Concours Centrale-Supélec 2019

Épreuve de mathématiques I, PSI, quatre heures

Corrigé

I – Résultats préliminaires

I. A –

Q 1. Il y a trois cas de figure à considérer :

- si $\alpha \in \mathbb{Z}$, et $\alpha \leqslant 0$, alors f_α est une application polynomiale, donc $D = \mathbb{R}$; une application polynomiale est de classe C^1, donc f est de classe C^1 sur D ;
- si $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\alpha > 0$, alors f_α est l'inverse d'une application polynomiale, elle est donc définie sur $\mathbb{R}$ privé des réels où le dénominateur s'annule, c'est-à-dire : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; une application polynomiale est de classe C^1, et l'inverse d'une application de classe C^1 est de classe C^1 là où elle ne s'annule pas, donc f est de classe C^1 sur D ;
- si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, alors $f_\alpha(x) = (1-x)^{-\alpha}$ n'est définie que pour $1 - x > 0$, donc : $D =]-\infty, 1[$; l'application polynomiale $x \mapsto 1 - x$ est de classe C^1 sur D et à valeurs dans $]0, +\infty[$, et la fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, donc par composition f_α est de classe C^1 sur D.

Dans tous les cas f_α est de classe C^1 sur D, et on a :

$$\forall x \in D, \quad f'_\alpha(x) = \alpha(1-x)^{-\alpha-1},$$

donc f_α est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\forall x \in D, \quad (1-x)y'(x) = \alpha y(x). \qquad (E_\alpha)$$

Q 2. Nous énonçons le théorème de Cauchy dans le cas d'une équation différentielle linéaire du premier ordre ; dans ce qui suit, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soient $a, b, c : I \to K$ trois applications continues. *On suppose que a ne s'annule jamais sur I.* Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in K$. Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall x \in I, \quad a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admet exactement une solution définie sur I.

Prenons $I =]-1, 1[$; alors f_α est solution de (E_α) sur I et $x \mapsto 1 - x$ ne s'annule pas sur cet intervalle. D'après le théorème de Cauchy linéaire, pour démontrer l'égalité :

$$\forall x \in I, \quad f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha) \frac{x^n}{n!},$$

il suffit donc de démontrer que l'application $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}$ est de classe C^1 sur I et solution du même problème de Cauchy : on invoque alors l'unicité de la solution à ce problème. Commençons donc par vérifier que cette somme de série entière est bien définie sur I, puis qu'elle est solution de (E_α) sur ce même intervalle. Si $\alpha \in \mathbb{Z}$ est un entier négatif, alors $L_n(\alpha) = 0$ pour tout $n > -\alpha$, donc la somme est finie et définie sur $\mathbb{R}$. Supposons $\alpha \notin \mathbb{Z}$, de sorte que $L_n(\alpha) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in]-1,1[$. Si $x = 0$ alors la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}$ est triviale. Supposons $x \neq 0$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\left|L_{n+1}(\alpha)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}\right|} = \left|\frac{L_{n+1}(\alpha)}{L_n(\alpha)}\right| \times \frac{|x|}{n+1} = |\alpha+n|\frac{|x|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} |x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| < 1,$$

donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 0} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}$ converge absolument donc converge. Ainsi la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}$ est bien définie sur I. En fait, il s'agit même de son intervalle ouvert de convergence si α n'est pas un entier négatif, puisqu'il y a divergence grossière pour tout $|x| > 1$ toujours d'après la règle de D'Alembert.

En tant que somme de série entière, l'application S est de classe C^1 sur son intervalle ouvert de convergence (qui contient I), et on la dérive terme à terme :

$$\forall x \in I, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} L_n(\alpha) n\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} L_{n+1}(\alpha)\frac{x^n}{n!},$$

et comme on l'a déjà implicitement utilisé tantôt : $L_{n+1} = L_n \cdot (X+n)$, et pour tout $x \in I$ les séries $\sum_{n\geqslant 0} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}$ et $\sum_{n\geqslant 0} L_n(\alpha)n\frac{x^n}{n!}$ convergent (pour la seconde, cela provient du fait que multiplier par n le terme général d'une série entière ne change pas son rayon de convergence), donc :

$$\forall x \in I, \quad S'(x) = \alpha\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)n\frac{x^n}{n!} = \alpha S(x) + x\sum_{n=1}^{+\infty} L_n(\alpha)n\frac{x^{n-1}}{n!} = \alpha S(x) + xS'(x).$$

On a donc bien : $\forall x \in I$, $(1-x)S'(x) = \alpha S(x)$, donc S vérifie (E_α) sur I.
De plus : $S(0) = L_0(\alpha) = 1$, et $f_\alpha(0) = 1$, donc f_α et S sont solutions du même problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall x \in]-1,1[, \quad (1-x)y'(x) - \alpha y(x) &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Par unicité des solutions à un problème de Cauchy, on conclut : $f_\alpha = S$, ou encore :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}.$$

Q 3. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ sont deux séries entières à coefficients complexes, leur produit de Cauchy est la série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$, où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Le théorème de Cauchy nous dit que si $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ sont respectivement de rayons de convergence R_a et R_b, alors le rayon de convergence R de leur produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$, et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$ on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

Q 4. D'après la question **Q 2**, on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_{\alpha+\beta}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n(\alpha+\beta)}{n!} x^n. \tag{1}$$

Mais on a aussi :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_{\alpha+\beta}(x) = (1-x)^{-\alpha-\beta} = (1-x)^{-\alpha}(1-x)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n(\alpha)}{n!} x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n(\beta)}{n!} x^n.$$

Nous avons là le produit de deux sommes de séries entières de rayon de convergence 1. D'après le théorème rappelé plus haut, on en déduit que leur produit de Cauchy est de rayon de convergence au moins 1, et on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n(\alpha)}{n!} x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n(\beta)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{L_k(\alpha)}{k!} \frac{L_{n-k}(\beta)}{(n-k)!} \right) x^n. \tag{2}$$

Donc, d'après (1) et (2), on a donc :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n(\alpha+\beta)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{L_k(\alpha)}{k!} \frac{L_{n-k}(\beta)}{(n-k)!} \right) x^n.$$

Nous avons une égalité entre deux sommes de séries entières dans un voisinage de 0. Par unicité des coefficients :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{L_n(\alpha+\beta)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{L_k(\alpha)}{k!} \frac{L_{n-k}(\beta)}{(n-k)!},$$

et donc, après multiplication par $n!$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(\alpha+\beta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} L_k(\alpha) L_{n-k}(\beta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_k(\alpha) L_{n-k}(\beta).$$

I. B –

Q 5. Soit $x \in]-1,1[$. On a :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} x^p = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1,$$

et donc la dérivée de $x \mapsto \sum_{p=1}^{+\infty} x^p$ a pour somme :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p x^{p-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Q 6. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit P_n la proposition :

$$« \ \exists R_n \in \mathbb{R}_n[X], \ \forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{p=1}^{+\infty} p^n x^p = \frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}}. \ »$$

Vérifions P_1 : d'après la question précédente, pour tout $x \in]-1,1[$ on a $\sum_{p=1}^{+\infty} p x^p = \frac{x}{(1-x)^2}$, donc on a P_1 en posant $R_1 = X \in \mathbb{R}_1[X]$.

Vérifions l'hérédité. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel qu'on ait P_n, c'est-à-dire :

$$\exists R_n \in \mathbb{R}_n[X], \ \forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{p=1}^{+\infty} p^n x^p = \frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

La série entière $\sum_{p \geqslant 1} p^n x^p$ est de rayon de convergence au moins 1, puisque par hypothèse de récurrence sa somme est définie pour tout $x \in]-1,1[$. Elle est donc dérivable sur $]-1,1[$, et on peut la dériver terme à terme ; on en déduit :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{p=1}^{+\infty} p^n \cdot p x^{p-1} = \frac{R_n'(x)}{(1-x)^{n+1}} + (n+1)\frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+2}} = \frac{(1-x)R_n'(x) + (n+1)R_n(x)}{(1-x)^{n+2}}.$$

On multiplie l'égalité ci-dessus par x, et on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{p=1}^{+\infty} p^{n+1}x^p = \frac{(1-x)xR_n'(x)+(n+1)xR_n(x)}{(1-x)^{n+2}}.$$

d'où P_{n+1} en posant $R_{n+1} = (1-X)XR_n' + (n+1)XR_n$. Il est de degré inférieur ou égal à :

$$\max\left(\deg((1-X)XR_n'), \deg(XR_n)\right) = \max(1+\deg(R_n), 1+\deg(R_n)) \leqslant n+1,$$

comme voulu.

Nous avons montré l'initialisation et l'hérédité, donc P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: d'où l'existence du polynôme R_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que pour tout $x \in]-1,1[$, on ait :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p^n x^p = \frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Il reste à vérifier l'unicité de ce polynôme pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour cela, on note que si, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un autre polynôme noté S_n vérifiant la même relation, alors pour tout $x \in]-1,1[$ on a $\dfrac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \dfrac{S_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$, donc pour tout $x \in]-1,1[$: $R_n(x) = S_n(x)$. On en déduit que le polynôme $R_n - S_n$ a une infinité de racines (tous les réels de l'intervalle $]-1,1[$), ce qui n'est possible que si $R_n - S_n = 0$, c'est-à-dire : $R_n = S_n$. D'où l'unicité.

II – Un modèle particulier d'urne de Pólya

Q 7. Notons d'abord qu'il est assez clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ (le cas où $X_n(\omega) = n+1$ correspondrait à une expérience où l'on a tiré systématiquement une boule blanche).

L'évènement $(X_1 = 1)$ est l'évènement : « tirer une boule noire au premier tirage » tandis que l'évènement $(X_1 = 2)$ est l'évènement : « tirer une boule blanche au premier tirage ». Puisque l'urne a initialement une boule blanche et une boule noire (donc deux boules au total), et qu'on présume le tirage uniforme, on a donc :

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

Ensuite, d'après la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'évènements $((X_1 = 1), (X_1 = 2))$:

$$\forall k \in \{1,2,3\}, \quad P(X_2 = k) = P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = k) + P(X_1 = 2)P_{(X_1=2)}(X_2 = k).$$

Or $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$ d'après ce qui précède, et il y a X_1 boules blanches dans l'urne après le premier tirage, pour trois boules au total (et donc $3 - X_1$ boules noires). Cela nous permet de calculer les différentes probabilités conditionnelles : pour que $(X_2 = k)$ se réalise, il faut que $(X_1 = k-1)$ se réalise et qu'on tire une boule blanche au deuxième tirage, OU que $(X_1 = k)$ se réalise et qu'on tire une boule noire au deuxième tirage. Nous avons donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(X_2=1) & = & \frac{1}{2}P_{(X_1=1)}(X_2=1) = \frac{1}{2}\times\frac{3-1}{3} = \frac{1}{3}, \\ P(X_2=2) & = & \frac{1}{2}\left(P_{(X_1=1)}(X_2=2)+P_{(X_1=2)}(X_2=2)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{3-2}{3}\right) = \frac{1}{3}, \\ P(X_2=3) & = & \frac{1}{2}P_{(X_1=2)}(X_2=3) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Le même raisonnement que ci-dessus implique :

$$\forall k \in [\![1,4]\!], \quad P(X_3=k) = P(X_2=k-1)P_{(X_2=k-1)}(X_2=k) + P(X_2=k-1)P_{(X_2=k)}(X_3=k).$$

pour que $(X_3 = k)$ se réalise, il faut que $(X_2 = k-1)$ se réalise et qu'on tire une boule blanche au troisième tirage, OU que $(X_2 = k)$ se réalise et qu'on tire une boule noire au troisième tirage. Or il y a X_2 boules blanches dans l'urne après deux tirages, pour quatre boules au total (et donc $4 - X_2$ boules noires). On en déduit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(X_3=1) & = & \frac{1}{3}P_{(X_2=1)}(X_3=1) = \frac{1}{3}\times\frac{4-1}{4} = \frac{1}{4}, \\ P(X_3=2) & = & \frac{1}{3}\left(P_{(X_2=1)}(X_3=2)+P_{(X_2=2)}(X_3=2)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{4-2}{4}\right) = \frac{1}{4}, \\ P(X_3=3) & = & \frac{1}{3}\left(P_{(X_2=2)}(X_3=3)+P_{(X_2=3)}(X_3=3)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{4}+\frac{4-3}{4}\right) = \frac{1}{4} \\ P(X_3=4) & = & \frac{1}{3}P_{(X_1=3)}(X_3=4) = \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \end{array}\right.$$

En résumé :

$$\left\{\begin{array}{llcl} \forall k \in \{1,2\}, & P(X_1=k) & = & \frac{1}{2}, \\ \forall k \in \{1,2,3\}, & P(X_2=k) & = & \frac{1}{3}, \\ \forall k \in [\![1,4]\!], & P(X_3=k) & = & \frac{1}{4}, \end{array}\right.$$

Le calcul de leurs fonctions génératrices est alors immédiat :

$$\forall t \in [-1,1], \quad \left\{\begin{array}{lcl} g_1(t) & = & \sum\limits_{k=1}^{2} P(X_1=k)t^k = \frac{1}{2}\left(t+t^2\right), \\ g_2(t) & = & \sum\limits_{k=1}^{3} P(X_2=k)t^k = \frac{1}{3}\left(t+t^2+t^3\right), \\ g_3(t) & = & \sum\limits_{k=1}^{4} P(X_3=k)t^k = \frac{1}{4}\left(t+t^2+t^3+t^4\right), \end{array}\right.$$

Q 8. Soient n et k deux entiers naturels non nuls. Pour obtenir la relation demandée, on reprend le même raisonnement que pour X_2 et X_3 : pour que $(X_n = k)$ se réalise, il faut que $(X_{n-1} = k-1)$ se réalise et qu'on tire une boule blanche au n-ième tirage, OU que $(X_{n-1} = k)$ se réalise et qu'on tire une boule noire au n-ième tirage. Si $(X_{n-1} = j)$ se réalise avec $j \notin \{k-1, k\}$, alors il est impossible de réaliser l'évènement $(X_n = k)$.

Or il y a X_{n-1} boules blanches et $n+1-X_{n-1}$ boules noires dans l'urne après $n-1$ tirages, pour $n+1$ boules au total. On en déduit, en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $((X_{n-1} = j))_{j \in [\![1,n]\!]}$:

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P(X_{n-1} = k-1) P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k) + P(X_{n-1} = k) P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k) \\ &= \frac{k-1}{n+1} P(X_{n-1} = k-1) + \frac{n+1-k}{n+1} P(X_{n-1} = k), \end{aligned} \tag{3}$$

d'où le résultat.

Q 9. Les variables aléatoires X_n, pour $n \in \mathbb{N}$, sont à support fini, donc les fonctions génératrices sont des applications polynomiales, et sont en particulier définies sur $\mathbb{R}$. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on multiplie la relation (3) par t^k, et on somme la relation obtenue pour k allant de 1 à $+\infty$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_n = k) t^k &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{n+1} P(X_{n-1} = k-1) t^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n+1-k}{n+1} P(X_{n-1} = k) t^k \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) P(X_{n-1} = k-1) t^k + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} (n+1-k) P(X_{n-1} = k) t^k \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k P(X_{n-1} = k) t^{k+1} + (n+1) \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_{n-1} = k) t^k - \sum_{k=1}^{+\infty} k P(X_{n-1} = k) t^k \right) \\ &= \frac{t^2 - t}{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} k P(X_{n-1} = k) t^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_{n-1} = k) t^k. \end{aligned}$$

(nous pouvons bien scinder la somme en deux, puisqu'elles sont en vérité finies et il n'y a pas de problème de convergence). La seconde somme du membre de droite est $g_{n-1}(t)$ par définition d'une fonction génératrice (notons qu'on a $P(X_{n-1} = 0) = 0$). La première somme est la dérivée de $t \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_{n-1} = k) t^k = g_{n-1}(t)$. On en déduit :

$$g_n(t) = \frac{t^2 - t}{n+1} g'_{n-1}(t) + g_{n-1}(t),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Q 10. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit P_n la proposition :

$$« \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} t^k \ ».$$

Nous allons démontrer qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par récurrence sur n.
Si $n = 1$ alors elle est vraie, d'après le calcul de g_1 effectué dans la question **Q 7**. D'où l'initialisation.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel qu'on ait P_n. D'après la question précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_{n+1}(t) = \frac{t^2 - t}{n+2} g_n'(t) + g_n(t).$$

Or, d'après P_n, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} t^k, \text{ et donc : } \forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n'(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k t^{k-1}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_{n+1}(t) &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{t^2 - t}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} k t^{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} t^k \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2} \left(\sum_{k=1}^{n+1} k t^{k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} k t^k + (n+2) \sum_{k=1}^{n+1} t^k \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2} \left(\sum_{k=2}^{n+2} (k-1) t^k - \sum_{k=1}^{n+1} k t^k + (n+2) \sum_{k=1}^{n+1} t^k \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2} \left((n+1) t^{n+2} - \sum_{k=1}^{n+1} t^k + (n+2) \sum_{k=1}^{n+1} t^k \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2} \left((n+1) t^{n+2} + (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} t^k \right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \times (n+1) \sum_{k=1}^{n+2} t^k.
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_{n+1}(t) = \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+2} t^k,$$

et pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, P_n implique bien P_{n+1}.
Nous avons démontré l'initialisation et l'hérédité de la proposition P_n, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par principe de récurrence. C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} t^k.$$

Q 11. De l'expression de la fonction génératrice ci-dessus et de l'unicité de ses coefficients, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \ \forall k \in [\![1, n+1]\!], \quad P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

On voit que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la variable aléatoire X_n suit une loi de probabilité uniforme de paramètre $n+1$. Le calcul de l'espérance est alors un résultat de cours :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad E(X_n) = \frac{n+2}{2}.$$

III – Modèle général d'urne équilibrée

Q 12. Détaillons quelles sont les issues possibles de trois tirages. Il peut y avoir, à la fin de ces trois tirages :

— une boule blanche et trois boules noires ; pour cela, il n'y a qu'une seule possibilité : tirer systématiquement l'unique boule blanche de l'urne ;

— deux boules blanches et deux boules noires ; pour cela, on tire d'abord la boule blanche (il n'y a pas le choix au premier tirage), de sorte qu'il y ait une boule de chaque couleur dans l'urne après le premier tirage, puis une noire et une blanche : il y a deux façons d'ordonner ces deux derniers tirages, et la dernière boule tirée peut aussi bien être numérotée 0 ou 1 ;

— trois blanches blanches et une boule noire : pour cela, on tire d'abord la boule blanche (il n'y a pas le choix au premier tirage), puis deux fois la boule noire.

Dans l'écriture de Ω_3, ordonnons les évènements par ordre croissant du nombre de boules blanches dans l'urne qui en résulte :

$$\Omega_3 = \Big\{(B_0, B_0, B_0),\\ (B_0, N_0, B_0), (B_0, N_0, B_1), (B_0, B_0, N_0), (B_0, B_1, N_0),\\ (B_0, N_0, N_0)\Big\}.$$

Notons que le cardinal de Ω_3 est 6. On en déduit la loi de probabilité de X_3, selon le nombre de triplets donnant chaque configuration finale décrite ci-dessus :

$$P(X_3 = 1) = \frac{1}{6}, \quad P(X_3 = 2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(X_3 = 3) = \frac{1}{6}.$$

Q 13. Suite à l'énumération des éléments de Ω_3 ci-dessus, il est clair que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a : $P(u, v) = uv^3 + 4u^2u^2 + u^3v$ (en facteur de chaque monôme $u^k v^\ell$ apparaît le nombre de triplets ω donnant $b(\omega) = k$ et $n(\omega) = \ell$).

Q 14. On a clairement :

$$\Omega_1 = \{(B_j) \mid j \in [\![0, a_0 - 1]\!]\} \bigcup \{(N_j) \mid j \in [\![0, b_0 - 1]\!]\},$$

donc $\text{card}(\Omega_1) = a_0 + b_0$.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Un $(n+1)$-uplet de Ω_{n+1} s'obtient à partir d'un n-uplet de Ω_n (correspondant au résultat des n premiers tirages), auquel on adjoint une $(n+1)$-ième coordonnée, qui correspond à l'une des $a_0 + b_0 + sn$ boules présentes dans l'urne à ce stade de l'expérience (en effet, nous avons $a_0 + b_0$ boules au début de l'expérience, et après chaque tirage nous ajoutons $a + b$ ou $c + d$ boules dans l'urne, or $a + b = c + d = s$). On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \text{card}(\Omega_{n+1}) = (a_0 + b_0 + sn)\text{card}(\Omega_n).$$

Une récurrence immédiate permet alors d'en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \operatorname{card}(\Omega_n) = \prod_{j=0}^{n-1} (a_0 + b_0 + sj) = \prod_{j=0}^{n-1} s\left(\frac{a_0+b_0}{s} + j\right) = s^n L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right),$$

d'où le résultat.

Q 15. Il est supposé que le tirage de chaque boule dans l'urne est équiprobable. Sous cette supposition, puisque X_n compte le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages, et que Ω_n est l'univers de tous les tirages possibles, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) = \frac{\operatorname{card}\left(\{\omega \in \Omega_n; b(\omega) = k\}\right)}{\operatorname{card}\left(\Omega_n\right)}.$$

Q 16. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Posons $N_n = ns + a_0 + b_0$. Notons qu'on a $b(\omega) + n(\omega) = N_n$ pour tout $\omega \in \Omega_n$ (on rajoute s boules dans l'urne après chaque tirage, donc après n tirages il y en a $N_n = ns + a_0 + b_0$ au total, et elles sont soit blanches, soit noires), et donc en particulier : $X(\Omega_n) \subseteq [\![1, N_n]\!]$.
Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$P_n(u, v) = \sum_{\omega \in \Omega_n} u^{b(\omega)} v^{N_n - b(\omega)}.$$

Dans cette somme regroupons, pour tout $k \in [\![0, N_n]\!]$, les termes correspondant à des $\omega \in \Omega_n$ tels que $b(\omega) = k$; pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} P_n(u, v) &= \sum_{k=0}^{N_n} \sum_{\substack{\omega \in \Omega_n \\ b(\omega) = k}} u^{b(\omega)} v^{N_n - b(\omega)} \\ &= \sum_{k=0}^{N_n} u^k v^{N_n - k} \sum_{\substack{\omega \in \Omega_n \\ b(\omega) = k}} 1 \\ &= \sum_{k=0}^{N_n} u^k v^{N_n - k} \operatorname{card}\left(\{\omega \in \Omega_n; b(\omega) = k\}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, prendre $u = t$ et $v = 1$ donne :

$$P_n(t, 1) = \sum_{k=0}^{N_n} \operatorname{card}\left(\{\omega \in \Omega_n; b(\omega) = k\}\right) t^k \overset{\textbf{Q 15}}{=} \operatorname{card}\left(\Omega_n\right) \sum_{k=0}^{N_n} P(X_n = k) t^k = \operatorname{card}\left(\Omega_n\right) g_n(t),$$

d'où la première égalité demandée. On a alors classiquement :

$$E(X_n) = g_n'(1) = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega_n)} \frac{\partial P_n}{\partial u}(1, 1).$$

Q 17. Par commodité, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, posons :

$$B_{n,k} = \{\omega \in \Omega_n ; b(\omega) = k\} .$$

On reprend la notation $N_n = ns + a_0 + b_0$, pour le nombre de boules après n tirages (du fait que l'urne soit équilibrée, on a $N_{n+1} = N_n + s$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![1, N_{n+1}]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} B_{n+1,k} = \{(\omega', B_j) ; \omega' \in B_{n,k-a},\ j \in [\![0, k-a-1]\!]\} \\ \bigcup \{(\omega', N_j) ; \omega' \in B_{n,k-c},\ j \in [\![0, N_n - k + c - 1]\!]\} , \end{aligned}$$

l'union étant disjointe. En effet, pour avoir k boules blanches après $n+1$ tirages, il faut soit avoir $k-a$ boules blanches dans l'urne après n tirages, et tirer une boule blanche au $(n+1)$-ième tirage, soit avoir $k-c$ boules blanches dans l'urne après n tirages, et tirer une boule noire au $(n+1)$-ième tirage. Notons que s'il y a $k-c$ boules blanches dans l'urne après n tirages, alors il y a $N_n - k + c$ boules noires à ce stade.
Le premier ensemble est clairement en bijection avec $B_{n,k-a} \times [\![0, k-a-1]\!]$, donc de cardinal $(k-a)\mathrm{card}(B_{n,k-a})$. De même, le second est de cardinal $(N_n - k + c)\mathrm{card}(B_{n,k-c})$. On en déduit :

$$\forall k \in [\![1, N_{n+1}]\!], \quad \mathrm{card}\,(B_{n+1,k}) = (k-a)\mathrm{card}(B_{n,k-a}) + (N_n - k + c)\mathrm{card}(B_{n,k-c}).$$

Bien sûr, $\mathrm{card}(B_{n,k-a}) = 0$ si $k < a$ et $\mathrm{card}(B_{n,k-c}) = 0$ si $k < c$.
D'après (4), pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ on a donc :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(u, v) &= \sum_{k=1}^{N_{n+1}} \mathrm{card}\,(B_{n+1,k})\, u^k v^{N_{n+1}-k} \\ &= \sum_{k=a+1}^{N_n+s} (k-a)\mathrm{card}\,(B_{n,k-a})\, u^k v^{N_n+s-k} + \sum_{k=c+1}^{N_n+s} (N_n - k + c)\mathrm{card}\,(B_{n,k-c})\, u^k v^{N_n+s-k} \end{aligned}$$

Après le changement d'indice de sommation $k \mapsto k-a$ dans la première somme, et $k \mapsto k-c$ dans la seconde, on a pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(u, v) &= \sum_{k=1}^{N_n+s-a} k \cdot \mathrm{card}\,(B_{n,k})\, u^{k+a} v^{N_n+s-k-a} + \sum_{k=1}^{N_n+s-c} (N_n - k) \cdot \mathrm{card}\,(B_{n,k})\, u^{k+c} v^{N_n+s-k-c} \\ &= \sum_{k=1}^{N_n+s-a} k \cdot \mathrm{card}\,(B_{n,k})\, u^{k+a} v^{N_n+s-k-a} + \sum_{k=1}^{N_n+s-c} (N_n - k) \cdot \mathrm{card}\,(B_{n,k})\, u^{k} v^{N_n+s-k-c} \end{aligned}$$

On rappelle que $s = a + b = c + d$. Donc $s - a = b$ et $s - c = d$, et pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$P_{n+1}(u, v) = u^{a+1} v^b \sum_{k=1}^{N_n+b} k \cdot \mathrm{card}\,(B_{n,k})\, u^{k-1} v^{N_n-k} + u^c v^{d+1} \sum_{k=1}^{N_n+d} (N_n - k) \cdot \mathrm{card}\,(B_{n,k})\, u^k v^{N_n-k-1}.$$

Dans ces deux sommes, les termes correspondant à des indices $k > N_n$ sont nuls. On reconnaît donc les dérivées partielles par rapport à u et v de $(u,v) \mapsto \sum_{k=1}^{N_n} \operatorname{card}(B_{n,k})\, u^k v^{N_n-k}$. D'après (4), il s'agit donc des dérivées partielles de $(u,v) \mapsto P_n(u,v)$. En conclusion :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad P_{n+1}(u,v) = u^{a+1}v^b \frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v) + u^c v^{d+1}\frac{\partial P_n}{\partial v}.$$

Q 18. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose $N_n = ns + a_0 + b_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $k \in [\![1, ns+1]\!]$, on a :

$$\operatorname{card}(\{\omega \in \Omega_n ; b(\omega) = k\}) \leqslant \operatorname{card}(\Omega_n) \overset{\mathbf{Q\,14}}{=} s^n L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right). \tag{5}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour tout $(u,v) \in]0,2[^2$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{P_n(u,v)}{n!}\right| &\overset{(4)}{\leqslant} \frac{s^n}{n!} L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right) \sum_{k=1}^{N_n} u^k v^{N_n-k} \\
&\leqslant \frac{s^n}{n!} L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right) \sum_{k=1}^{N_n} 2^k 2^{N_n-k} \\
&= \frac{s^n}{n!} L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right) 2^{N_n} N_n = (ns+a_0+b_0) 2^{a_0+b_0} \frac{(2^s s)^n}{n!} L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right).
\end{aligned}$$

Or, si on reprend l'étude de la question **Q 2**, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right)\frac{(2^s sx)^n}{n!}$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2^s s}$. Multiplier par n (ou par des constantes non nulles) ne change pas le rayon de convergence, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right)(ns+a_0+b_0)\frac{(2^s sx)^n}{n!}$ est aussi supérieur ou égal à $\frac{1}{2^s s}$. Donc, par comparaison de séries entières, pour tout $(u,v) \in]0,2[^2$ la série entière $\sum_{n\geqslant 0} P_n(u,v)\frac{x^n}{n!}$ est de rayon de convergence supérieur ou égal à $\frac{1}{2^s s}$. Donc, pour tout $\rho \in \left]0, \frac{1}{2^s s}\right]$, la fonction :

$$H : (x,u,v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(u,v)\frac{x^n}{n!}$$

est bien définie sur $D_\rho =]-\rho, \rho[\times]0,2[^2$.

Q 19. Une somme de série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, donc pour tout $(u,v) \in]0,2[^2$, l'application $x \mapsto H(x,u,v)$ est de classe C^∞ sur $]-\rho,\rho[$, et sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme cette somme de série entière.

Q 20. Fixons $x \in]-\rho, \rho[$ et $v \in]0,2[$, et posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in]0,2[, \quad h_n(u) = P_n(u,v)\frac{x^n}{n!}.$$

Montrons que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} h_n$ vérifie les hypothèses du théorème de dérivation terme à terme. On sait déjà qu'elle converge simplement sur $]0,2[$ d'après la question **Q 18**.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h_n est polynomiale donc de classe C^1 sur $]0,2[$, et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in]0,2[, \quad h_n'(u) = \frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v)\frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{k=1}^{N_n} \operatorname{card}\left(\{\omega \in \Omega_n ; b(\omega) = k\}\right) k u^{k-1} v^{N_n-k}\right)\frac{x^n}{n!},$$

où encore une fois on a posé $N_n = ns + a_0 + b_0$.
On utilise encore une fois la majoration (5). On en déduit, après simplifications :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in]0,2[, \quad |h_n'(u)| &\leqslant L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right)2^{N_n-1}\left(\sum_{k=1}^{N_n} k\right)\frac{(s|x|)^n}{n!} \\ &= 2^{a_0+b_0-2}(ns+a_0+b_0)(ns+a_0+b_0+1)L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right)\frac{(2^s s|x|)^n}{n!}.\end{aligned}$$

Donc, si l'on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie sur $]0,2[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|h_n'\|_\infty \leqslant 2^{a_0+b_0-2}(ns+a_0+b_0)(ns+a_0+b_0+1)L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right)\frac{(2^s s|x|)^n}{n!}. \tag{6}$$

Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^{a_0+b_0-2}(ns+a_0+b_0)(ns+a_0+b_0+1)L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right)\frac{(2^s s|x|)^n}{n!}$ converge par le même argument que dans la question **Q 18**, donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} h_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $]0,2[$.
Les hypothèses du théorème de dérivation terme à terme sont donc vérifiées. On en déduit que l'application $u \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} h_n(u) = H(x,u,v)$ est de classe C^1 sur $]0,2[$, et que sa dérivée se calcule en dérivant cette somme terme à terme : ainsi H admet bien une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à u sur D_ρ, d'où le résultat.

Q 21. Soit $(u,v) \in]0,2[^2$. Alors $H(0,u,v)$ est le terme constant de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} P_n(u,v)\frac{x^n}{n!}$, c'est-à-dire : $H(0,u,v) = P_0(u,v) = u^{a_0}v^{b_0}$. Ensuite, d'après les deux questions précédentes, les dérivées partielles de H se calculent en dérivant terme à terme la somme de cette série, et on a donc :

$$\forall (x,u,v) \in D_\rho, \quad \frac{\partial H}{\partial x}(x,u,v) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_n(u,v) n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{n+1}(u,v)\frac{x^n}{n!},$$

tandis que pour tout $(x, u, v) \in D_\rho$ on a :

$$u^{a+1}v^b\frac{\partial H}{\partial u}(x,u,v) + u^c v^{d+1}\frac{\partial H}{\partial v}(x,u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(u^{a+1}v^b\frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v) + u^c v^{d+1}\frac{\partial P_n}{\partial v}(u,v)\right)\frac{x^n}{n!},$$

ce qu'on simplifie avec la relation (III.1) de la question **Q 17** pour obtenir :

$$\forall (x,u,v) \in D_\rho, \quad u^{a+1}v^b\frac{\partial H}{\partial u}(x,u,v) + u^c v^{d+1}\frac{\partial H}{\partial v}(x,u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{n+1}(u,v)\frac{x^n}{n!} = \frac{\partial H}{\partial x}(x,u,v),$$

d'où le résultat.

IV – Modèle général d'une urne de Pólya

Q 22. Posons $\rho = \frac{1}{2^a a} > 0$. Alors, pour tout $(x,u,v) \in D_\rho$, on a bien $(x,u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, et $axu^a < ax2^a < 1$ car $x < \rho$, et de même $axv^a < 1$. Ainsi $D_\rho \subseteq U$.

Avec les notations de la première partie, on a :

$$\forall (x,u,v) \in U, \quad G(x,u,v) = u^{a_0}v^{b_0} f_{\frac{a_0}{a}}\left(axu^a\right) f_{\frac{b_0}{a}}\left(axv^a\right).$$

Or, d'après la question **Q 2**, pour tout $(x,u,v) \in D_\rho$ on a $|axu^a| < 1$ et $|axv^a| < 1$ et on peut donc écrire :

$$f_{\frac{a_0}{a}}\left(axu^a\right) f_{\frac{b_0}{a}}\left(axv^a\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(au^a)^n L_n\left(\frac{a_0}{a}\right)\frac{x^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty}(av^a)^n L_n\left(\frac{b_0}{a}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

Nous avons là un produit de Cauchy de deux séries entières, de rayon de convergence supérieur ou égal à $\rho = \dfrac{1}{2^a a}$ (vérification facile, partant de ce que nous avons démontré dans la question **Q 2**). D'après la question **Q 3**, où nous rappelons l'énoncé du théorème de Cauchy qui s'y rapporte, on en déduit que le produit de Cauchy de ces deux séries entières est aussi de rayon de convergence supérieur ou égal à ρ, et pour tout $(x,u,v) \in D_\rho$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(au^a)^n L_n\left(\frac{a_0}{a}\right)\frac{x^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty}(av^a)^n L_n\left(\frac{b_0}{a}\right)\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{L_k\left(\frac{a_0}{a}\right)}{k!}\frac{L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right)}{(n-k)!}(au^a)^k(av^a)^{n-k}\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k\left(\frac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right)(au^a)^k(av^a)^{n-k}\right)\frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

Par conséquent, si l'on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad Q_n(u,v) = u^{a_0}v^{b_0}a^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k\left(\frac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right)u^{ak}v^{a(n-k)},$$

alors les égalités ci-dessus impliquent :

$$\forall (x,u,v)\in D_\rho,\quad G(x,u,v)=\sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(u,v)\frac{x^n}{n!},$$

d'où le résultat.

Q 23. L'énoncé comporte une coquille : on veut sans doute parler de « dérivation terme à terme par rapport à x de l'expression de G » (et non H).

La justification de cette question est la même que dans la question **Q 19** : une somme de série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, donc pour tout $(u,v)\in]0,2[^2$, l'application $x\mapsto G(x,u,v)$ est de classe C^∞ sur $]-\rho,\rho[$, et sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme cette somme de série entière.

Q 24. Même coquille que dans la question précédente : il doit s'agir de « l'expression de G » (et non H).

On reprend la démonstration faite dans la question **Q 20** : il faut seulement remplacer la majoration de $\left|\frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v)\right|$ par celle de $\left|\frac{\partial Q_n}{\partial u}(u,v)\right|$. On a cette fois, pour tout $(x,u,v)\in D_\rho$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial Q_n}{\partial u}(u,v)\right| &\leqslant a^n\sum_{k=0}^{n}(ak+a_0)\binom{n}{k}L_k\left(\frac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right)u^{ak+a_0-1}v^{a(n-k)+b_0}\\ &\leqslant a^n(n+1)(an+a_0)2^{an+a_0+b_0-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k\left(\frac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right),\end{aligned}$$

et d'après la question **Q 4**, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k\left(\frac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right)=L_n\left(\frac{a_0+b_0}{a}\right),$$

donc finalement :

$$\forall (x,u,v)\in D_\rho,\quad \left|\frac{\partial Q_n}{\partial u}(u,v)\frac{x^n}{n!}\right|\leqslant 2^{a_0+b_0-1}(n+1)(an+a_0)L_n\left(\frac{a_0+b_0}{a}\right)\frac{(2^a a|x|)^n}{n!}.$$

C'est presque la même majoration que dans la question **Q 20** : voir la relation (6). Ainsi, en reprenant le même raisonnement, *mutatis mutandis*, on en déduit, pour tout $x\in]-\rho,\rho[$ et tout $v\in]0,2[$, la convergence uniforme sur $]0,2[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}\frac{\partial Q_n}{\partial u}(\cdot,v)\frac{x^n}{n!}$, les autres hypothèses du théorème de dérivation terme à terme étant facilement vérifiées. Par conséquent, pour tout $(x,v)\in]-\rho,\rho[\times]0,2[$ l'application $u\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}Q_n(u,v)\frac{x^n}{n!}=G(x,u,v)$ est de classe C^1 sur $]0,2[$, et sa dérivée se calcule en dérivant cette somme terme à terme : ainsi G admet bien une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à u sur D_ρ, d'où le résultat.

Q 25. On sait que l'application G vérifie l'équation différentielle (IV.1) sur U, donc sur D_ρ en particulier :

$$\forall (x,u,v) \in D_\rho, \quad u^{a+1}\frac{\partial G}{\partial u}(x,u,v) + v^{a+1}\frac{\partial G}{\partial v}(x,u,v) = \frac{\partial G}{\partial x}(x,u,v).$$

On exprime les dérivées partielles de G sous forme de sommes grâce aux deux questions précédentes, qui assurent qu'on peut les calculer en dérivant terme à terme. On obtient alors, pour tout $(x,u,v) \in D_\rho$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(u^{a+1}\frac{\partial Q_n}{\partial u}(u,v) + v^{a+1}\frac{\partial Q_n}{\partial v}(u,v) \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} Q_n(u,v) n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_{n+1}(u,v)\frac{x^n}{n!}.$$

Nous sommes en présence de deux sommes de séries entières qui coïncident sur un voisinage de 0. On peut donc identifier les coefficients :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (u,v) \in]0,2[^2, \quad Q_{n+1}(u,v) = u^{a+1}\frac{\partial Q_n}{\partial u}(u,v) + v^{a+1}\frac{\partial Q_n}{\partial v}(u,v).$$

Nous avons vu dans la question **Q 17** que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation. Nous allons utiliser ce fait pour démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (u,v) \in]0,2[^2,\ P_n(u,v) = Q_n(u,v)$ (l'énoncé demande de montrer que $P_n = Q_n$, mais un élève de PSI est-il censé savoir ce qu'est formellement un polynôme en plusieurs indéterminées ? ou s'agit-il de montrer que les applications polynomiales sont égales sur $\mathbb{R}^2$? En tout cas, nous nous débrouillerons ici avec cette égalité entre applications polynomiales sur $]0,2[^2$).

Pour $n = 0$: pour tout $(u,v) \in]0,2[^2$ on a $P_0(u,v) = u^{a_0}v^{b_0}$ par définition de P_0, et comme $Q_0(u,v)$ est le coefficient constant de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} Q_n(u,v)\frac{x^n}{n!}$ (dont la somme égale $G(x,u,v)$), on a $Q_0(u,v) = G(0,u,v) = u^{a_0}v^{b_0}$. On a donc bien, pour tout $(u,v) \in]0,2[^2$, l'égalité $P_0(u,v) = Q_0(u,v)$, d'où la proposition pour $n = 0$.

À présent, soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons : $\forall (u,v) \in]0,2[^2,\ P_n(u,v) = Q_n(u,v)$. Alors leurs dérivées partielles sont aussi égales sur $]0,2[^2$, et d'après la relation de récurrence (III.1) vérifiée par $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :

$$\begin{aligned}\forall (u,v) \in]0,2[^2, \quad Q_{n+1}(u,v) &= u^{a+1}\frac{\partial Q_n}{\partial u}(u,v) + v^{a+1}\frac{\partial Q_n}{\partial v}(u,v) \\ &= u^{a+1}\frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v) + v^{a+1}\frac{\partial P_n}{\partial v}(u,v) = P_{n+1}(u,v),\end{aligned}$$

d'où l'égalité au rang $n+1$. Par récurrence, on a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (u,v) \in]0,2[^2, \quad P_n(u,v) = Q_n(u,v).$$

On en déduit, pour tout $(x,u,v) \in D_\rho$:

$$G(x,u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(u,v)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(u,v)\frac{x^n}{n!} = H(x,u,v),$$

donc G et H coïncident sur D_ρ.

Q 26. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(u,v) \in]0,2[^2$, on a : $P_n(u,v) = Q_n(u,v)$. On en déduit que si $n \in \mathbb{N}$, alors le polynôme $P_n(1,X) - Q_n(1,X)$ admet une infinité de racines (tous les réels de l'intervalle $]0,2[$), donc est le polynôme nul. C'est-à-dire : tous ses coefficients sont nuls. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$P_n(1,X) - Q_n(1,X) = \sum_{k=0}^{a_0+na} \operatorname{card}\left(\{\omega \in \Omega_n ; b(\omega) = k\}\right) X^{na+a_0+b_0-k} - a^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_k\left(\frac{a_0}{a}\right) L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right) X^{a(n-k)+b_0}.$$

Au vu de la modélisation de l'expérience dans cette partie, il est clair que :

$$b(\Omega) = \{a_0 + \ell a \mid \ell \in [\![0,n]\!]\}.$$

En écrivant chaque entier k de la première somme sous la forme : $k = a_0 + \ell a$, où $\ell \in [\![0,n]\!]$ (et en posant $\ell = k$ dans la deuxième somme pour faciliter l'identification), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n(1,X) - Q_n(1,X) = \sum_{\ell=0}^{n} \operatorname{card}\left(\{\omega \in \Omega_n ; b(\omega) = a_0 + \ell a\}\right) X^{(n-\ell)a+b_0} - a^n \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} L_\ell\left(\frac{a_0}{a}\right) L_{n-\ell}\left(\frac{b_0}{a}\right) X^{a(n-\ell)+b_0}.$$

La nullité de chaque coefficient implique donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \ell \in [\![0,n]\!], \quad \operatorname{card}\left(\{\omega \in \Omega_n ; b(\omega) = a_0 + \ell a\}\right) = a^n \binom{n}{\ell} L_\ell\left(\frac{a_0}{a}\right) L_{n-\ell}\left(\frac{b_0}{a}\right).$$

D'après les questions **Q 14** et **Q 15** on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\ell \in [\![0,n]\!]$:

$$P(X_n = a_0 + \ell a) = \frac{a^n \binom{n}{\ell} L_\ell\left(\frac{a_0}{a}\right) L_{n-\ell}\left(\frac{b_0}{a}\right)}{\operatorname{card}(\Omega_n)} = \frac{a^n \binom{n}{\ell} L_\ell\left(\frac{a_0}{a}\right) L_{n-\ell}\left(\frac{b_0}{a}\right)}{a^n L_n\left(\frac{a_0+b_0}{a}\right)} = \binom{n}{\ell} \frac{L_\ell\left(\frac{a_0}{a}\right) L_{n-\ell}\left(\frac{b_0}{a}\right)}{L_n\left(\frac{a_0+b_0}{a}\right)},$$

d'où le résultat.

Q 27. L'expérience modélisée dans la partie II correspond à une urne de Pólya avec $a_0 = b_0 = 1$, $a = d = 1$ et $b = c = 0$. D'après la question précédente, on a dans ce cas particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X_n = 1 + k) = \binom{n}{k} \frac{L_k(1)\, L_{n-k}(1)}{L_n(2)} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1},$$

c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![1, n+1]\!], P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$. C'est bien ce que l'on avait trouvé. La fonction génératrice est en effet :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = \sum_{k=1}^{n+1} P(X_n = k) t^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} t^k,$$

conformément au résultat de la question **Q 10**.

Q 28. D'après la question **Q 16** :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad E(X_n) = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega_n)} \frac{\partial P_n}{\partial u}(1, 1).$$

Pour calculer $\dfrac{\partial P_n}{\partial u}(1, 1)$, notons que d'après la question **Q 20**, on a pour tout $(x, u) \in]-\rho, \rho[\times]0, 2[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial P_n}{\partial u}(u, 1) \frac{x^n}{n!} = \frac{\partial H}{\partial u}(x, u, 1) \overset{\mathbf{Q\,25}}{=} \frac{\partial G}{\partial u}(x, u, 1) = a_0 u^{a_0 - 1}(1 - axu^a)^{-\frac{a_0}{a} - 1}(1 - ax)^{-\frac{b_0}{a}}.$$

Posons $u = 1$. Alors, d'après l'égalité ci-dessus et les résultats de la première partie :

$$\forall x \in]-\rho, \rho[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial P_n}{\partial u}(1, 1) \frac{x^n}{n!} = a_0 f_{\frac{a_0+b_0}{a}+1}(ax) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} L_n\left(\frac{a_0 + b_0}{a} + 1\right) \frac{x^n}{n!},$$

et donc, par unicité des coefficients :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial P_n}{\partial u}(1, 1) = a_0 L_n\left(\frac{a_0 + b_0}{a} + 1\right).$$

De plus : $\operatorname{card}(\Omega_n) = a^n L_n\left(\frac{a_0+b_0}{a}\right)$. On conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(X_n) = \frac{a_0 L_n\left(\frac{a_0+b_0}{a} + 1\right)}{a^n L_n\left(\frac{a_0+b_0}{a}\right)} = \frac{a_0 \prod_{j=0}^{n-1}\left(\frac{a_0+b_0}{a} + 1 + j\right)}{a^n \prod_{j=0}^{n-1}\left(\frac{a_0+b_0}{a} + j\right)} = \frac{a_0 \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{a_0+b_0}{a} + j\right)}{a^n \prod_{j=0}^{n-1}\left(\frac{a_0+b_0}{a} + j\right)},$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(X_n) = \frac{a_0}{a^n} \frac{\frac{a_0+b_0}{a} + n}{\frac{a_0+b_0}{a}} = \frac{a_0}{a^n}\left(1 + \frac{na}{a_0 + b_0}\right).$$

Je n'ai pas utilisé l'indication de l'énoncé, puisqu'il se réfère à la question **Q 19**. Je ne sais pas ce qui était attendu de la part du concepteur du sujet.

V – Urne de Friedman et montées de permutations

V. A –

Q 29. Soient $n \in \mathbb{N}$ et u et v des réels tels que $0 < u < v$. Alors $\frac{u}{v} \in]-1,1[$, et d'après la question **Q 6** :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p^n (v-u)^{n+1} \left(\frac{u}{v}\right)^p = (v-u)^{n+1} \times \frac{R_n\left(\frac{u}{v}\right)}{\left(1-\frac{u}{v}\right)^{n+1}} = v^{n+1} R_n\left(\frac{u}{v}\right),$$

où R_n est un polynôme à coefficients réels de degré au plus n, qu'on peut donc écrire sous la forme : $R_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k X^n$, où $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Alors :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p^n (v-u)^{n+1} \left(\frac{u}{v}\right)^p = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k v^{n+1} \left(\frac{u}{v}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k u^k v^{n+1-k}.$$

Toutes les puissances de v sont des entiers naturels dans cette somme, il s'agit donc bien d'une application polynomiale en u et v : d'où le résultat.

Q 30. Pour tout $t \in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} p^n t^p (1-t)^{n+1} = t^{n+1} \sum_{p=n+1}^{+\infty} p^n t^{p-(n+1)} (1-t)^{n+1} = t^{n+1}(1-t)^{n+1} \sum_{p=0}^{+\infty} (p+(n+1))^n t^p.$$

Pour tout $t \in]-1,1[$, on a $|1-t|^{n+1} \leqslant 2^{n+1}$, et l'application $t \mapsto \sum\limits_{p=0}^{+\infty} (p+(n+1))^n t^p$ est une somme de série entière de rayon de convergence 1 (on le montre aisément avec la règle de D'Alembert) ; elle est donc continue sur $]-1,1[$, et en particulier sur le segment $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. D'après le théorème des bornes atteintes, elle est donc bornée sur ce segment, disons par une constante M. On en déduit, pour tout $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} p^n t^p (1-t)^{n+1} \right| \leqslant t^{n+1} 2^{n+1} M,$$

donc : $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} p^n t^p (1-t)^{n+1} \underset{t \to 0^+}{=} O\left(t^{n+1}\right)$.

Q 31. On a $t^{n+1} \underset{t \to 0^+}{=} o\,(t^n)$. Donc pour tout $t \in]0,1[$ on a, d'après la question précédente et l'expression de g_n :

$$g_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{p=1}^{n} p^n t^p (1-t)^{n+1} + \frac{1}{n!} \sum_{p=n+1}^{+\infty} p^n t^p (1-t)^{n+1} = \frac{1}{n!} \sum_{p=1}^{n} p^n t^p (1-t)^{n+1} + \underset{t \to 0^+}{o}\,(t^n).$$

Or, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\forall t \in]0,1[, \quad (1-t)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-t)^k,$$

donc :

$$\forall t \in]0,1[, \quad g_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{p=1}^{n} p^n \binom{n+1}{k} (-1)^k t^{p+k} + \underset{t\to 0^+}{o}(t^n).$$

On regroupe, dans cette somme, les termes selon la valeur de $p+k$ (comme dans la définition d'un produit de polynômes, ou dans un produit de Cauchy). Notons que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $p+k = m$ si et seulement si $p = m-k$. Dès que $p+k > n$, on ne s'embarrasse pas du terme en t^{p+k} en disant qu'il est négligeable devant t^n au voisinage de 0. On obtient alors :

$$\forall t \in]0,1[, \quad g_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n+1}{k} (m-k)^n \right) t^m + \underset{t\to 0^+}{o}(t^n). \tag{7}$$

Il s'agit du développement limité de g_n à l'ordre n en 0.

Q 32. On rappelle qu'on a aussi, par définition d'une série génératrice :

$$\forall t \in]0,1[, \quad g_n(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} P(X_n = m) t^m.$$

En vérité il s'agit d'une somme finie parce que X_n est à support fini (autrement dit g_n est polynomiale ; ce qu'on peut d'ailleurs déduire de la question **Q 29** avec $u = t$ et $v = 1$). De l'écriture de g_n comme application polynomiale, où l'on factorise par t^{n+1} tous ses monômes de degré strictement supérieur à n, on déduit aisément :

$$\forall t \in]0,1[, \quad g_n(t) = \sum_{m=0}^{n} P(X_n = m) t^m + \underset{t\to 0^+}{o}(t^n).$$

En comparant cette expression à (7) on a, par unicité de la partie régulière d'un développement limité :

$$\forall m \in [\![1,n]\!], \quad P(X_n = m) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n+1}{k} (m-k)^n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

V. B –

Q 33. Notons m le nombre de montées de la suite $(u_0, \ldots, u_k)$ (« l'ancienne suite »). Le nombre de descentes de cette suite est $k-m$.

En insérant a entre u_i et u_{i+1}, du fait que $u_i < a$ et $a > u_{i+1}$ par hypothèse, nous ajoutons une montée et une descente à la « nouvelle suite » $(u_0, \ldots, u_i, a, u_{i+1}, \ldots, u_k)$. Cette montée et cette descente se substituent soit à une montée, soit à une descente, de l'ancienne suite, selon la position relative de u_i par rapport à u_{i+1} :

— si $u_i < u_{i+1}$, alors elles remplacent une montée ;

— si $u_i > u_{i+1}$, alors elles remplacent une descente.

Donc :

— si $u_i < u_{i+1}$, alors le nombre de montées de $(u_0, \dots, u_i, a, u_{i+1}, \dots, u_k)$ est $m + 1 - 1 = m$, et son nombre de descentes est $k - m + 1$;

— si $u_i > u_{i+1}$, alors le nombre de montées de $(u_0, \dots, u_i, a, u_{i+1}, \dots, u_k)$ est $m + 1$, et son nombre de descentes est $k - m + 1 - 1 = k - m$.

Autrement dit : si l'on insère a au milieu d'une montée, alors on incrémente le nombre de descentes d'une unité ; si l'on insère a au milieu d'une descente, alors on incrémente le nombre de montées d'une unité.

Q 34. Les permutations de $[\![1, 3]\!]$ sont :

$$(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (3, 2, 1)\ ,(2, 1, 3),\ (3, 1, 2),\ (2, 3, 1).$$

On observe alors directement que les permutations avec m montées sont :

— si $m = 0$: $(3, 2, 1)$;

— si $m = 1$: $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 1, 2)$ et $(2, 3, 1)$;

— si $m = 2$: $(1, 2, 3)$;

— si $m \geqslant 3$: il n'y en a pas.

Par conséquent :

$$A_{3,0} = 1, \quad A_{3,1} = 4, \quad A_{3,2} = 1, \quad \forall m \geqslant 3,\ A_{3,m} = 0.$$

On remarque que $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} A_{3,m} X^{m+1} = P_3(X, 1)$.

Q 35. L'entier $A_{n,0}$ compte le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ strictement décroissantes. Une récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ permet de démontrer qu'une telle permutation est l'application $k \mapsto n + 1 - k$; en particulier, il n'y en a qu'une seule, donc : $A_{n,0} = 1$.

De même, $A_{n,n-1}$ compte le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ strictement croissantes, et la seule permutation à convenir est l'identité. Donc : $A_{n,n-1} = 1$.

Enfin, par définition d'une montée, une permutation de $[\![1, n]\!]$ a nécessairement un nombre de montées strictement inférieur à n, donc $A_{n,m} = 0$ si $m \geqslant n$.

En conclusion :

$$A_{n,0} = 1, \quad A_{n,n-1} = 1, \quad \forall m \geqslant n,\ A_{n,m} = 0.$$

Q 36. L'algorithme produit successivement les suites :

$$(0, 1, 0) \xrightarrow{B_0} (0, 2, 1, 0) \xrightarrow{N_1} (0, 2, 1, 3, 0) \xrightarrow{N_0} (0, 2, 4, 1, 3, 0) \xrightarrow{B_2} (0, 2, 4, 1, 5, 3, 0),$$

donc : $\sigma((B_0, B_0, N_1, N_0, B_2)) = (2, 4, 1, 5, 3)$.

Q 37. Posons $\omega = (B_0, N_0, B_1, N_0, B_2, B_2, B_0)$, et calculons $\sigma(\omega)$ grâce à l'algorithme :

Suite	$(0,1,0)$	$\xrightarrow{N_0}$	$(0,1,2,0)$	$\xrightarrow{B_1}$	$(0,1,3,2,0)$	$\xrightarrow{N_0}$	$(0,1,3,4,2,0)$
Urne	$\{B_0, N_0\}$		$\{B_0, B_1, N_0\}$		$\{B_0, B_1, N_0, N_1\}$		$\{B_0, B_1, B_2, N_0, N_1\}$

$\xrightarrow{B_2}$	$(0,1,3,5,4,2,0)$	$\xrightarrow{B_2}$	$(0,1,3,6,5,4,2,0)$	$\xrightarrow{B_0}$	$(0,7,1,3,6,5,4,2,0)$
	$\{B_0, B_1, B_2, N_0, N_1, N_2\}$		$\{B_0, B_1, B_2, N_0, N_1, N_2, N_3\}$		$\{B_0, B_1, B_2, N_0, N_1, N_2, N_3, N_4\}$

donc : $\sigma(\omega) = (7, 1, 3, 6, 5, 4, 2)$ comme voulu.

Q 38. Tout d'abord, vu que chaque boule tirée ajoute à l'urne une boule de sa couleur opposée, et que l'urne ne contient initialement qu'une boule blanche, on en déduit que pour tout $\omega \in \Omega_n$, $b(\omega)$ égale le nombre de boules noires tirées plus un (parce qu'une boule blanche est initialement présente), tandis que $n(\omega)$ égale le nombre de boules blanches tirées.

Ensuite, si l'on suit l'algorithme et le résultat de la question **Q 33** :

— à chaque boule blanche tirée, on insère un entier (supérieur aux autres de la suite) au milieu d'une montée, donc incrémente d'une unité le nombre de descentes ;

— inversement, à chaque boule noire tirée, on incrémente d'une unité le nombre de montées ;

sachant que la suite initiale $(0, 1, 0)$ (qui ne tient pas compte du premier tirage : nécessairement une boule blanche) contient une montée et une descente. On en déduit que pour tout $\omega \in \Omega_n$, le nombre de montées de $(0, \sigma(\omega), 0)$ est $1 + (b(\omega) - 1) = b(\omega)$ (le 1 correspond à l'unique montée de $(0, 1, 0)$), et son nombre de descentes est $1 + n(\omega) - 1 = n(\omega)$ (le 1 correspond à l'unique descente de $(0, 1, 0)$, et le -1 au fait qu'on ne tient pas compte de la première boule blanche tirée dans l'algorithme).

Pour passer de $(0, \sigma(\omega), 0)$ à $\sigma(\omega)$, on enlève une montée et une descente. On en déduit que pour tout $\omega \in \Omega_n$, la permutation $\sigma(\omega)$ admet $b(\omega) - 1$ montées et $n(\omega) - 1$ descentes.

Q 39. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $m \in [\![0, m-1]\!]$. Grâce à la bijection admise dans l'énoncé, on a :

$$\operatorname{card}(A_{n,m}) = \operatorname{card}((X_n = m+1)) = \operatorname{card}(\Omega_n) P(X_n = m+1) = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (m+1-k)^n.$$