Concours Centrale-Supélec 2018

Épreuve de mathématiques 1 PSI, quatre heures

Corrigé

1. On a bien sûr $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, et $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) \neq \emptyset$ puisque $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} = T(0,\dots,0) \in \mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$. Montrons que $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ est stable par combinaison linéaire : soient $(t_{-n+1},\dots,t_0,\dots,t_{n-2}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$, $(t'_{-n+1},\dots,t'_0,\dots,t'_{n-2}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned}
&T(t_{-n+1},\dots,t_0,\dots,t_{n-2}) + \lambda T(t'_{-n+1},\dots,t'_0,\dots,t'_{n-2})\\
&= \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t'_0 & t'_1 & t'_2 & \cdots & \cdots & t'_{n-1} \\ t'_{-1} & t'_0 & t'_1 & \ddots & & \vdots \\ t'_{-2} & t'_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t'_1 & t'_2 \\ \vdots & & \ddots & t'_{-1} & t'_0 & t'_1 \\ t'_{-n+1} & \cdots & \cdots & t'_{-2} & t'_{-1} & t'_0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} t_0+\lambda t'_0 & t_1+\lambda t'_1 & t_2+\lambda t'_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1}+\lambda t'_{n-1} \\ t_{-1}+\lambda t'_{-1} & t_0+\lambda t'_0 & t_1+\lambda t'_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2}+\lambda t'_{-2} & t_{-1}+\lambda t'_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1+\lambda t'_1 & t_2+\lambda t'_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1}+\lambda t'_{-1} & t_0+\lambda t'_0 & t_1+\lambda t'_1 \\ t_{-n+1}+\lambda t'_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2}+\lambda t'_{-2} & t_{-1}+\lambda t'_{-1} & t_0+\lambda t'_0 \end{pmatrix}\\
&= T(t_{-n+1}+\lambda t'_{-n+1},\dots,t_0+\lambda t'_0, t_{n-1}+\lambda t'_{n-1}) \in \mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}),
\end{aligned}$$

d'où le résultat. Le calcul qui précède montre en passant que l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^{2n-1} & \to & \mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) \\ (t_{-n+1},\dots,t_0,\dots,t_{n-1}) & \mapsto & T(t_{-n+1},\dots,t_0,\dots,t_{n-1}) \end{array}$$

est linéaire ; injective par unicité des coefficients d'une matrice, surjective par définition de $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$, donc c'est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. En particulier il conserve les dimensions, donc :

$$\dim(\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})) = \dim(\mathbb{C}^{2n-1}) = 2n-1,$$

et il conserve les bases ; or l'image par cet isomorphisme de la base canonique est :

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right.$$
$$\left. \ldots, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right),$$

nous fournissant une base de $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$: chaque matrice de cette base donne une façon de remplir de « 1 » une « diagonale », les autres coefficients étant nuls.

2. Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Alors, par une récurrence facile sur $\ell \in \mathbb{N}$, on vérifie que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a : $AB^\ell = B^\ell A$. Toujours par récurrence, cette fois sur $k \in \mathbb{N}$, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a : $A^k B^\ell = B^\ell A^k$. Par conséquent les applications linéaires suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \\ (P,Q) & \mapsto & P(A)Q(B) \end{array}, \text{ et } \begin{array}{rcl} \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \\ (P,Q) & \mapsto & Q(B)P(A) \end{array}$$

coïncident sur la famille génératrice $\big((X^k, X^\ell)\big)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X]$, donc sont égales. Autrement dit : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\forall Q \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)Q(B) = Q(B)P(A)$.

3. Un calcul direct donne : $\chi_A = X^2 - 2aX + (a^2 - bc)$.

4. Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A, c'est-à-dire $a + z$ et $a - z$ où $z \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de bc. Nous allons distinguer deux cas.

   Si $z \neq 0$. Cela correspond à $bc \neq 0$. Il y a dans ce cas deux valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable.

   Si $z = 0$. Cela correspond à $bc = 0$, c'est-à-dire à $b = 0$ ou $c = 0$. Il y a dans ce cas une unique valeur propre double a, et si un seul des deux coefficients b ou c est nul alors A n'est pas diagonalisable : si c'était le cas, il existerait $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} P^{-1} = aP\mathrm{I}_2P^{-1} = a\mathrm{I}_2,$$

mais c'est absurde. Par contre, si $b = c = 0$, alors $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ est diagonale, donc diagonalisable.

En résumé, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ si, et seulement si $bc \neq 0$ ou $b = c = 0$.

5. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Soit M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, soit M ne l'est pas. Dans le premier cas, M est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $\alpha \neq \beta$ (selon que M ait une ou deux valeurs propres).
Dans le second cas, on utilise le fait que M soit néanmoins triangulable dans $\mathbb{C}$ (comme toute matrice complexe) : il existe donc $\alpha, \alpha', \gamma \in \mathbb{C}$ tels que M soit semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix}$. Les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M avec multiplicité ; comme M n'est pas diagonalisable dans ce cas-ci, elle ne peut pas avoir deux racines distinctes, ce qui impose $\alpha = \alpha'$; ainsi M est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

   Dans tous les cas, M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où $\alpha \neq \beta$ (prendre $\gamma = 0$ donne le deuxième type de matrice dans le cas où M est diagonalisable).

6. Comme la relation de similitude est transitive, il suffit de démontrer que $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ sont semblables à des matrices de Toeplitz, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ vérifient $\alpha \neq \beta$. Or $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ *est* une matrice de Toeplitz : il n'y a donc rien à démontrer dans ce cas ; il reste à vérifier qu'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice de Toeplitz. La question **Q 4** va nous aiguiller.

   Détermination d'une matrice de Toeplitz semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ où $\alpha \neq \beta$.

   Analyse. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice de Toeplitz diagonalisable, et soit $z \in \mathbb{C}$ une racine carrée de bc. Alors A est semblable à $\begin{pmatrix} a+z & 0 \\ 0 & a-z \end{pmatrix}$ d'après la quatrième question. Si on trouve $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a + z = \alpha$ et $a - z = \beta$, alors on aura démontré que $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice de Toeplitz A. Résoudre ce système d'inconnues a et z donne $a = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et $z = \frac{\alpha-\beta}{2}$ (c'est-à-dire $bc = \frac{(\alpha-\beta)^2}{4}$). Nous allons nous simplifier la tâche en prenant $b = c$, de sorte que $z = b = \frac{\alpha-\beta}{2}$ convienne.

   Synthèse. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ distincts, posons $A = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \frac{\alpha-\beta}{2} & \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix}$. Alors A est une matrice de

Toeplitz et, suivant la résolution de la question **Q** 4 et l'analyse ci-dessus, elle est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. On a donc trouvé une matrice de Toeplitz semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, où $\alpha \neq \beta$.

Ceci achève de démontrer que les matrices diagonales (à coefficients diagonaux distincts) et triangulaires supérieures de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ sont semblables à des matrices de Toeplitz, donc par transitivité toute matrice d'ordre 2 l'est.

7. L'égalité matricielle $A_n(a,b,c)X = \lambda X$ se traduit sous forme de système ainsi :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
ax_1 & + & bx_2 & & & & & & & & & & & = & \lambda x_1 \\
cx_1 & + & ax_2 & + & bx_3 & & & & & & & & & = & \lambda x_2 \\
 & & cx_2 & + & ax_3 & + & bx_4 & & & & & & & = & \lambda x_3 \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & \vdots \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
 & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & & & & & cx_{n-2} & + & ax_{n-1} & + & bx_n & = & \lambda x_{n-1} \\
 & & & & & & & & & & cx_{n-1} & + & ax_n & = & \lambda x_n
\end{array}\right.$$

c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
ax_1 + bx_2 & = & \lambda x_1, \\
\forall k \in [\![1, n-2]\!],\ cx_k + ax_{k+1} + bx_{k+2} & = & \lambda x_{k+1}, \\
cx_{n-1} + ax_n & = & \lambda x_n.
\end{array}\right.$$

Les deux égalités aux extrémités correspondent aux cas particuliers $k = 0$ et $k = n-1$ de la deuxième relation, avec la convention $x_0 = x_{n+1} = 0$. Alors :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \ cx_k + (a-\lambda)x_{k+1} + bx_{k+2} = 0.$$

8. Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire du second ordre :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

(elle est bien du second ordre, puisqu'il est supposé que $b \neq 0$), s'écrit en fonction des racines de l'équation caractéristique $bx^2 + (a-\lambda)x + c = 0$ ainsi :

— s'il n'existe qu'une racine double r, alors une telle suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des suites $\left(r^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(kr^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$;

— s'il existe deux racines r_1 et r_2, alors une telle suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des suites $\left(r_1^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(r_2^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

9. Raisonnons par l'absurde, et supposons l'existence d'une unique solution r à l'équation caractéristique $bx^2 + (a - \lambda)x + c = 0$. Alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k = (\alpha + \beta k)r^k$. Les conditions $x_0 = x_{n+1} = 0$ impliquent $\alpha = 0$, puis $\beta(n+1)r^{n+1} = 0$. Il est manifeste que $r \neq 0$ (en effet 0 n'est racine de $bx^2 + (a - \lambda)x + c = 0$ qu'à la condition que $c = 0$, ce qui est exclu), donc ceci impose $\beta = 0$. Mais alors $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite identiquement nulle, et en particulier
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
est nul également : c'est impossible puisqu'il s'agit d'un vecteur propre.
Par conséquent, l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2.

10. Le nombre 0 est racine de l'équation $bx^2 + (a - \lambda)x + c = 0$ si et seulement si $c = 0$: c'est exclu puisque par hypothèse $bc \neq 0$. Donc r_1 et r_2 sont non nuls.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$. Alors $x_0 = 0$ implique $\alpha = -\beta$, et on peut écrire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k = \alpha(r_1^k - r_2^k)$. Comme, de plus, on a $x_{n+1} = 0$, on en déduit $\alpha(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) = 0$. Le nombre complexe α étant non nul (sinon $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est identiquement nulle, et $X = 0$, impossible puisqu'il s'agit d'un vecteur propre), on en déduit $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$ après division de l'égalité précédente par α. Cela équivaut à $\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1$, c'est-à-dire : $\dfrac{r_1}{r_2} \in \mathbb{U}_{n+1}$.

11. Grâce aux relations entre coefficients et racines, nous avons :
$$r_1 r_2 = \frac{c}{b}, \text{ et } r_1 + r_2 = \frac{\lambda - a}{b}.$$
Par conséquent $\lambda = a + b\,(r_1 + r_2)$. Comme, de plus, $\dfrac{r_1}{r_2} \in \mathbb{U}_{n+1} = \left\{ e^{\frac{2i\pi\ell}{n+1}} \mid \ell \in [\![0, n]\!] \right\}$, il existe $\ell \in [\![0, n]\!]$ tel que :
$$r_1 = r_2 e^{\frac{2i\pi\ell}{n+1}}, \tag{$*$}$$
et on a même $\ell \neq 0$, sinon $r_1 = r_2$ et les racines ne sont pas distinctes. Cela nous donne ensuite, *via* la technique de l'angle moitié :
$$\lambda = a + br_2\left(1 + e^{\frac{2i\pi\ell}{n+1}}\right) = a + br_2 e^{\frac{i\pi\ell}{n+1}}\left(e^{-\frac{i\pi\ell}{n+1}} + e^{\frac{i\pi\ell}{n+1}}\right) = a + 2br_2 e^{\frac{i\pi\ell}{n+1}} \cos\left(\frac{\pi\ell}{n+1}\right),$$
d'où le résultat désiré en posant $\rho = br_2 e^{\frac{i\pi\ell}{n+1}}$. On a bien, en effet,
$$\rho^2 = b^2 r_2^2 e^{\frac{2i\pi\ell}{n+1}} = b^2 r_2 r_2 e^{\frac{2i\pi\ell}{n+1}} \overset{(*)}{=} b^2 r_1 r_2 = b^2 \frac{c}{b} = bc.$$

12. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. La résolution des questions précédentes nous montre que $x_k = \alpha\left(r_1^k - r_2^k\right)$ et, toujours avec les notations de la question précédente :
$$r_1^k - r_2^k = r_2^k\left(e^{\frac{2i\pi\ell k}{n+1}} - 1\right) = r_2^k e^{\frac{i\pi\ell}{n+1}}\left(e^{\frac{i\pi\ell k}{n+1}} - e^{-\frac{i\pi\ell k}{n+1}}\right) = 2ir_2^k e^{\frac{i\pi\ell k}{n+1}} \sin\left(\frac{\pi\ell k}{n+1}\right).$$

et d'après la résolution de la question précédente on a $r_2 e^{\frac{i\pi\ell}{n+1}} = \dfrac{\rho}{b}$, donc $r_2^k e^{\frac{i\pi\ell k}{n+1}} = \left(\dfrac{\rho}{b}\right)^k$, ce qui achève de démontrer que $x_k = 2i\alpha\dfrac{\rho^k}{\beta^k}\sin\left(\dfrac{\pi\ell k}{n+1}\right)$.

13. Soit $\rho \in \mathbb{C}$ une racine carrée de bc. L'étude des questions **Q 7** à **Q 12** permet de montrer que pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, le nombre complexe $\lambda_\ell = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$ est une valeur propre de $A_n(a, b, c)$, de vecteur propre associé $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, où l'on a défini :
$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = \frac{\rho^k}{\beta^k}\sin\left(\frac{\pi\ell k}{n+1}\right).$$
Les $\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$, et donc les λ_ℓ, sont tous distincts pour $\ell \in [\![1, n]\!]$, l'application cosinus étant injective sur $[0, \pi]$ (car strictement décroissante). On en déduit que la matrice $A_n(a, b, c)$ admet n valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

14. On a :
$$M_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ M_n^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_n^n = \mathrm{I}_n,$$
ou plus synthétiquement, si f désigne l'endomorphisme canoniquement associé à M et $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$:
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \forall i \in [\![1, n]\!],\ f^k(\vec{e}_i) = \begin{cases} \vec{e}_{i-k} & \text{si } i > k, \\ \vec{e}_{n+i-k} & \text{si } i \leqslant k. \end{cases}$$
Comme $M_n^{n-1}M_n = M_n^n = \mathrm{I}_n$, la matrice M_n est inversible, d'inverse M_n^{n-1}. Un polynôme annulateur de M_n est $X^n - 1$.

15. Le polynôme annulateur $X^n - 1 = \prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(X - \omega_n^k\right)$ est scindé et à racines simples dans $\mathbb{C}$, donc M_n est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Ses valeurs propres sont parmi les racines du polynôme annulateur $X^n - 1$ (qui est, soit dit en passant, son polynôme caractéristique), c'est-à-dire dans l'ensemble $\left\{\omega_n^k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$. En fait, résoudre l'équation $M_nX = \omega_n^k X$, d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, montre que le spectre de M_n est exactement l'ensemble $\left\{\omega_n^k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$, et pour tout

$k \in [\![0, n-1]\!]$ on a :

$$\ker\left(M_n - \omega_n^k \mathrm{I}_n\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^k \\ \omega_n^{2k} \\ \vdots \\ \omega_n^{k(n-1)} \end{pmatrix} \right\}.$$

Une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de M_n est donc :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n \\ \omega_n^2 \\ \vdots \\ \omega_n^{n-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^{n-1} \\ \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \right).$$

16. La matrice Φ_n est la matrice de passage de la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans la base de vecteurs propres constituée dans la question précédente. Elle est donc inversible, et d'après la formule du changement de base :

$$\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \omega_n^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

17. Si A est une matrice circulante, il existe $(t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $A = T(t_1, t_2, \dots, t_0, \dots, t_{n-1})$. Mais alors, suivant ce que l'on a démontré dans la question **Q 14**, on a aussi : $A = \sum\limits_{k=0}^{n-1} t_k M_n^k$. Il suffit alors de poser $P = \sum\limits_{k=0}^{n-1} t_k X^k$ pour avoir le résultat voulu.
18. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On fait la division euclidienne de P par $X^n - 1$: il existe $Q, R \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\deg(R) < n$ et $P = Q(X^n - 1) + R$. En évaluant cette égalité en M_n, on obtient : $P(M_n) = R(M_n)$. Or, si on écrit R sous la forme $R = \sum\limits_{k=0}^{n-1} t_k X^k$, alors $P(M_n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} t_k M_n^k$ est une matrice circulante.
19. D'après les deux questions précédentes, l'ensemble des matrices circulantes est l'image de l'application linéaire :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}[X] & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \\ P & \mapsto & P(M_n) \end{cases},$$

donc est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (et même de $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$). De cette même description, on déduit la stabilité par produit, puisque $P(M_n)Q(M_n) = (PQ)(M_n) \in \mathrm{im}(\varphi)$, et par transposition, puisque ${}^tP(M_n) = P({}^tM_n) = P(M_n^{n-1}) = (P \circ X^{n-1})(M_n) \in \mathrm{im}(\varphi)$.

20. Notons δ_n la matrice diagonale de la question **Q 16**, et soit A une matrice circulante. Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(M_n)$. Alors, comme $M_n = \Phi_n \delta_n \Phi_n^{-1}$, on a :
$$A = \Phi_n P(\delta_n) \Phi_n^{-1} = \Phi_n \begin{pmatrix} P(1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & P(\omega_n) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & P(\omega_n^2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & P(\omega_n^{n-1}) \end{pmatrix} \Phi_n^{-1}.$$
Le spectre de A est donc $\left\{ P(\omega_n^k) \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$, et les vecteurs propres associés sont les mêmes que ceux de M_n, puisque la matrice de passage Φ_n donnant la diagonalisation ci-dessus est la même.

21. Supposons qu'il existe $\vec{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $\left(\vec{x}_0, f_M(\vec{x}_0), \ldots, f_M^{n-1}(\vec{x}_0)\right)$ soit une base de $\mathbb{C}^n$. Alors $f_M^n(\vec{x}_0) \in \mathbb{C}^n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\left(\vec{x}_0, f_M(\vec{x}_0), \ldots, f_M^{n-1}(\vec{x}_0)\right)\right)$, donc il existe $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que : $f_M^n(\vec{x}_0) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f_M^k(\vec{x}_0)$. La matrice de f_M relativement à la base $\left(\vec{x}_0, f_M(\vec{x}_0), \ldots, f_M^{n-1}(\vec{x}_0)\right)$ est alors :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} = C(a_0, \ldots, a_{n-1}),$$
donc (i) implique (ii).
Réciproquement, si M est semblable à la matrice $C(a_0, \ldots, a_{n-1})$, soit $(\vec{x}_0, \ldots, \vec{x}_{n-1})$ la base dans laquelle f_M a pour matrice $C(a_0, \ldots, a_{n-1})$. Alors, par définition de la matrice associée à un endomorphisme dans une base donnée, on a $f_M(\vec{x}_0) = \vec{x}_1$, $f_M(\vec{x}_1) = \vec{x}_2$, etc., et plus généralement :
$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f_M(\vec{x}_k) = \vec{x}_{k+1}.$$
On en déduit, par récurrence, que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a $\vec{x}_k = f_M^k(\vec{x}_0)$. Finalement, $(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-1}) = (\vec{x}_0, f_M(\vec{x}_0), \ldots, f_M^{n-1}(\vec{x}_0))$ est une base de la forme annoncée. Ainsi (ii) implique (i).

22. Utilisant le fait que $f_M(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on voit que la matrice de la famille $\left(\vec{u}, f_M(\vec{u}), \ldots, f_M^{n-1}(\vec{u})\right)$ dans la base de vecteurs propres $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est :
$$\begin{pmatrix} u_1 & \lambda_1 u_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} u_1 \\ u_2 & \lambda_2 u_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} u_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n & \lambda_n u_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} u_n \end{pmatrix}.$$

La famille $\left(\vec{u}, f_M(\vec{u}), \dots, f_M^{n-1}(\vec{u})\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ à la condition que cette matrice soit inversible. Or son déterminant égale, en utilisant sa n-linéarité par rapport aux lignes :

$$u_1 \cdots u_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Nous reconnaissons là le déterminant d'une matrice de Vandermonde : il est non nul à la condition que les λ_i soient tous distincts. La famille $\left(\vec{u}, f_M(\vec{u}), \dots, f_M^{n-1}(\vec{u})\right)$ est donc une base de $\mathbb{C}^n$ si, et seulement si les u_i sont tous non nuls et les λ_i tous distincts.

23. En combinant les questions **Q 21** et **Q 22**, on déduit qu'un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{C}^n$ est cyclique si et seulement s'il admet n valeurs propres distinctes, et les vecteurs cycliques sont, dans ce cas, tous les vecteurs n'ayant aucune coordonnée nulle dans une base de vecteurs propres.

24. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$. Alors :

$$C(a_0, \dots, a_{n-1})X_0 = \lambda X_0 \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & & & a_0 x_n & = & \lambda x_1 \\ x_1 & & & + & a_1 x_n & = & \lambda x_2 \\ & \ddots & & & \vdots & & \\ & & x_{n-2} & + & a_{n-2}x_n & = & \lambda x_{n-1} \\ & & & x_{n-1} + & a_{n-1}x_n & = & \lambda x_n \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{cccccccc} -\lambda x_1 & & & & & a_0 x_n & = & 0 \\ x_1 & - & \lambda x_2 & & + & a_1 x_n & = & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots & & \\ & & x_{n-2} & - \lambda x_{n-1} & + & a_{n-2}x_n & = & 0 \\ & & & x_{n-1} & + & (a_{n-1} - \lambda)x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

On résout le système avec les opérations successives $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, mais en commençant par la dernière ligne. Cela revient à pratiquer la méthode du pivot de Gauss avec les pivots dans l'ordre inhabituel $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_n$. Alors :

$$C(a_0, \dots, a_{n-1})X_0 = \lambda X_0 \iff \left\{ \begin{array}{cccccc} & & & \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i - \lambda^n\right) x_n & = & 0 \\ x_1 & & + & \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \lambda^{i-1} - \lambda^{n-1}\right) x_n & = & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & x_{n-2} & + & (a_{n-2} + \lambda a_{n-1} - \lambda^2)x_n & = & 0 \\ & & x_{n-1} + & (a_{n-1} - \lambda)x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

Ce système a une solution X_0 non nulle à la condition nécessaire et suffisante que λ vérifie $\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i\lambda^i - \lambda^n = 0$, c'est-à-dire que λ soit une racine du polynôme $X^n - \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ (qui est par ailleurs le polynôme caractéristique de $C(a_0, \dots, a_{n-1})$).

25. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de $X^n - \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i X^i$. On reprend les calculs de la question précédente :

$$C(a_0,\dots,a_{n-1})X_0 = \lambda X_0 \iff \left\{\begin{array}{llllll} x_1 & & & + & \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i\lambda^{i-1} - \lambda^{n-1}\right) x_n & = 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & x_{n-2} & + & (a_{n-2} + \lambda a_{n-1} - \lambda^2) x_n & = 0 \\ & & & x_{n-1} + & (a_{n-1} - \lambda) x_n & = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \forall j \in [\![1, n-1]\!],\ x_j = -\left(\sum_{i=j}^{n-1} a_i\lambda^{i-j} - \lambda^{n-j}\right) x_n.$$

Donc $\ker(C(a_0, \dots, a_{n-1}) - \lambda \mathrm{I}_n)$ est de dimension 1, engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$ où l'on a défini :

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ x_j = \lambda^{n-j} - \sum_{i=j}^{n-1} a_i\lambda^{i-j}.$$

26. Soit $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice cyclique ; alors C est semblable à $C(a_0, \dots, a_n)$, et leurs sous-espaces propres sont isomorphes. Les sous-espaces propres de C sont donc des droites vectorielles d'après la question précédente, et on a :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(C)} \dim\left(\ker\left(C - \lambda \mathrm{I}_n\right)\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(C)} 1 = \mathrm{card}\left(\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(C)\right).$$

D'après le critère de diagonalisation, C est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{card}\left(\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(C)\right) = n$: c'est le cas si, et seulement si C admet n valeurs propres distinctes.

27. On reprend le raisonnement de la question **Q 2**, *mutatis mutandis*, avec $Q = X$.

28. Soit $g \in \mathcal{C}(f_M)$. Comme $g(\vec{x}_0) \in \mathbb{C}^n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\left(\vec{x}_0, f_M(\vec{x}_0), \dots, f_M^{n-1}(\vec{x}_0)\right)\right)$ par hypothèse sur f_M et $\vec{x}_0$, il existe des nombres complexes $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que :

$$g(\vec{x}_0) = \alpha_0\vec{x}_0 + \alpha_1 f_M(\vec{x}_0) + \cdots + \alpha_{n-1} f_M^{n-1}(\vec{x}_0).$$

Partant de cette égalité, en utilisant le fait que f et g commutent, on montre que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a :

$$g(f_M^k(\vec{x}_0)) = f_M^k(g(\vec{x}_0)) = \alpha_0 f_M^k(\vec{x}_0) + \alpha_1 f_M(f_M^k(\vec{x}_0)) + \cdots + \alpha_{n-1} f_M^{n-1}(f_M^k(\vec{x}_0)).$$

Ainsi les endomorphismes g et $\alpha_0 \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n} + \alpha_1 f_M + \cdots + \alpha_{n-1} f_M^{n-1}$ coïncident sur la base $\left(\vec{x}_0, f_M(\vec{x}_0), \dots, f_M^{n-1}(\vec{x})\right)$ de $\mathbb{C}^n$, donc sont égaux. On a donc : $g = P(f_M)$, où l'on a posé $P = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k$.

29. La question **Q 27** montre que $\{P(f_M) \mid P \in \mathbb{C}[X]\}$ est inclus dans $\mathcal{C}(f_M)$, tandis que la question **Q 28** montre l'inclusion réciproque. Il y a donc égalité des deux ensembles : si f_M est cyclique, alors g et f_M commutent si et seulement si g est un polynôme en f_M.

30. Les valeurs propres de la matrice triangulaire N se lisent sur la diagonale : son unique valeur propre est donc 0, avec multiplicité n. Par ailleurs, le rang de N étant $n-1$, son noyau (qui est le sous-espace propre de N associé à 0) est de dimension 1 d'après le théorème du rang, manifestement engendré par le n-ième vecteur de la base canonique (puisque la n-ième colonne de N est nulle). Par conséquent :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(N)} \dim\left(\ker(N - \lambda \mathrm{I}_n)\right) = \dim(\ker(N)) = 1 < n,$$

donc N n'est pas diagonalisable.

31. La matrice N est égale à $C(0, \dots, 0)$: c'est donc une matrice cyclique.

32. Comme N est une matrice cyclique, d'après la question **Q 29** l'ensemble des matrices commutant avec N est $\{P(N) \mid P \in \mathbb{C}[X]\}$: c'est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par les puissances de N, que nous allons déterminer. On a :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ N^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dots,$$

$$N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \mathbf{0} & & \vdots \\ 0 & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

et $N^n = 0$. Or il s'agit précisément, d'après la base explicitée dans la question **Q 1**, d'une base du sous-espace des matrices de Toeplitz dont on ne retient que les matrices triangulaires inférieures. Donc l'ensemble des matrices qui commutent avec N est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.

33. Notons $A = ((a_{i',j'}))_{1\leqslant i',j'\leqslant n} \in \Delta_i$ et $B = ((b_{i',j'}))_{1\leqslant i',j'\leqslant n} \in \Delta_j$. Soit $(i',j') \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $j'-i' \neq i+j$. Par hypothèse, on a $a_{i',t'} = 0$ pour tout $t \in [\![1,n]\!]$ tel que $t'-i' \neq i$. Par conséquent, le coefficient (i',j') de AB égale :

$$\sum_{t=1}^{n} a_{i',t}b_{t,j'} = a_{i',i+i'}b_{i+i',j'}$$

(si, du moins, $i+i' \leqslant n$; sinon il est nul). Par hypothèse, on a $b_{i+i',j'} = 0$ dès que $j'-(i+i') \neq j$, c'est-à-dire dès que $j'-i' \neq i+j$, donc le coefficient (i',j') de AB est nul dès que $j'-i' \neq i+j$: cela signifie précisément que $AB \in \Delta_{i+j}$.

34. Si $A \in H_i$ et $B \in H_j$, on peut écrire $A = \sum\limits_{i'=i}^{n-1} A^{(i')}$ et $B = \sum\limits_{j'=j}^{n-1} B^{(j')}$. Alors, d'après la question précédente :

$$AB = \sum_{i'=i}^{n-1}\sum_{j'=j}^{n-1} \underbrace{A^{(i')}B^{(j')}}_{\in \Delta_{i'+j'}} \in \bigoplus_{\substack{i\leqslant i'\leqslant n-1\\ j\leqslant j'\leqslant n-1}} \Delta_{i'+j'},$$

or $i'+j' \geqslant i+j$ pour tous $i' \geqslant i$ et $j' \geqslant j$, et $\Delta_{i'+j'} = \{0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}\}$ dès que $i'+j' \geqslant n$, donc $\bigoplus\limits_{\substack{i\leqslant i'\leqslant n-1\\ j\leqslant j'\leqslant n-1}} \Delta_{i'+j'} \subseteq \bigoplus\limits_{i''=i+j}^{n-1} \Delta_{i''} = H_{i+j}$, d'où le résultat.

35. Comme C est nilpotente, on a $C^n = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ et également $(-C)^n = (-1)^n C^n = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$. Alors, en télescopant la somme :

$$(\mathrm{I}_n - (-C))\sum_{p=0}^{n-1}(-C)^p = \sum_{p=0}^{n-1}\Big((-C)^p - (-C)^{p+1}\Big) = \mathrm{I}_n - (-C)^n = \mathrm{I}_n.$$

Ceci montre que $\mathrm{I}_n + C$ est inversible, d'inverse : $(\mathrm{I}_n + C)^{-1} = \sum\limits_{p=0}^{n-1}(-C)^p = \sum\limits_{p=0}^{n-1}(-1)^p C^p$.

36. Pour montrer que P est inversible, il suffit de vérifier que C est bien une matrice nilpotente. Or $C \in \Delta_{k+1}$ et donc, d'après la question **Q 33**, une récurrence immédiate donne : $\forall p \in \mathbb{N}$, $C^p \in \Delta_{p(k+1)}$. Pour tout p tel que $p(k+1) \geqslant n$ (c'est par exemple le cas pour $p = n$), on a $\Delta_{p(k+1)} = \{0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}\}$, et donc $C^p = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$. Ainsi C est nilpotente, et d'après la question précédente $P = \mathrm{I}_n + C$ est inversible. On a de plus :

$$P^{-1} = \sum_{p=0}^{n-1} \underbrace{(-C)^p}_{\in \Delta_{p(k+1)}} \in \bigoplus_{p=0}^{n-1} \Delta_{p(k+1)}.$$

37. Soit $M \in \Delta_i$. On pose $M' = P^{-1}MP - M$, de sorte que $\varphi(M) = M + M'$; vérifions que $M' \in H_{k+1}$.

Pour simplifier, écrivons $P^{-1} = \mathrm{I}_n + T$ où $T = \sum\limits_{p=1}^{n-1} (-C)^p \in \bigoplus\limits_{p=1}^{n-1} \Delta_{p(k+1)} \subseteq H_{k+1}$. On sait de plus que $C \in \Delta_{k+1}$ et $M \in \Delta_i$. Alors, d'après la question **Q 34**, on a :

$$M' = P^{-1}MP - M = (\mathrm{I}_n + T)M(\mathrm{I}_n + C) - M = \underbrace{TM}_{\in H_{k+i+1}} + \underbrace{MC}_{\in \Delta_{i+k+1}} + \underbrace{TMC}_{\in H_{i+2k+2}},$$

et il est manifeste que $H_{k'} \subseteq H_k$ si et seulement si $k \leqslant k'$. Ayant supposé que $i \geqslant 0$, on a donc $\Delta_{i+k+1} \subseteq H_{i+k+1} \subseteq H_{k+1}$ et $H_{i+2k+2} \subseteq H_{k+1}$, puis $M' \in H_{k+1}$: d'où le résultat.

38. On reprend le raisonnement ci-dessus, en posant $N' = P^{-1}NP - N - (NC - CN)$ (de sorte que $\varphi(N) = N + NC - CN + N'$), et en vérifiant que $N' \in H_{k+1}$. On a cette fois-ci, toujours en notant $T = \sum\limits_{p=1}^{n-1} (-C)^p = -C + \sum\limits_{p=2}^{n-1} (-C)^p$:

$$N' = TN + NC + TNC - (NC - CN) = \sum_{p=1}^{n-1} (-C)^p N + TNC + CN = \sum_{p=2}^{n-1} (-C)^p N + TNC,$$

or $\sum\limits_{p=2}^{n-1} (-C)^p N \in \bigoplus\limits_{p=2}^{n-1} \Delta_{p(k+1)-1} \subseteq H_{2k+1}$ et $TNC \in H_{k+1-1+k+1} = H_{2k+1}$ d'après les questions **Q 33** et **Q 34** (en effet $N = D_{-1} \in \Delta_{-1}$), donc $N' \in H_{2k+1} \subseteq H_{k+1}$: d'où le résultat.

39. En utilisant la linéarité de φ, et le fait que $T \in H_0$, on observe qu'il existe $T' \in H_{k+1}$ tel que :

$$B = \varphi(A) = (N + T) + (NC - CN + N' + T')$$

(nous n'avons pas utilisé, dans la question **Q 37**, le fait que i soit inférieur à k, donc l'existence de T' se démontre de même en décomposant T en somme de matrices diagonales d'ordre i, où $i \in [\![0, n-1]\!]$). Faisons le compte : on a $N \in H_{-1}$, $T \in H_0$, $NC - CN \in H_k$ et $N' + T' \in H_{k+1}$. Tous ces sous-espaces vectoriels sont inclus dans H_{-1}, d'où la première assertion.
De plus, les différentes appartenances rappelées ci-dessus permettent d'écrire :

$$B = A + (NC - CN + N' + T') \Longrightarrow \sum_{i=-1}^{n-1} \underbrace{B^{(i)}}_{\in \Delta_i} = \sum_{i=-1}^{n-1} \underbrace{A^{(i)}}_{\in \Delta_i} + \underbrace{NC - CN}_{\in \Delta_k} + \underbrace{N' + T'}_{\in H_{k+1}}.$$

Par unicité des composantes dans la somme directe $H_{-1} = \bigoplus\limits_{i=-1}^{n-1} \Delta_i$, on obtient bien $B^{(i)} = A^{(i)}$ pour tout $i \in [\![-1, k-1]\!]$, puis $B^{(k)} = A^{(k)} + NC - CN$ pour $i = k$, et $B^{(i)} = A^{(i)} + (N' + T')^{(i)}$ pour tout $i \in [\![k+1, n-1]\!]$ (mais cette dernière relation ne nous intéresse pas).

40. Soit $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $X \in \ker(\mathcal{S})$ si et seulement si $XN = NX$, si et seulement si X commute avec N. Or, d'après la question **Q 32**, l'ensemble des matrices qui commutent avec N est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures, d'où le résultat.

41. Comme $N \in \Delta_{-1}$, pour tout $X \in \Delta_{k+1}$ on a $NX \in \Delta_k$ et $XN \in \Delta_k$ d'après la question **Q 33**, donc $\mathcal{S}(X) = NX - XN \in \Delta_k$: ceci montre que $\mathcal{S}(\Delta_{k+1}) \subseteq \Delta_k$. La démonstration est analogue avec $\mathcal{S}^*$, en utilisant le fait que ${}^tN \in \Delta_1$.
42. Soient $X \in \Delta_{k+1}$ et $Y \in \Delta_k$. Les différentes propriétés de la transposition et de la trace impliquent :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{S}_{k+1}(X), Y\rangle &= \mathrm{tr}({}^t(NX - XN)Y)\\ &= \mathrm{tr}({}^tX{}^tNY) - \mathrm{tr}({}^tN{}^tXY)\\ &= \mathrm{tr}({}^tX{}^tNY) - \mathrm{tr}({}^tXY{}^tN)\\ &= \mathrm{tr}({}^tX({}^tNY - Y{}^tN))\\ &= \langle X, \mathcal{S}_k^*(Y)\rangle.\end{aligned}$$

Par conséquent, si $X' \in \mathrm{im}(\mathcal{S}_{k+1})$ et $Y \in \ker(\mathcal{S}_k^*)$, il existe $X \in \Delta_{k+1}$ telle que $X' = \mathcal{S}_{k+1}(X)$, et l'égalité ci-dessus implique $\langle X', Y\rangle = \langle \mathcal{S}_{k+1}(X), Y\rangle = \langle X, \mathcal{S}_k^*(Y)\rangle = 0$. Ceci démontre que $\ker(\mathcal{S}_k^*)$ et $\mathrm{im}(\mathcal{S}_{k+1})$ sont orthogonaux : on a donc $\mathrm{im}(\mathcal{S}_{k+1}) \subseteq \ker(\mathcal{S}_k^*)^\perp$. Montrons que ces deux espaces vectoriels ont même dimension ; d'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\mathrm{im}(\mathcal{S}_{k+1})) = \dim(\Delta_{k+1}) - \dim(\ker(\mathcal{S}_{k+1})) = \dim(\Delta_{k+1}),$$

puisque $\ker(\mathcal{S}_{k+1})$ est engendré par les matrices de Toeplitz triangulaires inférieures, dont les coefficients hors de la diagonale d'ordre $k+1$ sont nuls : aucune matrice ne vérifie cela à moins d'être nulle, car $k+1 > 0$ par hypothèse. De plus, un sous-espace vectoriel de dimension finie et son orthogonal étant supplémentaires, on a :

$$\dim(\ker(\mathcal{S}_k^*)^\perp) = \dim(\Delta_k) - \dim(\ker(\mathcal{S}_k^*)) = \dim(\Delta_k) - 1,$$

puisque $\ker(\mathcal{S}_k^*)$ est engendré par les matrices de Toeplitz triangulaires supérieures, dont les coefficients hors de la diagonale d'ordre k sont nuls : on vérifie que cela implique $\ker(\mathcal{S}_k^*) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(D_k)$: il s'agit d'une droite vectorielle.

Il reste à vérifier que $\dim(\Delta_k) - 1 = \dim(\Delta_{k+1})$: pour cela, on constate qu'on a clairement $\dim(\Delta_i) = n - i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ (il y a $n - i$ coefficients diagonaux sur la diagonale d'ordre i), d'où la relation ci-dessus.

Pour résumer,

$$\dim(\mathrm{im}(\mathcal{S}_{k+1})) = \dim(\Delta_{k+1}) = \dim(\Delta_k) - 1 = \dim(\ker(\mathcal{S}_k^*)^\perp),$$

et l'inclusion $\mathrm{im}(\mathcal{S}_{k+1}) \subseteq \ker(\mathcal{S}_k^*)^\perp$ a été démontrée ci-dessus : cela achève de démontrer que $\mathrm{im}(\mathcal{S}_{k+1}) = \ker(\mathcal{S}_k^*)^\perp$. En particulier,

$$\Delta_k = \ker(\mathcal{S}_k^*) \oplus \ker(\mathcal{S}_k^*)^\perp = \ker(\mathcal{S}_k^*) \oplus \mathrm{im}(\mathcal{S}_{k+1}).$$

43. Pour montrer l'existence d'une matrice L semblable à A dont tous les coefficients d'ordre k sont égaux, et telle que : $\forall i \in [\![-1, k-1]\!]$, $L^{(i)} = A^{(i)}$, il suffit d'après la question **Q 39** de montrer l'existence de $C \in \Delta_{k+1}$ telle que $A^{(k)} + NC - CN \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(D_k)$.
Or $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(D_k) = \ker(\mathcal{S}_k^*)$, et $\{NC - CN \mid C \in \Delta_{k+1}\} = \mathrm{im}(\mathcal{S}_{k+1})$: la question précédente nous permet donc de démontrer le résultat désiré.
En effet, comme $A^{(k)} \in \Delta_k = \ker(\mathcal{S}_k^*) \oplus \mathrm{im}(\mathcal{S}_{k+1})$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $C \in \Delta_{k+1}$ tel que :
$$A^{(k)} = \alpha D_k + S_{k+1}(C) = \alpha D_k + (NC - CN).$$
On applique alors la question **Q 39** à la matrice $-C$: si l'on pose $L = \varphi(A) = (\mathrm{I}_n - C)^{-1} A (\mathrm{I}_n - C)$, alors L est semblable par A, et on a :
$$\begin{cases} \forall i \in [\![-1, k-1]\!], L^{(i)} = A^{(i)} \\ L^{(k)} = A^{(k)} - NC + CN = \alpha D_k, \end{cases}$$
donc tous les coefficients diagonaux d'ordre k de L sont égaux à un même réel α : ce qu'il fallait démontrer.

44. Prenons d'abord $k = 0$. Si une matrice M est cyclique, alors il existe $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que M soit semblable à $C(a_0, \dots, a_{n-1})$. Une telle matrice s'écrit $C(a_0, \dots, a_{n-1}) = N + T_0$, où
$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$
est triangulaire supérieure. D'après la question précédente, $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ est donc semblable à une matrice L_0 dont tous les coefficients diagonaux sont égaux, disons à un réel t_0, et telle que l'on ait : $L_0^{(-1)} = C(a_0, \dots, a_{n-1})^{(-1)} = N$. Autrement dit :
$$L_0 = \begin{pmatrix} t_0 & * & \cdots & \cdots & * \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t_0 \end{pmatrix}.$$
Prenons à présent $k = 1$. La matrice L_0 s'écrit sous la forme $L_0 = N + T_1$, où :
$$T_1 = \begin{pmatrix} t_0 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_0 \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure. D'après la question précédente, L_0 est donc semblable à une matrice L_1 dont tous les coefficients diagonaux d'ordre 1 sont égaux, disons à un réel t_1, et telle que l'on ait : $L_1^{(-1)} = L_0^{-1} = N$ et $L_1^{(0)} = L_0^{(0)} = t_0 \mathrm{I}_n$. Autrement dit :

$$L_1 = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & * & \cdots & * \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t_0 \end{pmatrix}.$$

On poursuit la construction ainsi : si, pour $k \in [\![0, n-2]\!]$, nous avons construit des matrices $L_0, \ldots, L_k$ telles qu'elles soient toutes semblables deux à deux (donc semblables à M, puisque la relation de similitude est transitive), et telle que pour tout $i \in [\![-1, k-1]\!]$ il existe $t_i \in \mathbb{R}$ tel que $L_k^{(i)} = t_i D_i$ (où $t_{-1} = 1$), alors en appliquant la question **Q 43** à la matrice L_k, nous avons l'existence d'une matrice L_{k+1} qui lui est semblable, dont tous les coefficients diagonaux d'ordre $k+1$ sont égaux à un réel noté t_{k+1}, et telle que pour tout $i \in [\![-1, k]\!]$ on ait : $L_{k+1}^{(i)} = L_k^{(i)} = t_i D_i$. Si on poursuit cette construction jusqu'à $k = n-1$, nous avons l'existence d'une matrice L_{n-1} semblable à M et de la forme :

$$L_{n-1} = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & t_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t_0 \end{pmatrix} = T(0, \ldots, 0, 1, t_0, \ldots, t_{n-1}).$$

C'est une matrice de Toeplitz : d'où le résultat.