

Centrale 2017 - Psi Maths 2

I. Préliminaires

- I.A.1) Si $z = (z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est p -périodique, $\{z_k, k \in \mathbb{N}\}$ se réduit à l'ensemble fini (donc borné) $\{z_k, 0 \leq k < p\}$.
- I.A.2) Les suites 1-périodiques sont les suites constantes.
- I.A.3) Si $z = (z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est p -périodique, et pour $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $z_{n+kp} = z_n$ résulte d'une récurrence évidente sur k .
- I.A.4) Soit $z = (z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, convergente vers ℓ et p -périodique. Soit $n \in \mathbb{N}$, quelconque.
D'après (I.A.3), la suite $k \mapsto z_{n+kp}$ est constante en z_n .
Elle est aussi extraite de z donc convergente vers ℓ . On en déduit $z_n = \ell$, pour tout n .
Ainsi la suite z est constante (et la réciproque est évidente).

I.B.1) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $C = AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

$$\text{Alors } |c_{i,j}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \leq \|A\|_0 \sum_{k=1}^n |b_{k,j}| \leq n \|A\|_0 \|B\|_0.$$

Comme c'est vrai pour tous i, j dans $[[1, n]]$, on en déduit : $\|AB\|_0 \leq n \|A\|_0 \|B\|_0$.

I.B.2) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Y = (y_j)_{1 \leq j \leq n}$ dans \mathbb{C}^n . Soit $Z = AY = (z_i)_{1 \leq i \leq n}$.

$$\text{Alors } |z_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |y_j| \leq \|A\|_0 \sum_{j=1}^n |y_j| \leq n \|A\|_0 \|Y\|_0.$$

Comme c'est vrai pour tout $i \in [[1, n]]$, on en déduit : $\|AY\|_0 \leq n \|A\|_0 \|Y\|_0$.

II. Exemples de suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients périodiques

II.A.1) Soit $\Delta = a^2 - 4$ le discriminant de l'équation caractéristique $\mathcal{C} : r^2 + ar + 1 = 0$.

– Si $\Delta \neq 0$, c'est-à-dire si $a \notin \{-2, 2\}$, notons r_1, r_2 les racines complexes distinctes de \mathcal{C} .

Dans ces conditions, $\text{Sol(II.1)} = \{z \mapsto z_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k, (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$.

– Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si $a \in \{-2, 2\}$, alors \mathcal{C} possède la racine double $r_1 = r_2 = -\frac{a}{2}$.

Dans ces conditions, $\text{Sol(II.1)} = \{z \mapsto z_k = (\alpha k + \beta) r_1^k, (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$.

Dans tous les cas, on a bien sûr $r_1 + r_2 = -a$ et $r_1 r_2 = 1$.

II.A.2) On suppose $|a| > 2$. Ainsi $\begin{cases} 2 < |a| \leq |r_1| + |r_2| \\ |r_1| |r_2| = 1 \end{cases}$ et on peut par exemple choisir $0 < |r_1| < 1 < |r_2|$.

Soit $z : k \mapsto \alpha r_1^k + \beta r_2^k$ une solution p -périodique de (II.1).

– Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $z_{k+p} = z_k$ c'est-à-dire $\alpha r_1^{k+p} + \beta r_2^{k+p} = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$.

Il en résulte $\begin{cases} \alpha r_1^p = \alpha \\ \beta r_2^p = \beta \end{cases}$ par unicité de l'écriture dans la base $\begin{cases} k \mapsto r_1^k \\ k \mapsto r_2^k \end{cases}$ de Sol(II.1)

Du fait que $r_1^p \neq 1$ et $r_2^p \neq 1$, il vient $\alpha = \beta = 0$, donc z est la suite nulle.

– Autre rédaction : nécessairement $\beta = 0$ sans quoi la suite $z : k \mapsto z_k \sim \beta z_2^k$ ne serait pas bornée (cf I.A.1).

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_k = 0$ (car $|r_1| < 1$) donc z est constante en 0 (cf I.A.2) c'est-à-dire z est la suite nulle.

II.A.3) Si $a = -2$, alors $\text{Sol(II.1)} = \{z \mapsto z_k = \alpha k + \beta, (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$ est l'ensemble de suites arithmétiques.

Il y a en particulier toutes les suites constantes, et les suites non bornées $k \mapsto \alpha k$ quand $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

II.A.4) Si $a = 2$, alors $\text{Sol(II.1)} = \{z \mapsto z_k = (\alpha k + \beta)(-1)^k, (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$.

On y trouve les suites 2-périodiques $k \mapsto \beta(-1)^k$ ($\beta \in \mathbb{C}$) et les suites non bornées $k \mapsto \alpha k(-1)^k$ ($\alpha \in \mathbb{C}^*$).

II.A.5) On choisit $a = 2 \cos \frac{2\pi}{p}$. On a $-2 < a < 2$ (et même $-1 \leq a < 2$ car $p \geq 3$).

On a alors $r^2 + ar + 1 = (r - e^{2i\pi/p})(r - e^{-2i\pi/p})$ donc on peut choisir $r_1 = e^{2i\pi/p}$ et $r_2 = e^{-2i\pi/p}$.

Dans ce cas, $\text{Sol(II.1)} = \{z \mapsto z_k = \alpha e^{2ik\pi/p} + \beta e^{-2ik\pi/p}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\}$.

Avec ce choix de a , toutes les solutions de (II.1) sont p -périodiques.

II.B.1) Clairement, Sol(II.2) est un \mathbb{C} -espace vectoriel, et Ψ est linéaire de Sol(II.2) dans \mathbb{C}^2 .

Par ailleurs, compte-tenu de la relation (II.2) où les b_k sont non nuls, une suite $z = (z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de Sol(II.2) est définie de manière unique par la donnée de z_0 et z_1 (récurrence immédiate de pas deux sur l'entier k).

Ainsi Ψ est bijective : c'est un isomorphisme de Sol(II.2) sur \mathbb{C}^2 .

II.B.2) Soit $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $z = (z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux éléments de Sol(II.2) . Soit $W : k \mapsto W_k = b_k(y_k z_{k+1} - z_k y_{k+1})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et en utilisant (II.2) pour remplacer z_{k+2} et y_{k+2} :

$$\begin{aligned} W_{k+1} &= b_{k+1}(y_{k+1}z_{k+2} - z_{k+1}y_{k+2}) \\ &= y_{k+1}(-a_{k+1}z_{k+1} - b_k z_k) - z_{k+1}(-a_{k+1}y_{k+1} - b_k y_k) \\ &= b_k(y_k z_{k+1} - z_k y_{k+1}) = W_k \text{ (ce qui prouve que la suite } W \text{ est constante)} \end{aligned}$$

II.B.3 On sait que Ψ est un isomorphisme de Sol(II.2) sur \mathbb{C}^2 . On en déduit les équivalences :

Les suites $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $z = (z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ forment une base de Sol(II.2)

$$\Leftrightarrow \Psi(y) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ et } \Psi(z) = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ forment une base de } \mathbb{C}^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = y_0 z_1 - z_0 y_1 \neq 0 \Leftrightarrow W_0 = b_0(y_0 z_1 - z_0 y_1) \neq 0 \text{ (car } b_0 \neq 0)$$

II.C) On a les équivalences suivantes :

La suite $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ est élément de Sol(II.2)

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, z_{k+2} = \frac{1}{b_{k+1}}(-b_k z_k - a_{k+1} z_{k+1})$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} z_{k+1} \\ z_{k+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{b_{k+1}} \begin{pmatrix} 0 & b_{k+1} \\ -b_k & -a_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_k \\ z_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, Z_{k+1} = A_k Z_k, \text{ avec } A_k = \frac{1}{b_{k+1}} \begin{pmatrix} 0 & b_{k+1} \\ -b_k & -a_{k+1} \end{pmatrix} \text{ (qui est dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ en fait)}$$

II.D.1) D'après ce qui précède, on a $\det A_k = \frac{b_k}{b_{k+1}}$ pour tout k .

$$\text{On en déduit (par télescopage, puis sachant que } b_p = b_0) : \det Q = \prod_{k=0}^{p-1} \det(A_k) = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{b_k}{b_{k+1}} = \frac{b_0}{b_p} = 1.$$

II.D.2) L'égalité $Z_{kp} = Q^k Z_0$ est évidente si $k = 0$.

On la suppose donc vraie pour un certain rang $k \geq 0$. Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} Z_{(k+1)p} &= Z_{kp+p} = A_{kp+p-1} Z_{kp+p-1} = A_{kp+p-1} A_{kp+p-2} Z_{kp+p-2} = \cdots \\ &= A_{kp+p-1} A_{kp+p-2} \cdots A_{kp} Z_{kp} \end{aligned}$$

Mais la suite $k \mapsto A_k$ est p -périodique, donc $A_{kp+p-1} A_{kp+p-2} \cdots A_{kp} = A_{p-1} A_{p-2} \cdots A_0 = Q$.

Ainsi $Z_{(k+1)p} = Q Z_{kp} = Q Q^k Z_0 = Q^{k+1} Z_0$, ce qui achève la récurrence.

De même, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} Z_{kp+r} &= A_{kp+r-1} Z_{kp+r-1} = A_{kp+r-1} A_{kp+r-2} Z_{kp+r-2} = \cdots \\ &= A_{kp+r-1} A_{kp+r-2} \cdots A_{kp} Z_{kp} = A_{r-1} A_{r-2} \cdots A_0 Z_{kp} = A_{r-1} A_{r-2} \cdots A_0 Q^k Z_0 \end{aligned}$$

II.E.1) – Soit $z = (z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ non nulle dans $\text{Sol}(\text{II.2})$, et $Z = (Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite associée dans \mathbb{C}^2 . On a $Z_0 = \Psi(z) \neq 0$.
On suppose que z est p -périodique. Alors Z est p -périodique, donc $Z_p = Z_0$.
Mais $Z_p = QZ_0$ d'après II.D.2). Ainsi $QZ_0 = Z_0$, donc Z_0 est vecteur propre de Q pour la valeur propre 1.

– Réciproquement, on suppose que $1 \in \text{Sp}(Q)$, et soit $U \in \mathbb{C}^2$ un vecteur propre associé.
Soit $z = (z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ l'antécédent (non nul, donc) de U par Ψ .

Comme précédemment, soit $Z = (Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite associée dans \mathbb{C}^2 . On a $Z_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = U \neq 0$.

On a $QZ_0 = Z_0$ donc $Q^k Z_0 = Z_0$ pour tout k . Soit $m = kp + r$ dans \mathbb{N} , avec $r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$.

D'après II.D.2, on a : $Z_m = Z_{kp+r} = A_{r-1}A_{r-2} \cdots A_0 Z_0$ (en convenant que $A_{r-1}A_{r-2} \cdots A_0 = I_2$ si $r = 0$).

Ainsi $Z_m = \begin{pmatrix} z_m \\ z_{m+1} \end{pmatrix}$, donc z_m , ne dépendent que du reste r dans la division de m par p .

Autrement dit, la suite z , élément non nul de $\text{Sol}(\text{II.2})$, est p -périodique.

II.E.2) – On a $\det(Q) = 1$. Le polynôme caractéristique de Q s'écrit donc $\det(XI_2 - Q) = X^2 - \text{tr}(Q)X + 1$.

Dans ces conditions : $1 \in \text{Sp}(Q) \Leftrightarrow \det(I_2 - Q) = 0 \Leftrightarrow \text{tr}(Q) = 2$.

Conclusion : (II.2) possède une solution non nulle p -périodique si et seulement si $\text{tr}(Q) = 2$.

– Dans ce cas $\chi_Q(X) = (X - 1)^2$: il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $Q = PTP^{-1}$, avec $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

– Si $\alpha = 0$, alors $Q = I_2$ et $\forall (k, r) \in \mathbb{N}^2$, $Z_{kp+r} = A_{r-1}A_{r-2} \cdots A_0 Z_0$ (notations usuelles) dépend de r seul.
Ainsi toutes les suites Z , donc toutes les suites $z = (z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ solutions de (II.2), sont p -périodiques.

– Si $\alpha \neq 0$, soit $z = (z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ l'élément de $\text{Sol}(\text{II.2})$ tel que $Z_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2^{ième} colonne de P).

On trouve facilement $T^k = \begin{pmatrix} 1 & k\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $Z_{kp} = Q^k Z_0 = P T^k P^{-1} P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & k\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} k\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $k \mapsto \begin{pmatrix} k\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $k \mapsto Z_{kp}$, donc $k \mapsto Z_k$, donc $k \mapsto z_k$ sont des suites non bornées.

II.E.3) La matrice Q étant dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'hypothèse $|\text{tr}(Q)| < 2$ s'écrit $\text{tr}(Q) \in]-2, 2[$.

Posons $\text{tr}(Q) = 2 \cos(\theta)$, avec $0 < \theta < \pi$.

Les valeurs propres de Q sont les racines $r = e^{i\theta}$ et $s = e^{-i\theta}$ de $\chi_Q(X) = X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1$.

Dans ces conditions Q est semblable à $D = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ donc Q^k est semblable à $D^k = \begin{pmatrix} e^{ik\theta} & 0 \\ 0 & e^{-ik\theta} \end{pmatrix}$.

La suite $k \mapsto Q^k$ est donc bornée.

Reprenons les résultats de II.D.2, notamment $Z_{kp+r} = A_{r-1}A_{r-2} \cdots A_0 Q^k Z_0$ ($k \in \mathbb{N}$, $r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$).

Les $\|Z_{kp+r}\|_0$ peuvent être bornés indépendamment de k et r (il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de r).

Il en résulte que les solutions de (II.3), donc celles de (II.2), sont bornées.

III. Généralisation

III.A) – Les matrices A_k sont dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$. Il est donc de même des Φ_k (récurrence évidente sur $k \in \mathbb{N}$).

– Supposons $Y_k = \Phi_k Y_0$ pour tout k . Alors : $\forall k \in \mathbb{N}$, $Y_{k+1} = \Phi_{k+1} Y_0 = A_k \Phi_k Y_0 = A_k Y_k$.

– Réciproquement, supposons $Y_{k+1} = A_k Y_k$ pour tout k .

On a bien sûr $Y_0 = \Phi_0 Y_0$. Et si $Y_k = \Phi_k Y_0$, alors $Y_{k+1} = A_k Y_k = A_k \Phi_k Y_0 = \Phi_{k+1} Y_0$.

Attention : les matrices A_k ne sont pas supposées commuter.

On peut donc écrire $\Phi_k = A_{k-1}A_{k-2} \cdots A_0$, mais la notation $\Phi_k = \prod_{j=0}^{k-1} A_j$ est à proscrire car ambiguë.

III.B.1) L'égalité $\Phi_{k+p} = \Phi_k \Phi_p$ étant évidente si $k = 0$, on suppose $k \geq 1$.

La suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est p -périodique, c'est-à-dire $A_{j+p} = A_j$ pour tout entier j .

$$\text{Ainsi } \Phi_{k+p} = A_{p+k-1} A_{p+k-2} \cdots A_p \overbrace{A_{p-1} A_{p-2} \cdots A_0}^{\Phi_p} = \overbrace{A_{k-1} A_{k-2} \cdots A_0}^{\Phi_k} \Phi_p = \Phi_k \Phi_p.$$

III.B.2) (a) Soit $U \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de Φ_p pour la valeur propre ρ .

On considère la solution (non nulle) de (III.1) définie $\forall k \in \mathbb{N}$, $Y_k = \Phi_k U$ (donc $Y_0 = U$).

Pour tout entier k , on a alors : $Y_{k+p} = \Phi_{k+p} U = \Phi_k \Phi_p U = \Phi_k \rho U = \rho Y_k$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$, et soit $k = qp + r$ sa division euclidienne par n .

Par récurrence sur q , on trouve : $Y_k = Y_{r+qp} = \rho^q Y_r$, donc $\|Y_k\|_\infty = |\rho|^q \|Y_r\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.

Cela étant vrai pour chaque $r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, il en résulte $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Y_k\|_\infty = 0$.

III.C) Les égalités $\Phi_k = P_k B^k$ équivalent à $P_k = \Phi_k B^{-k}$, ce qui assure l'unicité de la famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Réciproquement, les $P_k = \Phi_k B^{-k}$ sont inversibles et (sachant que $\Phi_{k+p} = \Phi_k \Phi_p$ et $\Phi_p B^{-p} = I_n$) :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P_{k+p} = \Phi_{k+p} B^{-k-p} = \Phi_k \Phi_p B^{-p} B^{-k} = \Phi_k B^{-k} = P_k$: la suite $k \mapsto P_k$ est donc p -périodique.

III.D.1) La suite $k \mapsto \|P_k\|_0$ est p -périodique donc ne prend que p valeurs au plus, ce qui justifie la définition de M .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et en utilisant (I.B.1) on a : $\|\Phi_k\|_0 = \|P_k B^k\|_0 \leq n \|P_k\|_0 \|B^k\|_0 \leq nM \|B^k\|_0$

III.D.2) (a) Pour tout k , on a $Y_k = \Phi_k Y_0$ donc (en utilisant (I.B.2) et (III.D.1)) :

$$\|Y_k\|_\infty \leq n \|\Phi_k\|_0 \|Y_0\|_\infty \leq nM \|B^k\|_0 \|Y_0\|_\infty \quad (*)$$

Il en résulte que si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|B^k\|_0 = 0$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Y_k\|_\infty = 0$.

(b) Le résultat (*) dit à l'évidence que si $k \mapsto \|B^k\|_0$ est bornée, alors $k \mapsto \|Y_k\|_\infty$ est bornée.

III.E.1) Si $R(0) = 0$, c'est-à-dire si $X \mid R(X)$, alors $X^p \mid R(X^p)$ donc $R(X^p)$ n'est pas scindé simple (rappel $p \geq 2$).

Supposons $R(0) \neq 0$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ les racines complexes (non nulles et distinctes deux à deux) de $R(X)$.

Les racines de $R(X^p)$ (qui est degré $p \times d$) sont alors les $p \times d$ racines p -ièmes des différents λ_i .

Mais elles sont distinctes deux à deux (les racines p -ièmes d'un même λ_i sont distinctes car $\lambda_i \neq 0$; et si $i \neq j$ alors $\lambda_i \neq \lambda_j$ donc toute racine p -ième de λ_i est distincte de toute racine p -ième de λ_j).

III.E.2) Si B est diagonalisable ($B = QDQ^{-1}$ et D diagonale) alors $\Phi_p = B^p = QD^pQ^{-1}$ est diagonalisable.

Réciproquement, on suppose que Φ_p est diagonalisable. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ ses valeurs propres distinctes.

Les λ_i sont non nulles car Φ_p est inversible. De plus Φ_p est annihilée par $R(X) = \prod_{k=1}^d (X - \lambda_i)$.

D'après III.E.1, $S(X) = R(X^p)$ est scindé simple, et $S(B) = R(B^p) = R(\Phi_p) = 0$. Donc B est diagonalisable.

III.E.3) Par hypothèse $B = QDQ^{-1}$, avec Q inversible, et D diagonale à coefficients diagonaux de module < 1 .

On a alors clairement $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|D^k\|_\infty = 0$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|B^k\|_\infty = 0$.

D'après III.D.2), il en résulte $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Y_k\|_\infty = 0$ pour toute solution de (III.1).

IV. Le cas continu en dimension 2

IV.A.1) Il est clair que $E(t_0) = [U(t_0), V(t_0)] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = I_2$.

Par ailleurs : $\forall t \in \mathbb{R}$, $E'(t) = [U'(t), V'(t)] = [A(t)U(t), A(t)V(t)] = A(t)[U(t), V(t)] = A(t)E(t)$.

Ainsi $t \mapsto E(t)$ est la solution de (IV.2) qui vérifie la condition initiale $E(t_0) = I_2$.

IV.A.2) Pour tout réel t , on a $M'(t) = A(t)M(t)$, donc $[F'(t), G'(t)] = A(t)[F(t), G(t)]$, donc $\begin{cases} F'(t) = A(t)F(t) \\ G'(t) = A(t)G(t) \end{cases}$

Ainsi F et G , donc leur combinaison linéaire $t \mapsto M(t) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = w_1 F(t) + w_2 G(t)$, sont solutions de (IV.1).

IV.B.1) On sait que $t \mapsto Y(t) = E(t)W$ est solution de (IV.1). Par hypothèse $Y(t_1) = E(t_1)W = 0$.

Ainsi Y est la solution nulle (unicité de la réponse au problème de Cauchy pour le système homogène IV.1).

En particulier le vecteur $Y(t_0) = E(t_0)W = W$ est nul.

Ainsi $\text{Ker}(E(t_1)) = \{0\}$ (c'est-à-dire $E(t_1)$ est inversible) pour tout réel t_1 .

IV.B.2) La fonction $t \mapsto N(t) = E(t)M(t_0)$ vérifie : $\forall t \in \mathbb{R}, N'(t) = E'(t)M(t_0) = A(t)E(t)M(t_0) = A(t)N(t)$.

D'autre part $N(t_0) = E(t_0)M(t_0) = M(t_0)$. Par unicité (problème de Cauchy) on a : $\forall t \in \mathbb{R}, N(t) = M(t)$.

IV.B.3) On définit la fonction $t \mapsto M(t) = E(t+T) \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$. Posons $B = M(t_0)$.

On sait que $t \mapsto E(t)$ vérifie (IV.2) et que $t \mapsto A(t)$ est T -périodique. On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, M'(t) = E'(t+T) = A(t+T)E(t+T) = A(t)E(t+T) = A(t)M(t)$$

Ainsi M vérifie (IV.2) donc : $\forall t \in \mathbb{R}, M(t) = E(t)M(t_0)$ c'est-à-dire : $\forall t \in \mathbb{R}, E(t+T) = E(t)B$.

Pour $t = t_0$, on trouve $B = E(t_0+T)$, ce qui assure l'unicité.

IV.C.1) (a) Pour tout réel t , on a : $Y(t+T) = E(t+T)Z = E(t)BZ = E(t)(\rho Z) = \rho E(t)Z = \rho Y(t)$.

(b) Il existe $\mu \in \mathbb{C}$ (défini à un multiple de $2i\pi/T$ près) tel que $e^{\mu T} = \rho$.

Posons : $\forall t \in \mathbb{R}, S(t) = e^{-\mu t} Y(t)$. On a $Y(t_0) = E(t_0)Z = Z \neq 0$ donc $S(t_0) \neq 0$.

Alors, pour tout réel t : $S(t+T) = e^{-\mu t} e^{-\mu T} Y(t+T) = e^{-\mu t} e^{-\mu T} \rho Y(t) = e^{-\mu t} Y(t) = S(t)$.

La fonction $t \mapsto S(t)$ est donc T -périodique, non nulle, et on a : $\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = e^{\mu t} S(t)$.

Puisque $e^{\mu T} = \rho$, on peut aussi écrire (et c'est plus parlant) : $\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = \rho^{t/T} S(t)$.

Avec cette écriture, on voit mieux l'identité $Y(t+T) = \rho Y(t)$.

IV.C.2) On va montrer que la condition demandée est « 1 est valeur propre de B ».

– On suppose que $\rho = 1$ est valeur propre de B , et on note Z un vecteur propre associé.

Depuis IV.C.1), on sait que $t \mapsto Y(t) = E(t)Z$ est solution de IV.1) et que : $\forall t \in \mathbb{R}, Y(t+T) = Y(t)$.

– Réciproquement, soit $t \mapsto Y(t)$ une solution non nulle (donc jamais nulle) et T -périodique de (IV.1).

La fonction $t \mapsto M(t) = [Y(t), Y(t)]$ est alors une solution non nulle et T -périodique de (IV.2).

Dans ces conditions, on trouve $M(t_0) = M(t_0+T) = E(t_0+T)M(t_0) = E(t_0)BM(t_0) = BM(t_0)$.

Ainsi $BY(t_0) = Y(t_0)$ (avec $Y(t_0) \neq 0$), ce qui prouve que 1 est valeur propre de B .

IV.C.3) On suppose que la matrice B est diagonalisable.

Soit Z_1, Z_2 une base de diagonalisation de B , pour les valeurs propres respectives ρ_1 et ρ_2 .

Les fonctions $\begin{cases} t \mapsto Y_1(t) = E(t)Z_1 \\ t \mapsto Y_2(t) = E(t)Z_2 \end{cases}$ forment alors une base du plan des solutions du système (IV.1).

D'après (IV.C.1.b), on peut écrire : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} Y_1(t) = \rho_1^{t/T} S_1(t) \\ Y_2(t) = \rho_2^{t/T} S_2(t) \end{cases}$ où S_1, S_2 sont T -périodiques (donc bornées).

– Si $|\rho_1| \leq 1$ et si $|\rho_2| \leq 1$ alors Y_1 et Y_2 (donc toutes les solutions de (IV.1)) sont bornées sur \mathbb{R} .

– En revanche si par exemple $|\rho_1| > 1$, alors la solution Y_1 n'est pas bornée.

IV.D.1) – Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et $\varphi: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\varphi(u, v) = \det(Mu, v) + \det(u, Mv)$.

Alors φ est bilinéaire alternée, donc proportionnelle à l'application déterminant.

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$, $\varphi(u, v) = \lambda \det(u, v)$.

Si on choisit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on trouve $\lambda = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = a + d = \text{tr}(M)$.

Ainsi : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$, $\det(Mu, v) + \det(u, Mv) = \text{tr}(M) \det(u, v)$.

– Pour tout réel t , on a $W(t) = \det[U(t), V(t)]$ donc :

$$\begin{aligned} W'(t) &= \det[U'(t), V(t)] + \det[U(t), V'(t)] = \det[A(t)U(t), V(t)] + \det[U(t), A(t)V(t)] \\ &= \text{tr}(A(t)) \det(U(t), V(t)) = \text{tr}(A(t))W(t) \end{aligned}$$

IV.D.2) Sachant $W(t_0) = \det(E(t_0)) = \det(I_2) = 1$, le résultat de (IV.D.1) implique : $\forall t \in \mathbb{R}$, $W(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s))ds\right)$

Mais $E(t_0 + T) = B$ (voir IV.B.3), donc $W(t_0 + T) = \det(B) = \rho_1\rho_2$, donc $\rho_1\rho_2 = \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+T} \text{tr}(A(s))ds\right)$.

Enfin, par T -périodicité de $s \mapsto A(s)$, on a aussi : $\rho_1\rho_2 = \exp\left(\int_0^T \text{tr}(A(s))ds\right)$

V. Racines p -ièmes dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$

V.A) L'égalité demandée est vraie si $k = 1$, car alors $\sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-1-j} A^j = \lambda^0 A^0 = I_n$ donc $X_1 = X$.

Si elle est vraie au rang $k \geq 1$, alors :

$$\begin{pmatrix} A & X \\ 0_{1,n} & \lambda \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} A & X \\ 0_{1,n} & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^k & X_k \\ 0_{1,n} & \lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & AX_k + \lambda^k X \\ 0_{1,n} & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}$$

et on a : $AX_k + \lambda^k X = A\left(\sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-1-j} A^j\right)X + \lambda^k X = \left(\sum_{j=0}^k \lambda^{k-j} A^j\right)X = X_{k+1}$.

ce qui prouve la propriété au rang $k + 1$ et achève la récurrence.

V.B.1) Si $a = \lambda$, alors $\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j} a^j = p\lambda^{p-1} \neq 0$. On suppose donc $a \neq \lambda$, c'est-à-dire en fait $a^p \neq \lambda^p$.

Dans ces conditions $(a - \lambda)\left(\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j} a^j\right) = a^p - \lambda^p \neq 0$, et là encore $\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j} a^j \neq 0$.

V.B.2) La matrice $Y = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j} A^j$ est elle-aussi triangulaire supérieure.

Ses coefficients diagonaux sont les $b_{i,i} = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j} a_{i,i}^j$, non nuls d'après V.B.1). Ainsi Y est inversible.

V.B.3) La propriété est vraie au rang 1. En effet (en identifiant une matrice 1×1 et son unique coefficient), pour tout $b \in \mathbb{C}^*$, il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $a^p = b$ (les quotients $a_{i,i}/a_{j,j}$ se réduisant ici au seul $a/a = 1 \notin \mathcal{V}_p$).

On se donne donc $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que la propriété est vraie au rang n .

On se donne aussi $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{C}) \cap \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$. On écrit $B = \begin{pmatrix} B_n & X \\ 0_{1,n} & \alpha \end{pmatrix}$, avec $\begin{cases} B_n \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \cap \text{GL}_n(\mathbb{C}) \\ b_{n+1,n+1} = \alpha \in \mathbb{C}^* \end{cases}$

Par hypothèse, il existe $A_n = (a_{i,j}) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ tel que $A_n^p = B_n$ et : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\frac{a_{i,i}}{a_{j,j}} \notin \mathcal{V}_p$.

On définit alors la matrice triangulaire $A = \begin{pmatrix} A_n & X' \\ 0_{1,n} & \lambda \end{pmatrix}$, avec $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $a_{n+1,n+1} = \lambda \in \mathbb{C}^*$.

On sait depuis (V.A) que $A^p = \begin{pmatrix} A_n^p & YX' \\ 0_{1,n} & \lambda^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_n & YX' \\ 0_{1,n} & \lambda^p \end{pmatrix}$, avec $Y = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j} A_n^j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On sait également depuis (V.B.2) que la matrice Y est inversible.

Dans ces conditions $A^p = B$ équivaut à $\lambda^p = \alpha$ (ce qui fait p possibilités) et $X' = Y^{-1}X$.

Ensuite il reste à s'assurer des conditions ($\lambda = a_{i,i}$) ou ($\lambda^p \neq a_{i,i}^p$) pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Tout dépend des coefficients diagonaux $b_{i,i} = a_{i,i}^p$ de la matrice initiale B , avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Pour les (éventuels) i de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $b_{i,i} \neq \alpha$, tout choix λ pour $\lambda^p = \alpha$ vérifie $(\lambda^p = \alpha) \neq (a_{i,i}^p = b_{i,i})$.
- Il reste les (éventuels) i de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $b_{i,i} = \alpha$. Mais pour ceux-là la valeur de $a_{i,i}$ est la même (ça fait partie de l'hypothèse de récurrence). Il suffit donc de choisir cette valeur commune pour λ .

On a donc prouvé la propriété au rang $n + 1$, ce qui achève la récurrence.

V.B.4) Soit $B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \cap \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $B = QTQ^{-1}$.

On sait depuis (V.B.3) qu'il existe $V \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \cap \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $V^p = T$.

Si on pose $A = QVQ^{-1}$, alors $A^p = QV^pQ^{-1} = QTQ^{-1} = B$, donc A est une racine p -ième de B .