Centrale 2017 - PSI1
Un corrigé

1 Premiers résultats

1.1 Une classe de variables aléatoires

1. Il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour la prouver, on remarque que $\mathbb{E}((U+tV)^2) \geqslant 0$ pour tout t. Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ t^2\mathbb{E}(V^2) + 2t\mathbb{E}(UV) + \mathbb{E}(U^2) \geqslant 0$$

Comme V n'est pas presque surement nulle, $\mathbb{E}(V^2) > 0$ (puisque $V^2 \geqslant 0$) et on a un trinôme du second degré qui reste positif. Son discriminant est donc négatif ou nul et

$$\boxed{\mathbb{E}(UV)^2 - \mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(V^2) \leqslant 0}$$

Si on a égalité alors le trinôme admet une racine et il existe t tel que $\mathbb{E}((U+tV)^2) \geqslant 0$ et comme $(U+tV)^2 \geqslant 0$, ceci entraîne que $U+tV$ est presque surement nulle.
Réciproquement, s'il existe un tel t alors le trinôme admet une racine et le discriminant est nul. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(UV)^2 = \mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(V^2) \leqslant 0 \iff \exists\, t \in \mathbb{R}/\ tV + U \text{ est presque surement nulle}}$$

Remarque : on a utilisé à deux reprises le fait que si $X \geqslant 0$ et $\mathbb{E}(X) = 0$ alors X est presque surement nulle. Ceci découle du fait qu'en notant x_i, $i \in I$ les valeurs prises par X, on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ qui est une somme de termes positifs et n'est donc nulle que si tous les termes sont nuls ce qui entraîne $\mathbb{P}(X = x_i) = 0$ pour tous les i tels que $x_i \neq 0$.

2. (a) Il existe une constante M telle que $X(\Omega) \subset [-M, M]$. Soit $\tau > 0$; on a

$$\forall x \in X(\Omega),\ |e^{\tau x}\mathbb{P}(X = x)| \leqslant e^{\tau M}\mathbb{P}(X = x)$$

Ceci est le terme général d'une série convergente (de somme $e^{\tau M}$) et par formule de transfert, $e^{\tau X}$ est d'espérance finie.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est bornée alors } \forall \tau > 0,\ X \text{ vérifie } (C_\tau)}$$

(b) On a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ e^{tk}\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}e^{tk} = \frac{p}{1-p}((1-p)e^t)^k$$

C'est le terme général d'une série géométrique de raison $(1-p)e^t$ qui converge ssi $e^t < \frac{1}{1-p}$ (tout est positif) i.e. $t < -\ln(1-p)$. C'est la condition pour que $\mathbb{E}(e^{tX})$ existe. On sait alors calculer la somme :

$$\boxed{\forall t < -\ln(1-p),\ \mathbb{E}(e^{tX}) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}}$$

(c) On a

$$\forall k \in \mathbb{N},\ e^{tk}\mathbb{P}(X = k) = \frac{(\lambda e^t)^k}{k!}e^{-\lambda}$$

C'est pour tout t le terme général d'une série convergente et $\mathbb{E}(e^{tX}) < +\infty$ avec

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}(e^{tX}) = \exp(\lambda(e^t - 1))}$$

3. (a) Si $t \in [a, b]$ alors pour $x \geqslant 0$, $tx \leqslant bx$ et pour $x \leqslant 0$, $tx \leqslant ax$. Dans chaque cas on peut composer par exp qui croît. Ainsi, e^{tx} est majoré soit par e^{ta} soit par e^{tb}. Et comme exp est positive, un majorant commun est $e^{ta} + e^{tb}$. On en déduit que

$$\forall t \in [a, b],\ 0 \leqslant e^{tX} \leqslant e^{aX} + e^{bX}$$

La somme de deux variables ayant une espérance admet une espérance. Avec le résultat rappelé en préambule,

$$\boxed{\forall t\in[a,b],\ \mathbb{E}(e^{tX})<+\infty}$$

L'ensemble $\{t\in\mathbb{R}/\ \mathbb{E}(e^{tX})<+\infty\}$ est donc convexe et c'est donc un intervalle (les intervalles sont exactement les convexes de $\mathbb{R}$).

(b) Comme $a<b$, on a

- Au voisinage de $+\infty$, $e^{ay}=o(e^{by})$ et donc $\theta_{k,t,a,b}(y)\sim y^k e^{(t-b)y}$. Pour $t<b$, cette quantité est de limite nulle en $+\infty$.
- Au voisinage de $-\infty$, $e^{by}=o(e^{ay})$ et donc $\theta_{k,t,a,b}(y)\sim y^k e^{(t-a)y}$. Pour $t>a$, cette quantité est de limite nulle en $-\infty$.

$$\forall t\in]a,b[,\ \lim_{t\to+\infty}\theta_{k,t,a,b}(y)=\lim_{t\to-\infty}\theta_{k,t,a,b}(y)=0$$

La fonction $\theta_{k,t,a,b}$ est donc bornée par 1 sur des voisinages $[\alpha,+\infty[$ et $]-\infty,\beta]$. Comme elle est continue, elle est aussi bornée par une quantité M sur le segment $[\beta,\alpha]$. Elle est alors bornée par $\max(M,1)$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall t\in]a,b[,\ \forall k\in\mathbb{N},\ \theta_{k,t,a,b}\text{ est bornée sur }\mathbb{R}}$$

(c) On peut imaginer que l'on travaille encore avec $t\in]a,b[$ et $k\in\mathbb{N}$. En notant M un majorant de $|\theta_{k,t,a,b}|$ sur $\mathbb{R}$, on a alors

$$0\leqslant |X|^k e^{tX}\leqslant M(e^{aX}+e^{bX})$$

Le majorant étant d'espérance finie, il en va de même de $|X|^k e^{tX}$ par le résultat du préambule.

$$\boxed{\forall t\in]a,b[,\ \forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{E}(|X|^k e^{tX})<+\infty}$$

(d) Notons $\Phi\ :\ (y,t)\in\mathbb{R}\times[c,d]\mapsto\theta_{k,t,a,b}(y)$. On a

$$\forall y\in\mathbb{R},\ \forall t\in[c,d],\ |\Phi(y,t)|\leqslant |y|^k\frac{e^{cy}+e^{dy}}{e^{ay}+e^{by}}$$

Comme en question (b), le majorant est de limite nulle quand y tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Il est donc plus petit que 1 sur une partie $\mathbb{R}\backslash]\alpha,\beta[$:

$$\forall t\in[c,d],\ \forall y\notin[\alpha,\beta],\ |\Phi(y,t)|\leqslant 1$$

Par ailleurs, Φ est continue sur le compact $[\alpha,\beta]\times[c,d]$ et donc bornée par une constante K sur ce compact. Φ est alors bornée par $\max(K,1)$ sur son domaine.

$$\boxed{\exists M_{k,a,b,c,d}/\ \forall t\in[c,d],\ \forall y\in\mathbb{R},\ |\theta_{k,t,a,b}(y)|\leqslant M_{k,a,b,c,d}}$$

4. (a) On sait depuis 3(a) que I est un intervalle. Comme $\forall t\in[-\tau,\tau],\ 0\leqslant e^{tX}\leqslant e^{\tau|X|}$ et comme $\mathbb{E}(e^{\tau|X|})<+\infty$, le résultat admis en préambule indique que $[-\tau,\tau]\subset I$.

(b) X et e^{tX} prenant un nombre fini de valeurs, ces variables admettent des espérances et $I=\mathbb{R}$. Notons $x_1,\dots,x_n$ les valeurs deux à deux distinctes prises par X. Par formule de transfert, on a

$$\forall t\in\in\mathbb{R},\ \varphi_X(t)=\sum_{k=1}^n e^{tx_k}\mathbb{P}(X=x_k)$$

Par théorèmes d'opérations, on a donc

$$\boxed{\varphi_X\in C^\infty(\mathbb{R})}$$

(c) On a cette fois

$$\forall t\in I,\ \varphi_X(t)=\sum_{n=1}^\infty e^{tx_n}p_n$$

On pose $f_n\ :\ t\in I\mapsto p_n e^{tx_n}$. On va appliquer le théorème de continuité puis celui de régularité (relatifs aux sommes de séries de fonctions).

- $\forall n,\ f_n \in C^0(I)$.
- Par définition de I, $\sum(f_n)$ converge simplement sur I. Plus précisément, pour tout segment $[a,b] \subset I$, on a (avec 3(a))

$$\forall t \in [a,b],\ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant f_n(a) + f_n(b)$$

et donc $\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant f_n(a) + f_n(b)$. Le majorant est le terme général d'une série convergente et $\sum(f_n)$ est donc normalement convergente sur tout segment de I.

Ceci montre que la somme φ_X de la série $\sum(f_n)$ est continue sur I.

- Pour tout n, f_n est de classe C^∞ sur I. Sa dérivée k-ième, pour $k \in \mathbb{N}$, est $f_n^{(k)}\ :\ t \mapsto x_n^k p_n e^{tx_n}$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $[c,d]$ un segment inclus dans l'intérieur de I, que nous noterons $\mathrm{Int}(I)$ (on pourrait bien sûr écrire $\mathring{I}$). Par définition de l'intérieur d'une partie, il existe $a, b \in I$ tels que $[c,d] \subset]a,b[$. Avec la question 3(d) (et aussi 3(a)) on a

$$\forall t \in [c,d],\ \forall n,\ |f_n^{(k)}(t)| \leqslant p_n M_{k,a,b,c,d} e^{tx_n} \leqslant M_{k,a,b,c,d}(f_n(a) + f_n(b))$$

On a donc $\|f_n^{(k)}\|_{\infty,[c,d]} \leqslant M_{k,a,b,c,d}(f_n(a) + f_n(b))$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, toutes les séries dérivées de $\sum(f_n)$ convergent normalement sur tout segment de $\mathrm{Int}(I)$.

On peut alors appliquer le théorème de régularité sur $\mathrm{Int}(I)$.

$$\boxed{\varphi_X \in C^0(I) \cap C^\infty(\mathrm{Int}(I))}$$

(d) Le théorème utilisé ci-dessous stipule aussi que la dérivée k-ième s'obtient en dérivant terme à terme et est donc la somme de la série $\sum(f_n^{(k)})$. Par téorème de transfert, on a donc

$$\boxed{\forall t \in \mathrm{Int}(I),\ \forall k \in \mathbb{N},\ \varphi_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}(X^k e^{tX})}$$

(e) On peut penser qu'il y a une erreur d'énoncé et que l'on travaille sur l'intérieur sur I (puisque la dérivabilité de φ_X n'a été justifiée que sur cet ensemble).

Notons tout d'abord que e^{tX} est une variable strictement positive et que quand son espérance existe, elle est > 0. En particulier, $\varphi_X(t) > 0$ pour $t \in I$ et ψ_X est bien définie sur $\mathrm{Int}(I)$.

Avec la régularité prouvée, on a $\psi_X \in C^\infty(\mathrm{Int}(I))$ et

$$\forall t \in \mathrm{Int}(I),\ \psi_X'(t) = \frac{\varphi_X''(t)\varphi_X(t) - \varphi_X'(t)^2}{\varphi_X(t)^2}$$

Or, $\varphi_X''(t)\varphi_X(t) - \varphi_X'(t)^2 = \mathbb{E}(X^2 e^{tX})\mathbb{E}(e^{tX}) - \mathbb{E}(Xe^{tX})^2 \geqslant 0$ avec **1.1** appliquée avec $U = Xe^{tX/2}$ et $V = e^{tX/2}$ (qui admettent des moments d'ordre 2 et avec V qui est > 0 et donc non presque surement nulle). La dérivée de ψ_X est donc positive et

$$\boxed{\psi_X \text{ croît sur } \mathrm{Int}(I)}$$

Si X n'est pas presque surement constante alors (comme $e^{tX/2}$ est > 0), $U/V = X$ n'est pas presque surement constante et ψ_X est alors strictement croissante sur l'intérieur de I puisque sa dérivée est > 0 en tout point de cet ensemble (avec le cas d'égalité de **1.1**).

1.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1. Comme X admet un moment d'ordre 2, il en est de même de S_n. De plus, par indépendance mutuelle des X_k (l'argument sert uniquement pour la variance, pour l'espérance on a la linéarité)

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = n\mathbb{E}(X) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = n\mathbb{V}(X)$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n donne

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{a^2}$$

Il nous suffit d'appliquer ceci avec $a = n\delta$ et d'utiliser les formules données :

$$\boxed{\forall \delta > 0,\ \mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)| \geqslant n\delta) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{n\delta^2}}$$

2. Comme $u < \mathbb{E}(X) < v$, on a $\delta = \min(\mathbb{E}(X) - u, v - \mathbb{E}(X)) > 0$. Si $|S_n - n\mathbb{E}(X)| < n\delta$ alors $n(\mathbb{E}(X) - \delta) < S_n < n(\delta + \mathbb{E}(X))$ et donc $nu \leqslant S_n \leqslant nv$. On en déduit que

$$1 - \mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)| \geqslant n\delta) = \mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)| < n\delta) \leqslant \pi_n$$

et avec la question précédente,

$$1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{n\delta^2} \leqslant \pi_n$$

Comme $\pi_n \leqslant 1$, on en déduit par encadrement que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \pi_n = 1}$$

1.3 Suites sur-additives

1. On a $u_{(k+1)m+r} \geqslant u_m + u_{km+r}$ et donc, par récurrence, $u_{km+r} \geqslant ku_m + u_r$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier,

$$u_n = u_{qm+r} \geqslant qu_m + u_r$$

Ainsi, $u_n - ns \geqslant qu_m + u_r - ns$. Comme $ns = (mq + r)s$, on peut alors regrouper les termes et obtenir

$$\boxed{u_n - ns \geqslant q(u_m - ms) + u_r - rs}$$

2. Notons $n = qm + r$ la division euclidienne de n par m (c'est possible car $m \geqslant 1$ et on a $0 \leqslant r \leqslant m - 1$). On a alors

$$\frac{u_n}{n} \geq \frac{q}{n}u_m + \frac{u_r}{n} = \frac{u_m}{m} + u_m\left(\frac{q}{n} - \frac{1}{m}\right) + \frac{u_r}{n}$$

Comme $\frac{q}{n} - \frac{1}{m} = \frac{qm-n}{nm} = -\frac{r}{nm}$ on a donc

$$\frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} + \frac{u_r}{n} - \frac{r}{nm}$$

Or, $\left|\frac{u_r}{n} - \frac{r}{nm}\right| \leqslant \frac{|u_r|+1}{n} \leqslant \frac{\max(|u_0|,\dots,|u_{m-1}|)+1}{n}$ qui est de limite nulle quand $n \to +\infty$ (le numérateur du majorant est indépendant de n et ne dépend que de m). Il est donc arbitrairement petit pour n grand et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N/\ \forall n \geqslant N,\ \frac{u_n}{n} \geqslant \frac{u_m}{m} - \varepsilon}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $\frac{u_m}{m} \geqslant s - \varepsilon$ (ce réel n'étant pas un majorant de l'ensemble dont s est la borne supérieure puisque s est le plus petit des majorants). La question précédente fournit un N tel que

$$\forall n \geqslant N,\ s - 2\varepsilon \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant s$$

Par définition de la limite,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = s}$$

2 Le théorème des grandes déviations

2.1 Exposant des grandes déviations

1. Supposons que $\mathbb{P}(X \geqslant a) = 0$. Montrons par récurrence que pour tout n on a $\mathbb{P}(S_n \geqslant na) = 0$.
   - C'est immédiat pour $n = 1$ puisque $S_1 = X_1$ a la même loi que X.
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geqslant 1$. On a $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. Si $S_{n+1} \geqslant (n+1)a$ alors soit $S_n \geqslant na$, soit $S_n < na$ et alors $X_{n+1} \geqslant a$ (sinon la somme est $< (n+1)a$). Ainsi

   $$0 \leqslant \mathbb{P}(S_{n+1} \geqslant (n+1)a) \leqslant \mathbb{P}(S_n \geqslant na) + \mathbb{P}(X_{n+1} \geqslant a)$$

   Le majorant est nul par l'hypothèse de récurrence et le résultat supposé sur X.

   Réciproquement, si $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{P}(S_n \geqslant na) = 0$, le résultat pour $n = 1$ donne $\mathbb{P}(X \geqslant a) = 0$. Ainsi

   $$\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant a) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(S_n \geqslant na) = 0}$$

2. (a) On a $T = S_{m+n} - S_m = X_{m+1} + \cdots + X_{m+n}$. Soit $x \in T(\Omega)$; on a

   $$(S_{m+n} - S_m = x) = \bigcup_{\substack{x_1,\dots,x_n \in X(\Omega) \\ x_1+\cdots+x_n = x}} \bigcap_{k=1}^{n} (X_{m+i} = x_i)$$

   Comme la réunion (qui est dénombrable) est disjointe, on a

   $$\mathbb{P}(S_{m+n} - S_m = x) = \sum_{\substack{x_1,\dots,x_n \in X(\Omega) \\ x_1+\cdots+x_n = x}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_{m+i} = x_i)\right)$$

   Les variables X_{m+k} étant indépendantes,

   $$\mathbb{P}(S_{m+n} - S_m = x) = \sum_{\substack{x_1,\dots,x_n \in X(\Omega) \\ x_1+\cdots+x_n = x}} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{m+i} = x_i)$$

   Les X_i ayant même loi,

   $$\mathbb{P}(S_{m+n} - S_m = x) = \sum_{\substack{x_1,\dots,x_n \in X(\Omega) \\ x_1+\cdots+x_n = x}} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

   Les variables X_k étant indépendantes, onremonte le calcul et on obtient que T a même loi que $X_1 + \cdots + X_n = S_n$.

   $$\boxed{S_{m+n} - S_m \text{ et } S_n \text{ ont même loi}}$$

   (b) On a

   $$(S_{m+n} - S_m \geqslant nb) \cap (S_m \geqslant mb) \subset (S_{m+n} \geqslant (n+m)b)$$

   Par lemme des coalitions, $S_{m+n} - S_m$ et S_m sont indépendantes. En passant aux probabilités, on a donc

   $$\mathbb{P}(S_{m+n} - S_m \geqslant nb)\mathbb{P}(S_m \geqslant mb) \leqslant \mathbb{P}(S_{m+n} \geqslant (n+m)b)$$

   Avec la question précédente, $S_{m+n} - S_m$ a même loi que S_n et donc

   $$\boxed{\mathbb{P}(S_{m+n} \geqslant (n+m)b) \geqslant \mathbb{P}(S_n \geqslant nb)\mathbb{P}(S_m \geqslant mb)}$$

3. Comme $\mathbb{P}(X \geqslant a) > 0$, la question **2.1.1** montre que $\mathbb{P}(S_n \geqslant na) > 0$ pour tout n. On peut donc poser
$$u_n = \ln(\mathbb{P}(S_n \geqslant na))$$
La question précédente indique que (u_n) est une suite sur-additive ($u_{m+n} \geqslant u_n + u_m$). Comme $\frac{u_n}{n} \leqslant 0$, on peut utiliser la partie **1.3** pour conclure que $\frac{u_n}{n} \to \gamma_a = \sup\{u_n/n \in \mathbb{N}^*\}$ et cette borne supérieure est négative (les éléments de l'ensemble étant négatifs). Par croissance de l'exponentielle, on passe de $\frac{u_n}{n} \leqslant \gamma_a$ à $e^{u_n} \leqslant e^{n\gamma_a}$. Ainsi
$$\boxed{\frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geqslant na))}{n} \to \gamma \leqslant 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(S_n \geqslant na) \leqslant e^{n\gamma_a}}$$

2.2 Majoration des grandes déviations

1. On a $e^{tS_n} = \prod_{k=1}^n e^{tX_k}$. Les variables X_k étant mutuellement indépendantes, il en va de même des e^{tX_k}. L'espérance du produit est alors égale au produit des espérances. Les X_k ayant la même loi que X, on a donc
$$\boxed{\forall t \in I,\ \mathbb{E}(e^{tS_n}) = (\varphi_X(t))^n}$$
Si $t \in \mathbb{R}^{+*} \cap I$ alors $S_n \geqslant na$ équivaut à $tS_n \geqslant nta$ et donc à $e^{tS_n} \geqslant e^{nta}$. Comme e^{tS_n} admet une espérance et est à valeurs positives, on peut utiliser l'inégalité de Markov :
$$\mathbb{P}(S_n \geqslant na) = \mathbb{P}(e^{tS_n} \geqslant e^{ta}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{nta}}$$
Si $t = 0$ le résultat reste vrai puisque le majorant vaut alors 1. Avec le premier résultat, on conclut que
$$\boxed{\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+,\ \mathbb{P}(S_n \geqslant na) \leqslant \frac{\varphi_X(t)^n}{e^{nta}}}$$

2. (a) Le résultat précédent pour $n = 1$ donne, par croissance du logarithme, la relation $\forall t \in \mathbb{R}^+ \cap I,\ \ln(\mathbb{P}(X \geqslant a)) \leqslant \chi(t)$ (on rappelle que l'on a supposé $\mathbb{P}(X \geqslant a) > 0$).
$$\boxed{\eta_a = \inf\{\chi(t)/\ t \in I \cap \mathbb{R}^+\} \text{ existe}}$$
   (b) Notons que puisqu'il existe $\tau > 0$ tel que X vérifie (C_τ), φ_X est définie sur $[-\tau, \tau]$ et est de classe C^∞ sur $]-\tau, \tau[$. Par formule de Taylor-Young, on a
$$\varphi_X(t) = \varphi_X(0) + t\varphi_x'(t) + o_0(t) = 1 + t\mathbb{E}(X) + o_0(t)$$
On en déduit que $\chi(t) = (\mathbb{E}(X) - a)t + o(t)$ et comme $\mathbb{E}(X) \neq a$,
$$\chi(t) \underset{t\to 0}{\sim} (\mathbb{E}(X) - a)t$$
Comme $\mathbb{E}(X) - a < 0$, χ prend des valeurs < 0 sur $I \cap \mathbb{R}^+$ (fonction localement négative au voisinage de 0^+) et donc
$$\boxed{\eta_a < 0}$$
   (c) On peut trouver une suite (t_k) d'éléments de $I \cap \mathbb{R}^+$ telle que $\chi(t_k) \to \eta_a$. On a alors $\phi_X(t_k)e^{-t_k a} \to e^{\eta_a}$ et donc $\phi_X(t_k)^n e^{-nt_k a} \to e^{n\eta_a}$ quand $k \to +\infty$. On en déduit avec **2.2.1** que
$$\boxed{\mathbb{P}(S_n \geqslant a) \leqslant e^{n\eta_a}}$$
Ainsi, $\frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geqslant n_a))}{n} \leqslant \eta_a$ et donc $\gamma_a \leqslant \eta_a < 0$.

(d) Dans le cas où X suit la loi $\mathcal{B}(p)$, on a $\mathbb{P}(X \geqslant a) = 0$ ssi $a > 1$. De plus $\mathbb{E}(X) = p$. On fait donc l'hypothèse

$$a \in]p, 1]$$

Par théorème de transfert, on a, pour tout t réel,

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = (1-p) + pe^t$$

On en déduit que

$$\forall t \geqslant 0,\ \chi(t) = \ln((1-p) + pe^t) - ta$$

ou encore

$$\forall t > 0,\ \chi(t) = \ln\left((1-p)e^{-ta} + pe^{(1-a)t}\right)$$

Posons $g(t) = (1-p)e^{-ta} + pe^{(1-a)t}$ en sorte que $g'(t) = e^{-ta}\left(-a(1-p) + p(1-a)e^t\right)$. g est donc χ est minimale sur $\mathbb{R}^+$ quand $e^t = \frac{a(1-p)}{p(1-a)}$ et le minimum vaut, après un calcul que l'on espérera sans erreur (on remplace e^t par son expression dans $\chi(t)$ et de même on remplace t par le logarithme de l'expression trouvée pour e^t)

$$\boxed{\eta_a = (1-a)\ln\left(\frac{1-p}{1-a}\right) - a\ln\left(\frac{a}{p}\right)}$$

On suppose maintenant que X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On a donc $\mathbb{E}(X) = \lambda$. De plus $\mathbb{P}(X \geqslant a)$ est > 0 pour toute valeur de a et on impose donc

$$a \in]\lambda, +\infty[$$

Comme $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \exp(\lambda(e^t - 1))$ (question **1.1.2.c**), on a $\chi(t) = \lambda(e^t - 1) - ta$. χ est minimale sur $\mathbb{R}^+$ en t tel que $e^t = \frac{a}{\lambda}$ et on a donc

$$\boxed{\eta_a = a - \lambda - a\ln\left(\frac{a}{\lambda}\right)}$$

2.3 Le théorème de Cramer

1. (a) Par formule de transfert, on a $\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{x\in X(\Omega)} e^{tx}\mathbb{P}(X = x)$. Comme $\mathbb{E}(e^{tX}) > 0$ (car e^{tX} est une variable > 0 admet une espérance finie), on a donc

$$\boxed{\sum_{x\in X(\Omega)} \frac{e^{tx}}{\mathbb{E}(e^{tX})}\mathbb{P}(X = x) = 1}$$

(b) Par définition de l'espérance, on a (l'existence est légitimée par le calcul après avoir noté que toutes les quantités sont positives)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X') &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X' = x)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \frac{xe^{tx}}{\mathbb{E}(e^{tX})}\mathbb{P}(X = x)\\
&= \frac{1}{\varphi_X(t)} \sum_{x\in X(\Omega)} xe^{tx}\mathbb{P}(X = x)\\
&= \frac{(\varphi_X)'(t)}{\varphi_X(t)}
\end{aligned}$$

On sait que $\psi_X = \frac{\varphi_X'}{\varphi_X}$ est strictement croissante. Par ailleurs, $\chi' = \psi_X - a$ est nulle en σ (χ atteignant alors un minimum en un point intérieur). On a donc $\psi_X(\sigma) = a$ et donc ($t > \sigma$), $\psi_X(t) > a$. On en déduit que

$$\boxed{\mathbb{E}(X') > a}$$

2. (a) En notant f la fonction de l'énoncé, $f(X_1', \dots, X_n')$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(na \leqslant S_n' \leqslant nb)$. Avec le résultat admis, on a donc

$$\mathbb{P}(na \leqslant S_n' \leqslant nb) = \frac{1}{\varphi_X(t)^n}\mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_n)e^{tS_n})$$

Par formule de transfert,

$$\mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_n)e^{tS_n}) = \sum_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ na \leqslant x_1 + \dots + x_n \leqslant nb}} e^{t(x_1+\dots+x_n)}\mathbb{P}(X_1 = x_1 \cap \dots \cap X_n = x_n)$$

Dans la somme, $e^{t(x_1+\dots+x_n)} \leqslant e^{ntb}$ par croissance de l'expontielle et donc

$$\mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_n)e^{tS_n}) \leqslant e^{ntb} \sum_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ na \leqslant x_1 + \dots + x_n \leqslant nb}} \mathbb{P}(X_1 = x_1 \cap \dots \cap X_n = x_n)$$

Enfin la somme est majorée par la somme des $\mathbb{P}(X_1 = x_1 \cap \dots \cap X_n = x_n)$ pour $x_1 + \dots + x_n \geqslant a$ qui vaut $\mathbb{P}(S_n \geqslant na)$. On conclut que

$$\boxed{\mathbb{P}(na \leqslant S_n' \leqslant nb) \leqslant \mathbb{P}(S_n \geqslant na)\frac{e^{ntb}}{\varphi_X(t)^n}}$$

(b) Comme $a < \mathbb{E}(X') < b$ (avec **2.C.1b** et l'hypothèse sur b) et avec **1.2.2**, on a

$$\pi_n' = \mathbb{P}(na \leqslant S_n' \leqslant nb) \to 1$$

Par ailleurs $\mathbb{P}(S_n \geqslant na) \leqslant e^{n\gamma_a}$ avec **2.1.3** et donc

$$\frac{\varphi_X(t)^n}{e^{ntb}}\pi_n' \leqslant e^{n\gamma_a}$$

On passe au logarithme et on divise par n et on fait tendre n vers $+\infty$:

$$\ln(\varphi_X(t)) - tb \leqslant \gamma_a$$

On a donc

$$\eta_a + t(a-b) \leqslant \chi(t) + t(a-b) \leqslant \gamma_a$$

Soit $\varepsilon > 0$. ψ_X étant continue, on peut trouver $t \in]\sigma, \sigma+1]$ tel que $0 \leqslant \psi_X(t) - \psi_X(\sigma) \leqslant \varepsilon$. On a choisit alors $b = \psi_X(t) + \varepsilon$. On a alors $|a-b| = |\psi_X(\sigma) - b| \leqslant 2\varepsilon$ et $t|b-a| \leqslant 2\varepsilon(\sigma+1)$. On vient de voir que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \eta_a + 2\varepsilon(\sigma+1) \leqslant \gamma_a$$

et donc $\eta_a \leqslant \gamma_a$. **2.2.2c** ayant donné l'inégalité inverse, on conclut que

$$\boxed{\eta_a = \gamma_a}$$

3. (a) Une somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $1/2$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. Si on se place dans le cas où X suit la loi $\mathcal{B}(1/2)$, S_n suit la loi $\mathcal{B}(n, 1/2)$. On a alors

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant (\alpha+1/2)n) = \sum_{k \geqslant (\alpha+1/2)n} \mathbb{P}(S_n = k) = \frac{1}{2^n}\sum_{k \geqslant (\alpha+1/2)n} \binom{n}{k}$$

Par symétrie dans le triangle de Pascal, on a aussi

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k \geqslant (\alpha+1/2)n} \binom{n}{k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k \leqslant (-\alpha+1/2)n} \binom{n}{k}$$

Comme A_n est l'ensemble des k tels que $k \geqslant (\alpha+1/2)n$ ou $k \leqslant (-\alpha+1/2)n$, on trouve ainsi que
$$U_n = 2^{n-1}\mathbb{P}(S_n \geqslant (\alpha+1/2)n)$$
On en déduit que
$$\frac{\ln(U_n)}{n} = \frac{n-1}{n}\ln(2) + \frac{\mathbb{P}(S_n \geqslant (\alpha+1/2)n)}{n}$$
Le second terme tend vers $\gamma_{\alpha+1/2} = \eta_{\alpha+1/2}$ pour une loi de Bernoulli de paramètre 1/2 c'est à dire (après calcul toujours un peu délicat)
$$(\alpha - \frac{1}{2})\ln(1-2\alpha) - (\alpha+\frac{1}{2})\ln(2\alpha+1)$$
En passant au logarithme, on obtient PEUT-ETRE (!!!)
$$\lim_{n\to+\infty} U_n^{1/n} = 2\frac{(1-2\alpha)^{\alpha-1/2}}{(1+2\alpha)^{\alpha+1/2}}$$

(b) Une somme de n variables de Poisson indépendantes et de même paramètre λ est une variable de Poisson de paramètre $n\lambda$. Si on se place dans le cas où X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, S_n suit la loi $\mathcal{P}(n\lambda)$. On a donc
$$\mathbb{P}(S_n \geqslant n\alpha) = e^{-n\lambda}\sum_{k\geqslant \alpha n}\frac{(n\lambda)^k}{k!}$$
et on retrouve $U_n = e^{-n\lambda}T_n$. Comme $U_n^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{\ln(U_n)}{n}\right)$ on est dans le cas $a = \alpha$ et $U_n^{1/n} \to \exp(\gamma_\alpha) = \exp(\eta_\alpha)$ et donc (formule de **2.2.2d**)
$$\lim_{n\to+\infty} U_n^{1/n} = e^{\alpha-\lambda}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\alpha$$
et ainsi
$$\lim_{n\to+\infty} T_n^{1/n} = e^{\alpha}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\alpha$$