Centrale 2016 - PSI 2
un corrigé

1 Transformation de Fourier

1.A φ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1/2,1/2\}$ et en $\pm 1/2$, elle admet des limites finies à droite et gauche. C'est donc une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Les seuls problèmes d'intégrabilité sont aux voisinages des infinis où φ est nulle et donc intégrable. Finalement

$$\varphi \in E_{cpm}$$

On a immédiatement

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \mathcal{F}(\varphi)(x)=\int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi xt}\,dt=\left[-\frac{1}{2i\pi x}\right]_{-1/2}^{1/2}=-\frac{1}{2i\pi x}(e^{-i\pi x}-e^{i\pi x})=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

De plus

$$\mathcal{F}(\varphi)(0)=\int_{-1/2}^{1/2} dt=1$$

On remarque (puisque $\sin(u)\sim u$ au voisinage de 0) que $\mathcal{F}(\varphi)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1.B

1.B.1 On sait que sin est DSE de rayon infini et en utilisant le DSE, on trouve que

$$\forall x\neq 0,\ \psi(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\pi x)^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\pi^2)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$$

La formule reste valable pour $x=0$. On a donc trouvé le DSE de ψ et montré que le rayon de convergence est infini.
La somme d'une série entière étant de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence, on a donc

$$\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$$

1.B.2 Soit $n\in\mathbb{N}$; sur $[n,n+1]$, $\frac{1}{x}\geq\frac{1}{n+1}$. On en déduit que

$$\int_n^{n+1}|\psi(x)|\,dx\geq\frac{1}{\pi(n+1)}\int_n^{n+1}|\sin(\pi x)|\,dx$$

$x\mapsto|\sin(\pi x)|$ étant 1-périodique, l'intégrale ci-dessus est égale à celle sur $[0,1]$ où la fonction est positive. On peut enlever les valeurs absolue et l'intégrale vaut $\int_0^1\cos(\pi x)\,dx=\frac{2}{\pi}$. Ainsi,

$$\int_n^{n+1}|\psi(x)|\,dx\geq\frac{2}{\pi^2(n+1)}$$

On en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^n|\psi(x)|\,dx\geq\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$$

$c\mapsto\int_0^c|\psi(x)|\,dx$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et ce qui précède montre que cette fonction n'est pas bornée. Elle est donc de limite infinie en $+\infty$ et ψ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. En particulier

$$\psi\notin E_{cpm}$$

1.C Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Soit donc $f \in E_{cpm}$.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ x \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall [-a, a] \subset \mathbb{R},\ \forall x \in [-a, a],\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)e^{-2i\pi xt}| = |f(t)|$. Le "majorant" est indépendant de x et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique et donne

$$\mathcal{F}(f) \in C^0(\mathbb{R})$$

1.D Soit $f \in \mathcal{S}$.

1.D.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. $x \mapsto x^n f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et les seuls problèmes d'intégrabilité sont aux voisinages des infinis. $x \mapsto x^{n+2} f(x)$ étant bornée sur $\mathbb{R}$, on a $x^n f(x) = O(1/x^2)$ au voisinage des infini ce qui nous donne l'intégrabilité voulue.

1.D.2 On veut maintenant utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ x \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ de dérivée n-ième $x \mapsto (-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto (-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall [-a, a] \subset \mathbb{R},\ \forall x \in [-a, a],\ \forall t \in \mathbb{R},\ |(-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}|| = (2\pi)^n |t^n f(t)|$. Le "majorant" est indépendant de x et intégrable sur $\mathbb{R}$ (on vient de le voir).

Le théorème s'applique et donne $\mathcal{F}(f) \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\mathcal{F}(f))^{(n)}(x) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)e^{-2i\pi x}\, dt$$

1.E

1.E.1 θ est continue et $\theta(x)$ est négligeable devant toute puissance de x au voisinage des infinis par croissances comparées. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n \theta(x)$ est continue et de limite finie (et même nulle) en $\pm\infty$ et donc bornée. Ainsi

$$\theta \in \mathcal{S}$$

La question précédente donne la dérivabilité de $y = \mathcal{F}(\theta)$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = (-2i\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\pi t^2} e^{-2i\pi xt}\, dt$$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + 2\pi xy(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi t - 2i\pi x)e^{-\pi t^2 - 2i\pi xt}\, dt$$

La fonction (de t) sous l'intégrale est la dérivée de $t \mapsto e^{-\pi t^2 - 2i\pi xt}$ dont la limite en $\pm\infty$ est nulle (son module vaut $\theta(t)$). L'intégrale est donc nulle et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + 2\pi xy(x) = 0$$

1.E.2 On résout cette équation différentielle linéaire d"ordre 1. Il existe une constante c telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ce^{-\pi x^2}$$

Avec l'intégrale donnée dans l'énoncé, on sait que $y(0) = 1$ et donc que $c = 1$. On a ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = e^{-\pi x^2}$$

ce qui s'écrit, en revenant aux notations de l'énoncé,

$$\mathcal{F}(\theta) = \theta$$

2 Formule d'inversion de Fourier

2.A On veut utiliser le théorème de convergence dominée sur $\mathbb{R}$ avec la fonction

$$u_n \ : \ x \mapsto \mathcal{F}(f)(x)\theta\left(\frac{x}{n}\right)$$

- Pour tout n, u_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- Comme θ est continue en 0, (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{F}(f)$ ($\theta(0) = 1$) et cette limite simple est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout n, $|u_n| \leq |\mathcal{F}(f)|$ ($|\theta|$ est majorée par 1) et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique et indique que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)\ dx$$

2.B On veut utiliser le théorème de convergence dominée sur $\mathbb{R}$ avec la fonction

$$v_n \ : \ t \mapsto \mathcal{F}(\theta)(t)f\left(\frac{t}{n}\right) = \theta(t)f\left(\frac{t}{n}\right)$$

- Pour tout n, v_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- Comme f est continue en 0, (v_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f(0)\theta$ et cette limite simple est continue sur $\mathbb{R}$.
- f étant dans $\mathcal{S}$, elle est bornée sur $\mathbb{R}$ ($f(t) = t^0 f(t)$). Pour tout n, $|v_n| \leq \|f\|_\infty \theta$ et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique et indique que

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\ dt = f(0)$$

2.C En revenant à la définition de $\mathcal{F}(f)$, on a

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi xt}\theta\left(\frac{x}{n}\right)\ dt\right)\ dx$$

La formule de Fubini donne alors

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi xt}\theta\left(\frac{x}{n}\right)\ dx\right)\ dt$$

Dans l'intégrale interne, on effectue le changement de variable linéaire $u = x/n$ pour obtenir

$$I_n = n\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2in\pi ut}\theta(u)\ du\right)\ dt$$

Dans l'intégrale extérieure, on effectue le changement de variable linéaire $v = nt$ pour obtenir

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right)e^{-2i\pi ut}\theta(u)\ du\right)\ dt$$

$f(t/n)$ ne dépendant pas de u, on peut le sortir par linéarité du passage à l'intégrale. On reconnaît alors $\mathcal{F}(\theta)(u)$ et on conclut que

$$I_n = J_n$$

2.D Il suffit de combiner les trois questions qui précèdent et l'unicité de la limite pour conclure que

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)\ dx$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons $h\ \ t \mapsto f(x+t)$. h est continue, comme f. De plus, pour $|t|$ assez grand,

$$t^n h(t) = \frac{t^n}{(x+t)^n}(x+t)^n f(x+t) \underset{t\to\pm\infty}{\sim} (x+t)^n f(x+t)$$

ce qui montre que $t \mapsto t^n h(t)$ est bornée, comme f, aux voisinages des infinis et donc sur $\mathbb{R}$ (puisque continue et donc bornée sur tout segment). On peut alors appliquer ce qui précède à h et affirmer que

$$f(x) = h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(h)(y)\ dy$$

On remarque alors, avec le changement de variable affine $u = x + t$, que

$$\mathcal{F}(h)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)e^{-2i\pi ty}\ dt = e^{2i\pi yx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi uy}\ du = e^{2i\pi yx}\mathcal{F}(f)(y)$$

On a ainsi montré que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi yx}\mathcal{F}(f)(y)\ dy$$

2.E La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$ est dans $\mathcal{S}$ (elle est continue sur $\mathbb{R}$ et dominée au voisinage de $\pm\infty$ par toute puissance de x par croissances comparées). De plus

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|-2\pi itx}\ dt$$

Pour calculer l'intégrale, on découpe en deux par Chasles :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{t(1-2\pi ix)}\ dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{t(-1-2\pi ix)}\ dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{1-2\pi ix}e^{t(1-2\pi ix)}\right]_{t=-\infty}^{t=0} - \left[\frac{1}{1+2\pi ix}e^{t(-1-2\pi ix)}\right]_{t=0}^{t=+\infty}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2\pi ix} + \frac{1}{1+2\pi ix}\right) \\
&= \frac{1}{1+4\pi^2x^2}
\end{aligned}$$

On a donc avec la question précédente

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2}e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi yx}}{1+(2\pi y)^2}\ dy$$

3 Transformée de Fourier à support compact

3.A D'après 1.D, $\mathcal{F}(f) \in C^\infty(\mathbb{R})$ (puisque $f \in \mathcal{S}$). De plus $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors d'un segment et donc dominée par toute puissance de x au voisinage des infinis. On a donc $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$.
En reprenant la même démarche qu'en 1.D.2 (changer x en $-x$), la formule (2.1) de la question 2.D montre que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \int_{-1/2}^{1/2} (2i\pi t)^n \mathcal{F}(f)(t)e^{2i\pi tx}\ dt$$

3.B Si h est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ alors pour tout entier n et tous $a, b \in \mathbb{R}$ (formule de Taylor avec reste intégrale)

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} h^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} h^{(n+1)}(t)\ dt$$

On applique ceci avec f pour $b = x$ et $a = x_0$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt$$

Montrons que ce terme est de limite nulle quand $n \to +\infty$. Pour cela, on le majore en module ; une majoration grossière donne

$$\left| \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt \right| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty,[x,x_0]}$$

Remarquons que ($\mathcal{F}(f)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ puisque continue et nulle en dehors d'un segment)

$$\forall y \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(y)| \leq |\pi y|^n \int_{-1/2}^{1/2} |2t|^n |\mathcal{F}(f)(t)|\ dt \leq |\pi y|^n \|\mathcal{F}(f)\|_\infty$$

On a donc

$$\|f^{(n)}\|_{\infty,[x,x_0]} \leq |\pi \max(|x|, |x_0|)|^n \|\mathcal{F}(f)\|_\infty$$

et ainsi

$$\left| \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt \right| \leq \frac{|\pi \max(|x|, |x_0|)(x-x_0)|^{n+1}}{n!} \|\mathcal{F}(f)\|_\infty$$

Par croissances comparées des fonctions exponentielle et factorielle, ce terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$. On peut ainsi passer à la limite et affirmer que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

En reprenant l'expression des dérivées de f, on trouve

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \int_{-1/2}^{1/2} (2i\pi t)^k \mathcal{F}(f)(t) e^{2i\pi t x_0}\ dt$$

3.C Supposons f nulle sur un intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$ avec $r > 0$. On a alors

$$\forall x \in]-r, r[,\ 0 = f(x_0 + x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \int_{-1/2}^{1/2} (2i\pi t)^k \mathcal{F}(f)(t) e^{2i\pi t x_0}\ dt$$

Comme $r > 0$, l'unicité du DSE de la fonction nulle donne la nullité de $\int_{-1/2}^{1/2} (2i\pi t)^k \mathcal{F}(f)(t) e^{2i\pi t x_0}\ dt$ pour tout n. La question précédente donne alors la nullité de f sur $\mathbb{R}$.
On vient de voir que f ne peut être nulle sur un segment $[u, v]$ avec $u < v$. A fortiori, elle ne peut être nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$.

4 Cas de fonctions périodiques

4.A

4.A.1 Par théorèmes généraux, g est de classe C^∞ sur $]-1,1[\backslash\{0\}$ (quotient de deux telles fonctions avec le dénominateur qui ne s'annule pas). De plus

$$\forall x \in]-1,1[\backslash\{0\},\ g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}\frac{x}{\sin(\pi x)} \sim_0 \frac{1}{\pi}\frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\to} \frac{f'(0)}{\pi} = g(0)$$

ce qui montre que g est continue en 0.

4.A.2 On a

$$\forall x \in]-1,1[\backslash\{0\},\ g'(x) = \frac{f'(x)\sin(\pi x) - \pi\cos(\pi x)(f(x)-f(0))}{\sin^2(\pi x)}$$

Par formule de Taylor-Young, $f'(x) = f'(0) + xf''(0) + o(x)$ et $f(x) - f(0) = xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2)$ (au voisinage de 0). En utilisant en outre $\sin(\pi x) = \pi x + o(x^2)$ et $\cos(\pi x) = 1 + o(x)$, on trouve alors

$$f'(x)\sin(\pi x) - \pi\cos(\pi x)(f(x)-f(0)) = \frac{\pi f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Comme $\sin^2(\pi x) \sim \pi^2 x^2$, on trouve que

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \frac{f''(0)}{2\pi}$$

On est alors (avec la question précédente) dans le cadre d'utilisation du théorème de la limite de la dérivée qui nous apprend que g est dérivable en 0 avec $g'(0) = \frac{f''(0)}{2\pi}$ et que g' est continue en 0. On a ainsi

$$g \in C^1(]-1,1[) \ \text{ et } \ g'(0) = \frac{f''(0)}{2\pi}$$

4.B Si $k \neq 0$, une primitive de $x \mapsto e^{2i\pi kx}$ est $x \mapsto \frac{1}{2i\pi k}e^{2i\pi kx}$. Cette primitive étant 1 périodique, l'intégrale de $e^{2i\pi kx}$ est nulle sur un intervalle de longueur 1. On a alors, par linéarité du passage à l'intégrale,

$$\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} dx = 1$$

4.C On remarque que

$$S_n(x) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=-n}^{n} (e^{2i\pi x})^k\right)$$

Pour $x \in [-1/2, 1/2] \setminus \{0\}$ on a une somme géométrique de raison $e^{2i\pi x} \neq 1$ et (factorisation par la demi-somme des angles et formule d'Euler)

$$S_n(x) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{-2i\pi nx} - e^{2i\pi(n+1)x}}{1-e^{2i\pi x}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{-2i\sin((2n+1)\pi x)}{-2i\sin(\pi x)}\right) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

4.D Par linéarité du passage à l'intégrale, on a

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\sum_{k=-n}^{n} e^{-2i\pi kx}\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)S_n(-x)\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\,dx$$

Avec la définition de g, ceci donne

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) &= \int_{-1/2}^{1/2} \left(g(x) + \frac{f(0)}{\sin(\pi x)}\right) \sin((2n+1)\pi x)\, dx \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\, dx + f(0)\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\, dx \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\, dx + f(0)\end{aligned}$$

4.E g étant de classe C^1 sur $[-1/2, 1/2]$, on peut intégrer par parties :

$$\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n{+}1)\pi x)\, dx = \left[-\frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)\pi} g(x)\right]_{-1/2}^{1/2} + \frac{1}{(2n+1)\pi}\int_{-1/2}^{1/2} g'(x)\cos((2n{+}1)\pi x)\, dx$$

Avec le cosinus, le terme “tout intégré” est nul. g' étant continue sur le segment $[-1/2, 1/2]$, on peut alors majorer grossièrement :

$$\left|\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\, dx\right| \le \frac{\|g'\|_{\infty,[-1/2,1/2]}}{(2n+1)\pi} = \frac{C}{2n+1} \quad \text{avec} \quad C = \frac{\|g'\|_{\infty,[-1/2,1/2]}}{\pi}$$

4.F Fixons x et t dans $[-1/2, 1/2]$. Par égalité des accroissements finis, il existe $c_{x,t} \in [t, x+t]$ tel que $f(x+t) - f(t) = xf'(c_{x,t})$. On peut alors écrire que

$$G_t(x) = (f'(x+t) - f'(c_{x,t}))\sin(\pi x) + f'(c_{x,t})(\sin(\pi x) - x\pi\cos(\pi x))$$

Remarquons que chaque dérivée de f est bornée sur $\mathbb{R}$ puisque continue et périodique.

- Par inégalité des accroissements finis, on a

$$|f'(x+t) - f'(c_{x,t})| \le |x + t - c_{x,t}|\|f''\|_\infty \le |x|\|f''\|_\infty$$

- De même

$$|\sin(\pi x)| = |\sin(\pi x) - \sin(0)\| \le |\pi x|$$

- $\|f'(c_{x,t})| \le \|f'\|_\infty$.
- $\sin(\pi x) - x\pi\cos(\pi x) = (\pi x + o(x^2)) - x\pi(1 + o(x)) = o(x^2)$. $\frac{\sin(\pi x) - x\pi\cos(\pi x)}{x^2}$ est donc prolongeable par continuité en 0 et est bornée sur le segment $[-1/2, 1/2]$;

$$\exists\, c / \ \forall x \in [-1/2, 1/2],\ |\sin(\pi x) - x\pi\cos(\pi x)| \le cx^2$$

On en déduit que

$$|G_t(x)| \le (\pi\|f''\|_\infty + c\|f'\|_\infty)x^2 = Dx^2$$

D étant indépendante de x et t.

4.G Fixons $t \in [-1/2, 1/2]$. La fonction $h_t\ :\ x \mapsto f(x+t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique et on peut lui appliquer la question 4.D. En posant $g_t(x) = \frac{h_t(x) - h_t(0)}{\sin(\pi x)}$ pour $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$, $g_t(0) = \frac{h_t'(0)}{\pi}$ et $g_t(1) = g_t(-1) = -g_t(0)$ on a alors

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(h_t) = h_t(0) + \int_{-1/2}^{1/2} g_t(x)\sin((2n+1)\pi x)\, dx$$

Compte-tenu de l'expression de h_t, on a (changement de variable affine $u = x + t$)

$$c_n(h_t) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x+t)e^{-2\pi inx}\,dx = e^{2\pi int}\int_{t-1/2}^{t+1/2} f(u)e^{-2\pi inu}\,du$$

Comme l'intégrale d'une fonction périodique est la même sur tout segment de longueur la période, on trouve que $c_n(h_t) = e^{2\pi int}c_n(f)$ et ainsi

$$f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{2i\pi kt} = -\int_{-1/2}^{1/2} g_t(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx$$

Avec la question 4.E, on trouve alors que

$$\left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{2i\pi kt} \right| \leq \frac{\|g_t'\|_{\infty,[-1/2,1/2]}}{\pi}\frac{1}{2n+1}$$

Remarquons maintenant qu'avec la question précédente,

$$|g_t'(x)| = \frac{|G_t(x)|}{\sin^2(\pi x)} \leq D\frac{x^2}{\sin^2(\pi x)}$$

$x \mapsto \frac{x^2}{\sin^2(\pi x)}$ est continue sur $[-1/2, 1/2] \setminus \{0\}$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur $1/\pi^2$). C'est donc une fonction bornée sur le segment. Notons M sa norme infinie. On a alors $\|g'\|_{\infty,[-1/2,1/2]} \leq M$ et enfin

$$\left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{2i\pi kt} \right| \leq \frac{DM}{\pi}\frac{1}{2n+1} = \frac{E}{2n+1}$$

où E est une constante (indépendante de x et t).

5 Formule d'échantillonage de Shannon

5.A $\mathcal{F}(f)$ étant nulle hors de $[-1/2, 1/2]$, ses dérivées à tout ordre à droite en $1/2$ et à gauche en $-1/2$ sont nulles. Comme c'est une fonction C^∞, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

5.B h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tout point de l'ouvert $]-1/2, 1/2[$ (si x_0 est dans cet ouvert, il existe un voisinage de x_0 sur leque $h = \mathcal{F}(f)$ qui est C^∞). Par périodicité, elle est indéfiniment en tout point hors de $1/2 + \mathbb{Z}$.

Par périodicité, il suffit de montrer que h est indéfiniment dérivable à gauche en $1/2$ et à droite en $-1/2$ avec égalité des dérivées à tout ordre à droite et gauche en $-1/2$ et $1/2$. C'est ce que l'on a fait en question précédente.

5.C On peut ainsi appliquer l'identité (4.1) à h. En posant $d_k = c_k(h)$, on trouve que

$$\left\| h - \sum_{k=-n}^{n} d_k e_k \right\|_{\infty,[-1/2,1/2]} \leq \frac{E}{2n+1} \quad \text{avec} \quad e_k\ :\ t \mapsto e^{2ik\pi t}$$

ce qui prouve la convergence uniforme voulue sur $[-1/2, 1/2]$ (où h coïncide avec $\mathcal{F}(f)$).

5.D Si $x \notin k$, on a $\int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi(x+k)\xi}\, d\xi = \frac{1}{2i\pi(x+k)}(e^{i\pi(x+k)} - e^{-i\pi(x+k)}) = \psi(x+k) = \psi_k(x)$. Ceci reste vrai pour $x = k$ (l'égalité se lit).
La formule (2.1) donne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} h(\xi) e^{2i\pi x\xi}\, d\xi$$

et on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - \sum_{k=-n}^{n} d_k \psi_k(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \left(h(\xi) - \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{2i\pi k\xi} \right) e^{2i\pi x\xi}\, d\xi$$

Une majoration grossière donne (l'exponentielle complexe est de module 1 et on intègre sur un intervalle de longueur 1)

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} d_k \psi_k \right\|_{\infty,\mathbb{R}} \le \left\| h - \sum_{k=-n}^{n} d_k e_k \right\|_{\infty,[-1/2,1/2]}$$

et on a la convergence uniforme voulue.

5.E La convergence uniforme entraînant la convergence simple, on a

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ f(-j) = \sum_{k=-n}^{n} d_k \psi_k(-j) = d_j$$

puisque $\psi_k(-j) = \psi(k-j)$ vaut 1 si $k = j$ et est nul sinon.

6 Transformation de Laplace

6.A

6.A.1 La fonction génératrice des variables X_i est

$$G_{X_i}(t) = \mathbb{E}(t^{X_i}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_i = k) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} t^k = e^{\lambda(t-1)}$$

On sait aussi que si X et Y sont deux variables indépendantes, t^X et t^Y le sont et donc $\mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X t^Y) = G_X(t) G_Y(t)$.
Montrons maintenant, par récurrence, que $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$.

- C'est immédiat au rang $n = 1$.
- Supposons le résultat vrai au rang $n \ge 1$. Comme S_n et X_{n+1} sont indépendantes,

$$G_{S_{n+1}}(t) = G_{S_n}(t) G_{X_{n+1}}(t) = e^{n\lambda(t-1)} e^{\lambda(t-1)} = e^{(n+1)\lambda(t-1)}$$

  S_{n+1} suit donc une loi de Poisson de paramètre $(n+1)\lambda$ puisque sa fonction génératrice est celle d'une telle loi.

6.A.2 D'après la loi faible des grands nombre, comme les X_n sont des variables mutuellement indépendantes de même loi et qu'elles admettent des moment d'ordre 2, en notant m et σ l'espérance et la variance de ces variables,

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \ge \varepsilon \right) \le \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Ici, $m = \sigma^2 = \lambda$ et on a donc

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \lambda| \ge n\varepsilon \right) \le \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

6.A.3 Si $a > b + c$ et $c \geq 0$ alors $|a - b| \geq a - b > c$. On en déduit que

$$(S_n > n(\lambda + \varepsilon)) \subset (|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon)$$

De même si $a \leq b - c$ avec $c \geq 0$ alors $a - b \leq -c \leq 0$ et donc $|a - b| \geq c \geq 0$. Ainsi

$$(S_n \leq n(\lambda - \varepsilon)) \subset (|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon)$$

6.A.4 Supposons $x \in [0, \lambda[$ et posons $\varepsilon = \frac{\lambda - x}{2}$. On a $\varepsilon > 0$ et $x < \lambda - \varepsilon$. On en déduit que $(S_n \leq nx) \subset (S_n \leq n(\lambda - \varepsilon))$ et donc

$$0 \leq \mathbb{P}(S_n \leq nx) \leq \mathbb{P}(S_n \leq n(\lambda - \varepsilon)) \leq \mathbb{P}(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

Par théorème d'encadrement, on a donc

$$\forall x \in [0, \lambda[, \ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(S_n \leq nx) = 0$$

Supposons maintenant $x > \lambda$ et posons $\varepsilon = \frac{x - \lambda}{2}$. On a $\varepsilon > 0$ et $\lambda + \varepsilon < x$. On en déduit que $(S_n > nx) \subset (S_n > n(\lambda - \varepsilon))$ et donc

$$0 \leq \mathbb{P}(S_n > nx) \leq \mathbb{P}(S_n > n(\lambda - \varepsilon)) \leq \mathbb{P}(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

Par théorème d'encadrement, $\mathbb{P}(S_n > nx) \to 0$ et donc $\mathbb{P}(S_n \leq nx) = 1 - \mathbb{P}(S_n > nx) \to 1$:

$$\forall x > \lambda, \ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(S_n \leq nx) = 1$$

6.B S_n étant à valeurs entières positives et suivant une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$,

$$\mathbb{P}(S_n \leq nx) = \sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}$$

et la question précédente donne

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \lambda \\ 1 & \text{si } x > \lambda \end{cases}$$

6.C

6.C.1 Avec la formule donné pour $(\mathcal{L}(f))^{(k)}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} (\mathcal{L}(f))^{(k)}(n) &= \sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} \int_0^{+\infty} \frac{(nt)^k}{k!} f(t) e^{-nt} \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} \frac{(nt)^k}{k!} f(t) e^{-nt} \right) dt \end{aligned}$$

Notons (x étant fixé) F_n la fonction sous l'intégrale. La question précédente indique (F_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction valant f sur $[0, x[$, $f(x)/2$ en x et nulle sur $]x, +\infty[$; nous noterons F cette fonction. Il nous suffit de pouvoir intervertir limite et intégrale pour pouvoir conclure. Les F_n et F et F étant continues par morceaux, il nous suffit de vérifier l'hypothèse de domination pour utiliser le théorème de convergence dominée. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall t \in [0, a], \ |F_n(t)| \leq |f(t)| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nt)^k}{k!} e^{-nt} = |f(t)|$$

et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On a ainsi prouvé que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\le k\le\lfloor nx\rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} (\mathcal{L}(f))^{(k)}(n) = \int_0^x f(t)\, dt$$

6.C.2 $\mathcal{L}$ est linéaire et il suffit de montrer que son noyau est réduit à $\{0\}$. Soit donc f une fonction continue nulle hors d'un segment et telle que $\mathcal{L}(f) = 0$. La question précédente montre que $\forall x,\ \int_0^x f(y)\, dy$. Par théorème fondamental, une primitive de f est nulle sur $\mathbb{R}$ et, en dérivant, f est nulle sur $\mathbb{R}$.