Mathématiques 1

PSI **2017**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Grandes déviations

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans ce sujet sont supposées discrètes.

La partie **I** est composée de trois sous-parties mutuellement indépendantes **A**, **B**, **C**, toutes trois utilisées dans la partie **II**.

Notations et rappels

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant toutes la loi de X. On pose $S_0 = 0$ et, pour n dans $\mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Si Y est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 1, on note $E(Y)$ l'espérance de Y.

Si Y est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, on note $V(Y)$ la variance de Y.

Si Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on abrège « Y est d'espérance finie » en « $E(Y) < +\infty$ ».

Si τ est un élément de $\mathbb{R}^{+*}$, on dit que X vérifie (C_τ) si $E\left(\mathrm{e}^{\tau|X|}\right) < +\infty$.

On pourra utiliser la propriété suivante :

$(\mathcal{P})$ pour Z et Y variables aléatoires réelles telles que $0 \leqslant Y \leqslant Z$, $\quad E(Z) < +\infty \implies E(Y) < +\infty$

Étant données deux variables aléatoires Y et Z définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on dit que Y est *presque surement* égale à Z lorsque $P(Y = Z) = 1$.

On admet le résultat suivant (lemme des coalitions) : soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$ disjoints. Alors toute variable aléatoire fonction des $Y_n, n \in A$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des $Y_n, n \in B$.

I Premiers résultats

I.A – Une classe de variables aléatoires

I.A.1) Soient U et V deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant un moment d'ordre 2 et telles que V n'est pas presque surement nulle. Montrer que $E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2 \geqslant 0$ et que $E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2 = 0$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda V + U$ est presque surement nulle.

I.A.2)

a) On suppose que X est bornée. Justifier que X vérifie (C_τ) pour tout τ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

b) On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Quels sont les réels t tels que $E(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$? Pour ces t, donner une expression simple de $E(\mathrm{e}^{tX})$.

c) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$$

Quels sont les réels t tels que $E(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$? Pour ces t, donner une expression simple de $E(\mathrm{e}^{tX})$.

I.A.3) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On suppose $E(\mathrm{e}^{aX}) < +\infty$ et $E(\mathrm{e}^{bX}) < +\infty$.

a) Montrer $\forall t \in [a,b]$, $\mathrm{e}^{tX} \leqslant \mathrm{e}^{aX} + \mathrm{e}^{bX}$. En déduire $E(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$.

Que peut-on en déduire sur l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}; E(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty\}$?

b) Soient k dans $\mathbb{N}$, t dans $]a,b[$. On note $\theta_{k,t,a,b}$ la fonction $y \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{y^k\mathrm{e}^{ty}}{\mathrm{e}^{ay} + \mathrm{e}^{by}}$.

Déterminer les limites de $\theta_{k,t,a,b}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $E(|X|^k\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$.

d) On reprend les notations de la question b). Soient k dans $\mathbb{N}$, c et d deux réels tels que $a < c < d < b$. Montrer qu'il existe $M_{k,a,b,c,d} \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \in [c,d]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$: $\left|\theta_{k,t,a,b}(y)\right| \leqslant M_{k,a,b,c,d}$.

I.A.4) Dans cette question, τ est un élément de $\mathbb{R}^{+*}$ et X vérifie (C_τ).

a) Montrer que l'ensemble des réels t tels que $E(\mathrm{e}^{tX}) < +\infty$ est un intervalle I contenant $[-\tau, \tau]$.

Pour t dans I, on note $\varphi_X(t) = E(\mathrm{e}^{tX})$.

b) Montrer que si $X(\Omega)$ est fini, φ_X est continue sur I et de classe C^∞ sur l'intérieur de I.

c) On suppose maintenant que $X(\Omega)$ est un ensemble infini dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels deux à deux distincts et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(X = x_n)$.

En utilisant les résultats établis à la question I.A.3 et deux théorèmes relatifs aux séries de fonctions que l'on énoncera complètement, montrer que φ_X est continue sur I et de classe C^∞ sur l'intérieur de I.

d) Vérifier que pour t dans l'intérieur de I et k dans $\mathbb{N}$, $\varphi_X^{(k)}(t) = E(X^k \mathrm{e}^{tX})$.

e) Soit $\psi_X = \dfrac{\varphi_X'}{\varphi_X}$.

Montrer que ψ_X est croissante sur I et que, si X n'est pas presque surement égale à une constante, ψ_X est strictement croissante sur I.

I.B – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On suppose que X admet un moment d'ordre 2.

I.B.1) Soit δ un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$,

$$P(|S_n - nE(X)| \geqslant n\delta) \leqslant \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

I.B.2) Si u et v sont deux nombres réels tels que $u < E(X) < v$, déterminer la limite de la suite $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \pi_n = P(nu \leqslant S_n \leqslant nv)$$

I.C – Suites sur-additives

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{m+n} \geqslant u_m + u_n$.

On suppose que l'ensemble $\left\{\dfrac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est majoré et on note s sa borne supérieure.

I.C.1) Soient m, q et r des éléments de $\mathbb{N}$. On pose $n = mq + r$. Comparer les deux nombres réels u_n et $qu_m + u_r$ et montrer que $u_n - ns \geqslant q(u_m - ms) + u_r - rs$.

I.C.2) On fixe m dans $\mathbb{N}^*$ et ε dans $\mathbb{R}^{+*}$. En utilisant la division euclidienne de n par m, montrer qu'il existe un entier N tel que pour tout $n > N$,

$$\frac{u_n}{n} \geqslant \frac{u_m}{m} - \varepsilon$$

I.C.3) Montrer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = s$.

II Le théorème des grandes déviations

Soit a un nombre réel.

II.A – Exposant des grandes déviations

II.A.1) Montrer $P(X \geqslant a) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(S_n \geqslant na) = 0$.

II.A.2) Soient m et n dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que $S_{m+n} - S_m$ et S_n ont même loi.

b) Soit b un nombre réel. Montrer $P(S_{m+n} \geqslant (n+m)b) \geqslant P(S_n \geqslant nb)\, P(S_m \geqslant mb)$.

On suppose dans toute la suite du problème $P(X \geqslant a) > 0$.

II.A.3) Montrer que la suite $\left(\dfrac{\ln(P(S_n \geqslant na))}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et admet une limite γ_a négative ou nulle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad P(S_n \geqslant na) \leqslant \mathrm{e}^{n\gamma_a}$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que X vérifie (C_τ) pour un certain $\tau > 0$ et n'est pas presque surement constante. On suppose également que a est strictement supérieur à $E(X)$.

On se propose d'établir que $\gamma_a < 0$ (ce qui montre que la suite $(P(S_n \geqslant na))_{n\geqslant 1}$ converge géométriquement vers 0) puis de déterminer γ_a.

II.B – Majoration des grandes déviations

L'intervalle I et la fonction φ_X sont définis comme dans la question I.A.4.

II.B.1) Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $I \cap \mathbb{R}^+$

$$E\left(\mathrm{e}^{tS_n}\right) = (\varphi_X(t))^n, \qquad P(S_n \geqslant na) \leqslant \frac{\varphi_X(t)^n}{\mathrm{e}^{nta}}$$

II.B.2) On définit la fonction $\chi : \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(\varphi_X(t)) - ta \end{array} \right.$

a) Montrer que la fonction χ est minorée sur $I \cap \mathbb{R}^+$.

On note η_a la borne inférieure de χ sur $I \cap \mathbb{R}^+$.

b) Donner un équivalent de $\chi(t)$ lorsque t tend vers 0. En déduire $\eta_a < 0$.

c) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(S_n \geqslant na) \leqslant \mathrm{e}^{n\eta_a}$.

En déduire que $\gamma_a < 0$.

d) Dans chacun des deux cas suivants, déterminer l'ensemble des nombres réels a vérifiant les conditions $P(X \geqslant a) > 0$ et $a > E(X)$; puis, pour a vérifiant ces conditions, calculer η_a.

i. X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$.

ii. X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

II.C – Le théorème de Cramer

On suppose ici que la borne inférieure η_a de la fonction χ sur $I \cap \mathbb{R}^+$ est atteinte en un point σ intérieur à $I \cap \mathbb{R}^+$.

Soient t un nombre réel intérieur à I et tel que $t > \sigma$, b un nombre réel tel que $b > \dfrac{\varphi_X{}'(t)}{\varphi_X(t)}$.

II.C.1)

a) Calculer $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \frac{\mathrm{e}^{tx}}{E(\mathrm{e}^{tX})} P(X = x)$.

On admet alors (quitte à modifier $(\Omega, \mathcal{A}, P)$)

– qu'il existe une variable aléatoire X' sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $X'(\Omega) = X(\Omega)$ et dont la loi de probabilité est donnée par

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X' = x) = \frac{\mathrm{e}^{tx}}{E(\mathrm{e}^{tX})} P(X = x)$$

– qu'il existe une suite $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la même loi que X'.

b) Montrer

$$E(X') = \frac{\varphi_X{}'(t)}{\varphi_X(t)}, \qquad E(X') > a$$

II.C.2) On admet que, si n dans $\mathbb{N}^*$ et si f est une application de $X(\Omega)^n$ dans $\mathbb{R}^+$, on a

$$E(f(X'_1, ..., X'_n)) = \frac{E(f(X_1, ..., X_n)\, \mathrm{e}^{tS_n})}{\varphi_X(t)^n}$$

a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X'_k$. Montrer $P(na \leqslant S'_n \leqslant nb) \leqslant P(S_n \geqslant na)\, \dfrac{\mathrm{e}^{ntb}}{\varphi_X(t)^n}$.

On pourra introduire l'application $f : \left| \begin{array}{lcl} X(\Omega)^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } na \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant nb \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

b) En utilisant les questions I.B.2, II.B.2c et le a) ci-dessus, montrer finalement que $\eta_a = \gamma_a$.

II.C.3) Dans cette question on pourra utiliser les résultats du II.B.2d.

a) Soit α dans $]0, 1/2[$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n = \left\{k \in \{0, ..., n\},\ \left|k - \frac{n}{2}\right| \geqslant \alpha n\right\}, \qquad U_n = \sum_{k \in A_n} \binom{n}{k}$$

Déterminer la limite de la suite $\left(U_n^{1/n}\right)_{n \geqslant 1}$.

b) Soit λ dans $\mathbb{R}^{+*}$, α dans $]\lambda, +\infty[$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$T_n = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geqslant \alpha n}} \frac{n^k \lambda^k}{k!}$$

Déterminer la limite de la suite $\left(T_n^{1/n}\right)_{n \geqslant 1}$.

• • • FIN • • •