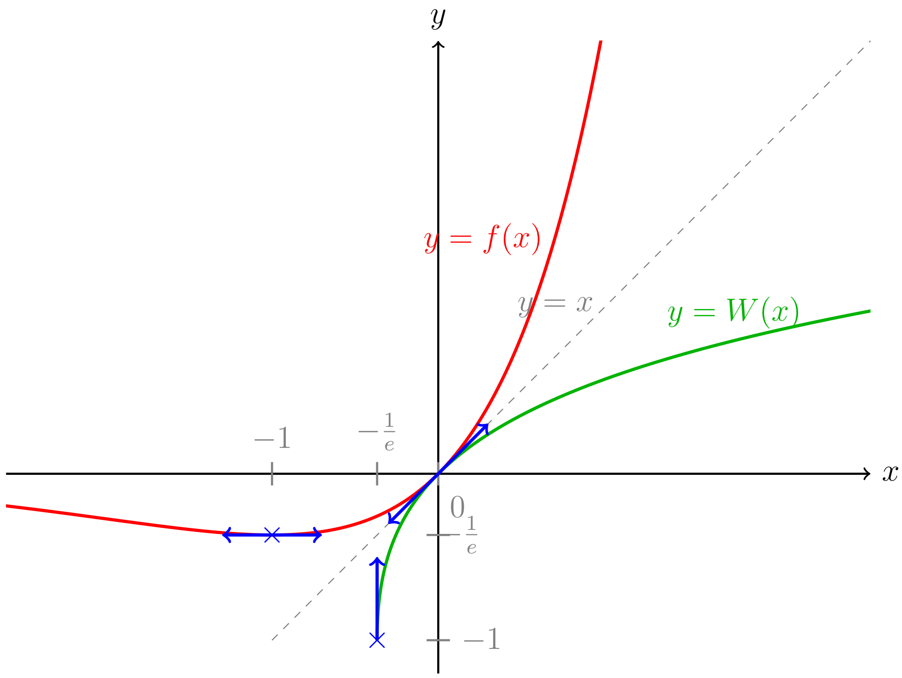
Donc, pour tout $x$ au voisinage de $+\infty$, toujours en utilisant (2) :

$$W(x) = \ln(x) + \underset{x\to+\infty}{O}(\ln(\ln(x))) = \ln(x) + \underset{x\to+\infty}{o}(\ln(x)),$$

c'est-à-dire :

$$W(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x).$$

**Q 5**. Nous savons que le graphe de $f$ et celui de $W$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Tracer l'un suffit donc à en déduire l'autre. Nous avons déjà assuré que $f$ est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$ ; de plus, notons que $f'(-1) = 0$, ce qui permet de préciser l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-1$ (tangente horizontale), et par symétrie on a l'allure de $\mathcal{C}_W$ au voisinage de $-e^{-1}$ (tangente verticale).
Nous connaissons également $W'(0) = 1$, ce qui nous permet de tracer la tangente en 0 à la courbe de $W$. Tout ceci étant considéré, voici les graphes demandés :




Nous aurions aussi pu utiliser le tracé du logarithme pour en déduire, asymptotiquement, celui de $W$ (étant donné que $W(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$), mais attention à ne pas abuser de ce que permet de conjecturer cet équivalent : on peut en effet démontrer facilement, partant des calculs de la question précédente, que :

$$W(x) = \ln(x) - \ln(\ln(x)) + \underset{x\to+\infty}{o}(1),$$

et en particulier $W(x) - \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ : leurs graphes respectifs s'écartent.

**Q 6**. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue sur $]0, 1]$. De plus, d'après la question **Q 4**, on a : $x^\alpha W(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\alpha+1} > 0$, et la fonction de Riemann $x \mapsto x^{\alpha+1} = \frac{1}{x^{-\alpha-1}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $-\alpha - 1 < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > -2$. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est donc intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si : $\alpha > -2$.

**Q 7**. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est continue sur $[1,+\infty[$, et on a d'après la question **Q 4** : $x^\alpha W(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\alpha \ln(x) > 0$. On en déduit que l'application $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si l'application $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ l'est. Pour étudier son intégrabilité, nous allons la comparer à des fonctions de Riemann.

Si $\alpha \geqslant -1$ alors l'inégalité $x^\alpha \ln(x) \geqslant x^\alpha$, valable pour tout $x$ assez grand (par exemple $x \geqslant e$), montre que la fonction $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$, parce que la fonction $x \mapsto x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ si $-\alpha \leqslant 1$ (c'est-à-dire $\alpha \geqslant -1$, ce qu'on a supposé).

Si $\alpha < -1$, alors en prenant $s \in \mathbb{R}$ tel que $s > 1$ et $s < -\alpha$ (par exemple : $s = \frac{1-\alpha}{2}$), nous avons pour tout $x$ au voisinage de $+\infty$.

$$x^s x^\alpha \ln(x) = x^{s+\alpha}\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'après le théorème des croissances comparées (car $s+\alpha < 0$ par hypothèse sur $s$). Donc : $x^\alpha \ln(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^s}\right)$. Et comme $s > 1$, la fonction de Riemann $x \mapsto \frac{1}{x^s}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, la fonction $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ l'est également.

En conclusion : $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$. D'après ce qui précède, on en déduit que l'application $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$ : d'où le résultat.

**Q 8**. On reprend le calcul de la question **Q 1**, sauf qu'on note cette fois-ci que $f'(x) < 0$ pour tout $x < 1$, et donc que $f$ est strictement décroissante sur $[-1,+\infty[$, et le théorème de la bijection monotone implique que $f$ réalise une bijection de $]-\infty,-1]$ dans $[f(-1), \lim_{-\infty} f[ = \left[-\frac{1}{e}, 0\right[$ (la limite est nulle en $-\infty$ d'après le théorème des croissances comparées). D'où le résultat.

**Q 9**. On rappelle que par définition d'une bijection :

— $W(x)$ est l'unique solution à l'équation $f(t) = x$ d'inconnue $t$ DANS $[-1,+\infty[$, et pour $x$ DANS $[-e^{-1},+\infty[$;

— $V(x)$ est l'unique solution à l'équation $f(t) = x$ d'inconnue $t$ DANS $]-\infty,-1]$, et pour $x$ DANS $[-e^{-1},0[$;

Il n'y a ambiguïté sur les solutions à l'équation $f(t) = x$ que si $x$ est dans l'intervalle de définition commun à $V$ et $W$, c'est-à-dire si :

$$x \in [-e^{-1},+\infty[\cap[-e^{-1},0[ = [-e^{-1},0[.$$

Dans ce cas, $f(t) = x$ a deux solutions : $V(x) \in ]-\infty,-1]$ et $W(x) \in [-1,+\infty[$. Il n'y en a pas d'autre, sinon cela contredirait l'injectivité de $f$ soit sur $]-\infty,-1]$, soit sur $[-1,+\infty[$. Enfin, notons que $f(-1) = -e^{-1}$, et que $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$ puis strictement croissante sur $]-1,+\infty[$. Cette étude montre à la fois qu'il n'y a pas de solution à l'équation $f(t) = x$ si $x < -e^{-1}$ (puisqu'il s'agit du minimum de la fonction), et que l'équation $f(t) = -e^{-1}$ n'a qu'une unique solution pour $t \in \mathbb{R}$, et on en déduit : $W(-e^{-1}) = V(-e^{-1}) = -1$.

On peut donc répondre à la question : si $m \in \mathbb{R}$, alors le nombre de solutions à l'équation $xe^x = m$ (qui équivaut à $f(x) = m$), d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, est :

— zéro si $m \in ]-\infty,-e^{-1}[$;

— une si $m = -e^{-1}$ ou si $m \geqslant 0$ : dans ce cas l'unique solution est $W(m)$;

— deux si $m \in ]-e^{-1},0[$ : dans ce cas les solutions sont $W(m)$ et $V(m)$.

**Q 10**. On raisonne de façon similaire à la question précédente, mais cette fois en tenant compte du fait que $f$ est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$ (de sorte que $f$ renverse les inégalités si et seulement si son argument est inférieur à $-1$). En particulier, pour $m$ dans l'intervalle $[-e^{-1},0[$ commun à $V$ et $W$, on a $m=f(W(m))$ et $m=f(V(m))$ et donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$ :

$$xe^x\leqslant m\iff f(x)\leqslant f(W(m))=f(V(m))\iff\left\{\begin{array}{l} x\leqslant W(m) \text{ si } x\in[-1,+\infty[,\\ x\geqslant V(m) \text{ si } x\in]-\infty,-1],\end{array}\right.$$

Pour $m$ dans les autres intervalles, l'étude n'a pas de complication particulière. Notons tout de même que $f(x)\leqslant 0$ pour tout $x\leqslant -1$, donc si $m\geqslant 0$ alors $f(x)\leqslant m$ pour tout $x<-1$ : le cas $x<-1$ est alors trivial dans ce cas, et on peut se contenter de l'étude si $x\geqslant -1$, ce qui permet de résoudre l'inéquation en recourant à la fonction $W$.

On en déduit que si $m\in\mathbb{R}$, alors l'ensemble des solutions à l'inéquation $xe^x\leqslant m$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$, est :

— vide si $m\in]-\infty,-e^{-1}[$ ;

— $]-\infty,-1]\cup[-1,W(m)]=]-\infty,W(m)]$ si $m\geqslant 0$ ;

— $([V(m),+\infty[\cap]-\infty,-1])\cup(]-\infty,W(m)]\cap[-1,+\infty[)=[V(m),W(m)]$ si $m\in]-e^{-1},0[$.

Représentons graphiquement ces intervalles de solutions (sauf le premier, où l'illustration me paraît creuse) sur la figure **Q 10** (page 5). Je représente en vert l'intervalle sur lequel l'inéquation $xe^x\leqslant m$ est vérifiée, et en bleu la portion de graphe correspondante.

**Q 11**. Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}^*)^2$. Notons que l'équation de l'énoncé équivaut à :

$$bxe^{-ax}=-1\iff -axe^{-ax}=\frac{a}{b}\iff f(-ax)=\frac{a}{b}.$$

D'après l'étude que nous avons faite dans la question **Q 9**, on en déduit les solutions éventuelles suivantes :

— si $\frac{a}{b}<-e^{-1}$, alors cette équation n'a pas de solution ;

— si $\frac{a}{b}=-e^{-1}$ ou $\frac{a}{b}\geqslant 0$, alors une solution $x\in\mathbb{R}$ de cette équation vérifie $-ax=W\left(\frac{a}{b}\right)$, c'est-à-dire : $x=-\frac{1}{a}W\left(\frac{a}{b}\right)$ ;

— si $\frac{a}{b}\in]-e^{-1},0[$, alors un raisonnement analogue à celui ci-dessus montre que les solutions sont $-\frac{1}{a}W\left(\frac{a}{b}\right)$ et $-\frac{1}{a}V\left(\frac{a}{b}\right)$.

# II – Probabilités

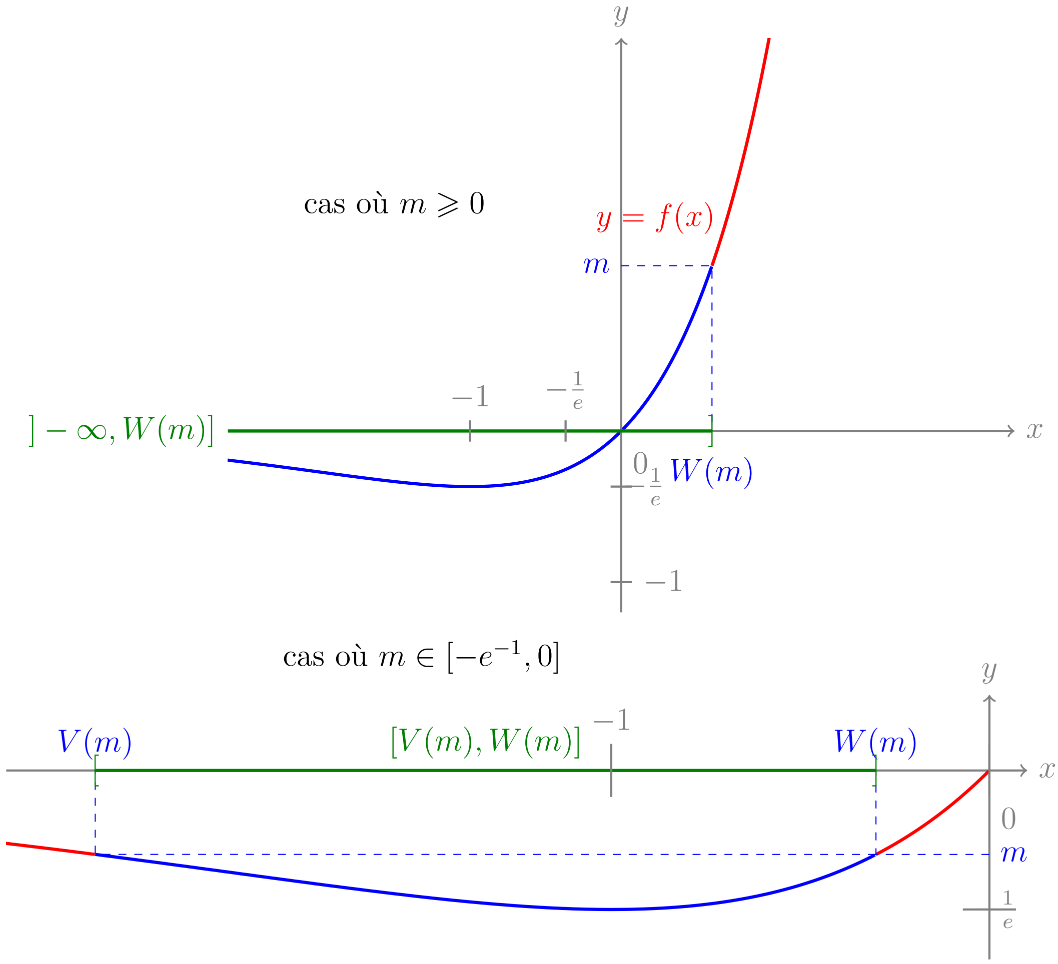
## II. A – Première situation

**Q 12**. Il est clair que $X(\Omega)=\mathbb{N}$. De plus, les données de l'énoncé nous permettent d'écrire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de $X$ sachant $(N=n)$ est une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ (puisqu'il s'agit de compter le nombre de succès – avoir un billet gagnant – dans une série de $n$ épreuves de Bernoulli – acheter un billet – indépendantes et de même paramètre $p$). On en déduit :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(N=n,X=k)=\mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}_{(N=n)}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

En particulier cette probabilité est nulle si $k>n$.

FIGURE 1 – Représentation graphique des solutions à l'inéquation $xe^x \leqslant m$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.




On en déduit la loi de $X$ en utilisant la formule des probabilités totales, avec le système complet d'évènements $((N = n))_{n\in\mathbb{N}}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n, X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n, X = k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{n'=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n'+k}}{(n'+k)!}\binom{n'+k}{k}p^k(1-p)^{n'} \quad (n' = n-k) \\
&= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n'=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n'}}{(n')!}.
\end{aligned}$$

On reconnaît la somme de la série exponentielle, évaluée en $\lambda(1-p)$. On en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}.$$

On reconnaît bel et bien une loi de Poisson de paramètre $\lambda p$, comme attendu. De cela on déduit immédiatement que $X$ admet une espérance et une variance, et qu'on a :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda p.$$

**Q 13**. Comme $X$ est positive et admet une espérance, on peut utiliser l'inégalité de Markov pour obtenir :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{2} = \frac{\lambda p}{2}.$$

Par conséquent, si $p \leqslant \frac{2(1-\alpha)}{\lambda}$, alors $\lambda p \leqslant 2(1-\alpha)$ et on obtient :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant \frac{2(1-\alpha)}{2} = 1-\alpha,$$

ce qui démontre que la condition (II.1) est satisfaite.

**Q 14**. On a :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) = 1 - e^{-\lambda p} - e^{-\lambda p}(\lambda p).$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1-\alpha \iff -e^{-\lambda p}(1+\lambda p) \leqslant -\alpha \overset{[\times e^{-1}]}{\iff} -(1+\lambda p)e^{-(\lambda p+1)} \leqslant -\alpha e^{-1},$$

d'où le résultat en posant $x = -(\lambda p + 1)$.

**Q 15**. D'après la question précédente, la condition (II.1) équivaut à l'inégalité $f(x) \leqslant -\alpha e^{-1}$. Comme $\alpha \in ]0,1[$, on a $-\alpha e^{-1} \in ]-e^{-1}, 0[$, donc l'étude de la question **Q 10** montre que cette inégalité est vérifiée pour :

$$x \in [V(-\alpha e^{-1}), W(-\alpha e^{-1})] \overset{[p=-\frac{x+1}{\lambda}]}{\iff} p \in \left[-\frac{W(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda}, -\frac{V(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda}\right].$$

D'après la question **Q 13**, tout réel $p \in ]0,1[$ vérifiant $p \leqslant \frac{2(1-\alpha)}{\lambda}$ (et il en existe) vérifie la condition (II.1), donc :

$$\left[-\frac{W(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda}, -\frac{V(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda}\right] \cap ]0,1[ \neq \emptyset.$$

Néanmoins l'énoncé est plus précis et veut l'existence d'un plus grand élément $p \in ]0,1[$ tel que la condition (II.1) soit vérifiée. Autrement dit, on veut exclure la possibilité que $\left[-\frac{W(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda}, -\frac{V(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda}\right] \cap ]0,1[$ ait pour borne supérieure 1 (avec l'intervalle qui y est ouvert). Cette condition est évitée à la condition que $-\frac{V(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda} < 1$. Par conséquent, il existe un plus grand réel $p \in ]0,1[$ vérifiant la condition (II.1) si et seulement si :

$$\lambda > -1 - V(-\alpha e^{-1}),$$

et dans ce cas $p = -\frac{V(-\alpha e^{-1})+1}{\lambda}$ est le plus grand réel à convenir.

## II. B – Deuxième situation

**Q 16**. Au vu des données, $X$ compte le nombre de « succès » – inversion d'un bit – dans une série de $r$ épreuves de Bernoulli indépendantes et de paramètre $1-p$. Par conséquent $X$ suit une loi binomiale de paramètres $r$ et $1-p$. On en déduit que $X$ admet une espérance et une variance, et :

$$\mathbb{E}(X) = r(1-p), \quad \mathbb{V}(X) = r(1-p)p.$$

**Q 17**. Comme $X$ est positive et admet une espérance, on peut utiliser l'inégalité de Markov pour obtenir :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{2} = \frac{r(1-p)}{2}.$$

Par conséquent, si $r \leqslant \frac{2(1-\alpha)}{1-p}$, alors $r(1-p) \leqslant 2(1-\alpha)$ et on obtient :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant \frac{2(1-\alpha)}{2} = 1-\alpha,$$

ce qui démontre que la condition (II.1) est satisfaite.

**Q 18**. On a :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) = 1 - p^r - rp^{r-1}(1-p). \tag{3}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1-\alpha \iff -(p^r + rp^{r-1}(1-p)) \leqslant -\alpha \iff -p^r\left(p + r(1-p)\right) \leqslant -\alpha p \\ \iff -e^{r\ln(p)}\left(p + r(1-p)\right) \leqslant -\alpha p\end{aligned}$$

Il apparaît « presque » la fonction $f$, puisque nous avons $r(p-1)e^{r\ln(p)}$ dans le membre de gauche en développant. Il suffit de multiplier par $\frac{\ln(p)}{p-1} > 0$ pour faire apparaître la fonction $f$ (puisqu'on aura alors $r\ln(p)e^{r\ln(p)} = f(r\ln(p))$), et c'est ce qui motive ce qui suit (ainsi que le choix de $a$ et $x$ dans l'énoncé). Il restera à effectuer quelques menus réarrangements à cause du terme $e^{r\ln(p)} \cdot p$ que nous devons « inclure » au terme en $f$, et c'est pourquoi nous n'aurons pas exactement $f(r\ln(p))$ à la fin. Reprenons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1-\alpha &\iff -e^{r\ln(p)}\Bigg(\underbrace{\frac{p}{p-1}\ln(p)}_{\substack{\text{terme manquant}\\ \text{dans l'exponentielle}}} - r\ln(p)\Bigg) \leqslant -\alpha\frac{p\ln(p)}{p-1} \\ &\overset{[\times e^{\frac{p}{1-p}\ln(p)}]}{\iff} e^{r\ln(p)+\frac{p\ln(p)}{1-p}}\left(\frac{p}{1-p}\ln(p) + r\ln(p)\right) \leqslant -\alpha\frac{p\ln(p)}{p-1}e^{-\frac{p}{1-p}\ln(p)}.\end{aligned}$$

Posons $a = \frac{p\ln(p)}{p-1}$ et $x = r\ln(p) - a$. Alors, d'après les calculs ci-dessus, nous avons bien :

$$xe^x \leqslant -\alpha a e^{-a},$$

d'où le résultat.

**Q 19**. La condition (II.2) est vérifiée si et seulement si $f(x) \leqslant -\alpha a e^{-a}$, avec $x = r\ln(p) - a$. Pour résoudre cette inéquation en utilisant la question **Q 10**, encore faut-il situer $-\alpha a e^{-a} < 0$ par rapport à $-e^{-1}$ ; or $-ae^{-a} = f(-a)$, et $-e^{-1}$ est le minimum de la fonction $f$, donc : $-ae^{-a} \geqslant -e^{-1}$. Il est de plus clair que $-ae^{-a} < 0$, donc après multiplication par $\alpha \in ]0,1[$ on en déduit :

$$-e^{-1} < -\alpha a e^{-a} < 0.$$

On peut donc statuer sur l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant -\alpha a e^{-a}$, et on en déduit que la condition (II.2) est vérifiée si et seulement si :

$$x \in \left[V\left(-\alpha a e^{-a}\right), W(-\alpha a e^{-a})\right] \overset{[r=\frac{x+a}{\ln(p)}]}{\iff} r \in \left[\frac{W(-\alpha a e^{-a}) + a}{\ln(p)}, \frac{V\left(-\alpha a e^{-a}\right) + a}{\ln(p)}\right],$$

en prenant garde au fait que $\ln(p) < 0$ car $p < 1$.

On veut toutefois que $r$ soit un entier naturel non nul (c'est la longueur d'un bloc de bits). Autrement dit, on veut montrer que le plus grand élément de l'ensemble solution :

$$\mathcal{S} = \left[\frac{W(-\alpha a e^{-a}) + a}{\ln(p)}, \frac{V\left(-\alpha a e^{-a}\right) + a}{\ln(p)}\right] \cap \mathbb{N}$$

existe, et est supérieur ou égal à 1.
Or l'égalité (3) avec $r = 1$ donne $P(X \leqslant 2) = 0 \leqslant 1 - \alpha$, donc $r = 1$ vérifie trivialement la condition (II.2). Autrement dit, $1 \in \mathcal{S}$. On en déduit que $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non vide et majoré (par $\frac{V\left(-\alpha a e^{-a}\right)+a}{\ln(p)}$), donc il admet un plus grand élément, et ce plus grand élément doit être supérieur ou égal à 1 car $1 \in \mathcal{S}$ : d'où le résultat.

**Q 20**. Il suffit de prendre :

$$r = E\left(\frac{V\left(-\alpha a e^{-a}\right) + a}{\ln(p)}\right),$$

où $E$ désigne la fonction partie entière.

# III – Développement en série entière

## III. A – Le théorème binomial d'Abel

**Q 21**. Il est clair que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\deg(A_k) = k$. La famille $(A_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est donc une famille de $\mathbb{C}_n[X]$ échelonnée en degré : elle est libre. De plus son cardinal égale $n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$, donc c'est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ : d'où le résultat.

**Q 22**. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Si $k = 1$ la vérification est immédiate. Supposons donc $k \geqslant 2$. On a :

$$\begin{aligned}
A_k'(X) &= \frac{1}{k!}(X - ka)^{k-1} + \frac{1}{k!}X \cdot (k-1)(X - ka)^{k-2} \\
&= \frac{1}{k!}\left((X - ka) + (k-1)X\right)(X - ka)^{k-2} \\
&= \frac{1}{k!}\left(kX - ka\right)(X - ka)^{k-2} \\
&= \frac{1}{(k-1)!}(X - a)\left((X - a) - (k-1)a\right)^{k-2} = A_{k-1}(X - a),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

**Q 23**. Soient $k \in [\![0, n]\!]$ et $j \in [\![0, n]\!]$. Si $j > k$, alors $A_k^{(j)} = 0$ car $A_k$ est de degré $k$, et donc : $A_k^{(j)}(ja) = 0$.
Supposons à présent $j \leqslant k$. La question précédente implique, par une récurrence immédiate :

$$A_k^{(j)}(X) = A_{k-j}(X - ja),$$

et donc : $A_k^{(j)}(ja) = A_{k-j}(0)$. Or il est facile de vérifier qu'on a $A_\ell(0) = 1$ si $\ell = 0$ et $A_\ell(1) = 0$ si $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc $A_k^{(j)}(ja) = 0$ si $k - j > 0$, tandis que $A_k^{(j)}(ja) = 1$ si $k - j = 0$.
En conclusion :

$$A_k^{(j)}(ja) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ 1 & \text{si } j = k. \end{cases}$$

**Q 24**. Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Si l'on dérive $j$ fois l'égalité $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$ et qu'on l'évalue en $ja$, alors la question précédente nous permet d'écrire :

$$P^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k^{(j)}(ja) = \alpha_j A_j^{(j)}(ja) = \alpha_j,$$

d'où le résultat.

**Q 25**. Soit $(a,x,y)\in\mathbb{C}^3$. On applique la question précédente au polynôme $P=(X+y)^n$, et on a alors :

$$(X+y)^n=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(ka)A_k=P^{(0)}(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}P^{(k)}(ka)X(X-ka)^{k-1},$$

et comme $P^{(k)}=\frac{n!}{(n-k)!}(X+y)^{n-k}$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on en déduit aisément :

$$(X+y)^n=y^n+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}X(ka+y)^{n-k}(X-ka)^{k-1}=y^n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}X(ka+y)^{n-k}(X-ka)^{k-1}.$$

Il reste à évaluer cette égalité en $x$ pour en déduire le résultat voulu :

$$(x+y)^n=y^n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x(ka+y)^{n-k}(x-ka)^{k-1}.$$

**Q 26**. L'identité demandée est triviale si $n=0$ et nous prenons donc $n\geqslant 1$. Dérivons la relation de la question précédente (l'égalité polynomiale, ou l'égalité pour une variable réelle $x$, s'il choque de dériver selon une variable complexe). On obtient alors, pour tout $(x,a,y)\in\mathbb{C}^3$ :

$$n(x+y)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(ka+y)^{n-k}(x-ka)^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x(ka+y)^{n-k}(k-1)(x-ka)^{k-2}.$$

En posant $x=0$ la seconde somme s'annule, et donc :

$$\forall(a,y)\in\mathbb{C}^2,\quad ny^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(ka+y)^{n-k}(-ka)^{k-1},$$

D'où le résultat.

Il faut tout de même être prudent sur le sens du terme de la somme correspondant à $k=n$, si $ka+y=0$ (par exemple si $a=-1$ et $y=n$ : on ne devrait pas avoir $(na+y)^0=0$ dans ce cas), au risque d'avoir des absurdités dans lesquelles on tombe facilement dans la question **Q 30**. En prévision de cette question, je donne une variante qui isole le terme problématique :

$$\forall(a,y)\in\mathbb{C}^2,\quad ny^{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(ka+y)^{n-k}(-ka)^{k-1}+(-na)^{n-1}.\tag{4}$$

### III. B – Développement en série entière de la fonction $W$

**Q 27**. Nous allons appliquer la règle de D'Alembert. Soit $x\in\mathbb{C}$. Si $x=0$ alors la série $\sum_{n\geqslant 1}a_nx^n$ converge évidemment. Supposons donc $x\neq 0$. Pour tout $n$ au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\frac{n!}{(n+1)!}\times\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\cdot|x|=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\cdot|x|.$$

Or, pour tout $n$ au voisinage de $+\infty$, on a : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=e^{(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$, et l'équivalent classique $\ln(1+u)\underset{u\to 0}{\sim}u$ implique :

$$(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}(n-1)\times\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1.$$

Par continuité de l'exponentielle en 1, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right| = e^1\cdot|x|.$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 1} a_nx^n$ converge absolument si $|x|<\frac{1}{e}$, et diverge grossièrement si $|x|>\frac{1}{e}$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_nx^n$ est $R=\frac{1}{e}$.

**Q 28**. La fonction $S : x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_nx^n$ est de classe $C^\infty$ sur $\left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[$ en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R=\frac{1}{e}$, et on a :

$$S(0)=0,\qquad \text{et :}\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad S^{(n)}(0)=n!a_n=n!\times\frac{(-n)^{n-1}}{n!}=(-n)^{n-1}.$$

**Q 29**. Nous allons démontrer simultanément la définition et la continuité sur $\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right]$, en montrant que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}(x\mapsto a_nx^n)$ converge normalement (donc uniformément) sur cet intervalle. Posons : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\forall x\in\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right]$, $f_n(x)=a_nx^n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $x\in\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right]$ on a bien sûr : $|f_n(x)|\leqslant|a_n|\left(\frac{1}{e}\right)^n$, et cette majoration est indépendante de $x$. Donc, par propriété de la borne supérieure : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\|f_n\|_\infty\leqslant\frac{|a_n|}{e^n}$.

Il reste à montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|}{e^n}$ converge pour obtenir ce qu'on veut ; mais la règle de D'Alembert donne le cas d'incertitude ici. Par contre nous pouvons obtenir un équivalent asymptotique du terme général grâce à la formule de Stirling, que nous rappelons :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On a alors, pour tout $n$ au voisinage de $+\infty$ :

$$\frac{|a_n|}{e^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^{n-1}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{1}{n^{3/2}}>0.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ est d'exposant $3/2>1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|}{e^n}$ converge, et toujours par ce même théorème on en déduit la convergence normale (et donc uniforme) sur $\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right]$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

Comme $f_n$ est continue sur $\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right]$ pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, et que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right]$, on en déduit que $S$ est définie et continue sur $\left[-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right]$ en tant que limite uniforme de fonctions continues.

**Q 30**. Par commodité, posons $a_0=1$. Alors :

$$\forall x\in\left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[,\quad 1+S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n.$$

Comme $x \mapsto 1 + S(x)$ et $x \mapsto xS'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n$ sont des sommes de séries entières de rayon de convergence $\frac{1}{e}$, leur produit de Cauchy converge absolument sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$, et :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad (1 + S(x))xS'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \tag{5}$$

où, par définition d'un produit de Cauchy, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k (n-k) a_{n-k} &= na_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-k)^{k-1}}{k!} \cdot (n-k) \frac{(-n+k)^{n-k-1}}{(n-k)!} \\ &= na_n + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k-1} (-k)^{k-1} (n-k)^{n-k}. \end{aligned}$$

Grâce au théorème binomial d'Abel démontré à la question **Q 26**, nous pouvons simplifier cette somme. Pour $n = 0$ elle vaut trivialement 0. Si $n \geqslant 1$ alors on pose $a = 1$ et $y = -n$ dans (4) et on obtient :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad n(-n)^{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-k)^{k-1} (-n+k)^{n-k} + (-n)^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (-k)^{k-1} (n-k)^{n-k} + (-n)^{n-1}, \end{aligned}$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (-k)^{k-1} (n-k)^{n-k} = (n-1)(-n)^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad c_n = na_n - \frac{(n-1)(-n)^{n-1}}{n!} = na_n - (n-1)a_n = a_n,$$

donc finalement l'égalité (5) devient :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad (1 + S(x))xS'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = S(x),$$

ce qu'il fallait démontrer.

**Q 31**. Comme $S$ est de classe $C^\infty$ sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$, c'est aussi le cas de $h$ par produit et composition de fonctions de classe $C^\infty$, et on a :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad h'(x) = S'(x)e^{S(x)} + S(x)S'(x)e^{S(x)} = (1 + S(x))S'(x)e^{S(x)}. \tag{6}$$

En multipliant cette égalité par $x$, et en utilisant l'égalité $(1+S(x))xS'(x) = S(x)$ démontrée dans la question précédente, on en déduit :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad xh'(x) = S(x)e^{S(x)} = h(x),$$

donc $h$ est solution de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad xy'(x) - y(x) = 0. \tag{7}$$

**Q 32**. Posons $I = \left]-\frac{1}{e},0\right[$ ou $\left]0,\frac{1}{e}\right[$. Comme $x \neq 0$ pour tout $x \in I$, l'équation différentielle ci-dessus équivaut à : $\forall x \in I$, $y'(x) = \frac{1}{x}y(x)$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est le logarithme ; la théorie des équations différentielles linéaires du premier ordre implique donc que les solutions sur $I$ sont de la forme :

$$y : x \mapsto \alpha e^{\ln(|x|)} = \alpha|x|.$$

Quitte à changer $\alpha$ en $-\alpha$, on en déduit que sur les deux intervalles possibles, les solutions sont de la forme $x \mapsto \alpha x$.
À présent, soit $y$ une application dérivable sur $\left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[$ et qui soit solution de (7) sur $\left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[$. En particulier, par restriction, cela définit une solution de (7) sur $\left]-\frac{1}{e},0\right[$ et $\left]0,\frac{1}{e}\right[$. Donc, d'après ce qui précède, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e},0\right[,\ y(x) = \alpha x, \quad \forall x \in \left]0,\frac{1}{e}\right[,\ y(x) = \beta x.$$

Par continuité de $y$ en 0, on doit avoir $y(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} y(x) = 0$. De plus $y$ est dérivable en 0, ce qui impose : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{y(x)-y(0)}{x-0}$, c'est-à-dire : $\beta = \alpha$.
De cela on déduit finalement que si $y$ est une solution de (7) sur $\left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[$, alors $y$ est de la forme $x \mapsto \alpha x$ sur $\left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Réciproquement, cette application est bien une solution de (7), d'où le résultat.

**Q 33**. Nous avons montré que $h : x \mapsto S(x)e^{S(x)}$ est solution de (7). Donc, d'après la question précédente, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[, \quad h(x) = \alpha x.$$

Pour déterminer $\alpha$, on note qu'en utilisant la dérivée calculée en (6), on trouve : $h'(0) = (1+S(0))S'(0)e^{S(0)} = 1$ (en effet $S(0) = 0$ et $S'(0) = 1$ d'après la question **Q 28**). On a aussi $h' = \alpha$, donc $\alpha = 1$. Ainsi :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[, \quad S(x)e^{S(x)} = x.$$

Cette égalité peut se réécrire :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[, \quad f(S(x)) = x. \tag{8}$$

Or, si $x \in \left]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right[$, l'équation $f(t) = x$ a une solution $t \in [-1,+\infty[$, à savoir $W(x)$, et éventuellement une solution supplémentaire $t \in ]-\infty,-1]$ si $x < 0$, à savoir $V(x)$. Pour exclure la possibilité que $S(x)$ soit égal à cette seconde solution si $x < 0$, il suffit de montrer que $S(x) > -1$. Pour cela, on note que l'égalité (8) donne, quand $x \to -\frac{1}{e}$ (et parce que $S$ est continue en $-\frac{1}{e}$ d'après la question **Q 29**) : $f\left(S\left(-\frac{1}{e}\right)\right) = -\frac{1}{e}$. Comme $-1$ est l'unique solution réelle à l'équation $f(t) = -\frac{1}{e}$ (voir question **Q 9**), on en déduit : $S\left(-\frac{1}{e}\right) = -1$.
Alors, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{e},0\right[$ on a :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{n^{n-1}}{n!}(-x)^n > \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{n^{n-1}}{n!}\left(\frac{1}{e}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!}\left(-\frac{1}{e}\right)^n,$$

c'est-à-dire : $\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, 0\right]$, $S(x) > S\left(-\frac{1}{e}\right) = -1$, ce qu'on voulait démontrer.

En conclusion, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$, $S(x)$ est une solution de l'équation $f(t) = x$ d'inconnue $t \geqslant 1$, et l'étude de la question **Q 9** démontre que cette équation n'admet qu'une seule solution strictement supérieure à 1, qui est $W(x)$ (aussi bien pour $x < 0$ et $x \geqslant 0$). Donc :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad W(x) = S(x).$$

**Q 34**. Les applications $S$ et $W$ sont continues sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ : nous l'avons démontré dans la question **Q 29** pour $S$ et dans la question **Q 2** pour $W$. Par conséquent, leurs limites en $\pm\frac{1}{e}$ égalent leurs valeurs en $\pm\frac{1}{e}$. Prendre la limite quand $x \to \pm\frac{1}{e}$ dans l'égalité de la question précédente permet donc de démontrer qu'elle reste valable si $x = \pm\frac{1}{e}$. On en déduit que la réponse à la question posée est affirmative, et on a :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right], \quad W(x) = S(x).$$

Pour $x = -\frac{1}{e}$, on en déduit par ailleurs la jolie identité (non demandée) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}e^{-n}}{n!} = 1.$$

# IV – Approximation de $W$

**Q 35**. Soit $x \geqslant 0$. On a :

$$\phi_x(W(x)) = xe^{-xe^{-W(x)}}.$$

Or on sait que $W(x)e^{W(x)} = x$, donc $W(x) = xe^{-W(x)}$. On en déduit :

$$\phi_x(W(x)) = xe^{-W(x)} = W(x),$$

donc $W(x)$ est un point fixe de $\phi_x$ : ce qu'il fallait démontrer.

**Q 36**. Soit $x \geqslant 0$. Si $x = 0$ alors le résultat à démontrer est évident : supposons $x > 0$. L'application exponentielle est de classe $\mathrm{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc par composition $\phi_x$ l'est aussi, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_x'(t) = x \cdot (xe^{-t})e^{-xe^{-t}} = x^2 e^{-t-xe^{-t}}.$$

De là il est évident que $\phi_x'(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ; majorons $e^{-t-xe^{-t}}$ en étudiant les variations de $g_x : t \mapsto -t - xe^{-t}$, clairement dérivable et de dérivée :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_x'(t) = -1 + xe^{-t}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g_x'(t) > 0$ si et seulement si $e^{-t} > \frac{1}{x}$, si et seulement si $t < -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. De même pour le cas d'égalité. On en déduit le tableau de variations suivant :

| $t$ | $-\infty$ | | $\ln(x)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g_x'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g_x$ | | $\nearrow$ | $g_x(\ln(x))$ | $\searrow$ | |

Comme $g_x(\ln(x)) = -\ln(x) - xe^{-\ln(x)} = -\ln(x) - 1$, on en déduit $g_x(t) \leqslant -\ln(x) - 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_x'(t) = x^2 e^{g_x(t)} \leqslant x^2 e^{-\ln(x)-1} = x^2 \times \frac{1}{xe} = \frac{x}{e}.$$

En conclusion :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \phi_x'(t) \leqslant \frac{x}{e}.$$

**Q 37**. Soient $x \in [0, e]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$|w_{n+1}(x) - W(x)| \overset{[\mathbf{Q\,35}]}{=} |\phi_x(w_n(x)) - \phi_x(W(x))|.$$

Or $\phi_x$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $|\phi_x'| \leqslant \frac{x}{e}$ d'après la question précédente. Donc d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|w_{n+1}(x) - W(x)| = |\phi_x(w_n(x)) - \phi_x(W(x))| \leqslant \frac{x}{e} |w_n(x) - W(x)|.$$

Ceci vaut pour tout $x \in [0, e]$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, par une récurrence facile, on obtient :

$$\forall x \in [0, e],\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{e}\right)^n |w_0(x) - W(x)|, \tag{9}$$

et par définition on a $w_0(x) = 1$ : d'où le résultat.

**Q 38**. Soit $a \in ]0, e[$. L'application $1 - W$ est bornée sur $[0, a]$ en tant qu'application continue sur un segment (le majorant est facile à expliciter mais ce n'est pas important pour ce qui suit). L'inégalité de la question précédente implique :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, a], \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{a}{e}\right)^n \|1 - W\|_\infty.$$

Cette majoration est indépendante de $x$. Donc, par propriété de la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|w_n - W\|_\infty \leqslant \left(\frac{a}{e}\right)^n \|1 - W\|_\infty.$$

Comme $\frac{a}{e} \in ]0, 1[$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{a}{e}\right)^n = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} \|w_n - W\|_\infty = 0$. Ceci démontre que la suite de fonctions $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, a]$ vers $W$ : d'où le résultat.

**Q 39**. La réponse est positive. Nous allons démontrer la version « epsilonesque » de la convergence uniforme, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [0, e], \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{10}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $W$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question **Q 2**, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [e - \eta, e], \quad |W(x) - W(e)| \leqslant \varepsilon.$$

Posons $a = e - \eta$. On a $W(e) = 1$ donc, d'après (9) et l'inégalité ci-dessus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a, e], \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)| \leqslant |1 - W(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Sur $[0, a]$, nous savons que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $W$. Donc, par définition (rappelée en (10)), il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [0, a], \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \varepsilon.$$

En combinant cette inégalité et celle sur $[a, e]$, on a donc l'existence d'un rang $n_0$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait :

$$\forall x \in [0, e], \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui démontre que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, e]$ vers $W$ : d'où le résultat.