Centrale 2015 - PSI 2
un corrigé

1 Résultats préliminaires

IA.1a Ω étant ouvert, il existe une boule centrée sur (x,y) de rayon r incluse dans Ω. On a alors

$$I \times J =]x - r/\sqrt{2}, x + r/\sqrt{2}[\times]y - r/\sqrt{2}, y + r/\sqrt{2}[\subset \Omega$$

En effet, si $(u,v) \in I \times J$ alors $|x-u| < r/\sqrt{2}$ et $|y-v| < r/\sqrt{2}$ et donc $(x-u)^2 + (y-v)^2 < r$ ce qui montre que $I \times J \subset D((x,y),r) \subset \Omega$.

Remarque : on peut illustrer ceci en remarquant qu'on peut inclure un carré dans un disque.

IA.1b P étant un polynôme de deux variables, on peut l'écrire (pour un bon n)

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ P(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=0}^{n-k} \alpha_{k,l} y^l \right) x^k = \sum_{k=0}^{n} Q_k(y) x^k \ \text{ avec } \ \forall k,\ Q_k \in \mathbb{R}[X]$$

D'après ce qui précède, pour $y \in J$ fixé, $x \mapsto P(x,y)$ s'annule sur I. Comme c'est une fonction polynomiale et que I est infini, c'est la fonction polynomiale nulle. Ainsi (un polynôme d'une variable est nul quand ses coefficients le sont)

$$\forall k \in [0,d],\ \forall y \in J,\ Q_k(y) = 0$$

De la même façon, Q_k est le polynôme nul et tous les coefficients $\alpha_{k,l}$ le sont. P est donc le polynôme nul.

IA.2 $P\ :\ (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ est nul sur le cercle unité, qui possède une infinité d'éléments, mais n'est pas le polynôme nul. Le résultat précédent ne subsiste pas avec la seule hypothèse "Ω infini".

IB.1 Par définition, $\mathcal{P}_m$ est l'espace vectoriel engendré par la famille $(f_{k,l}\ :\ (x,y) \mapsto x^k y^l)_{\substack{k,l \in \mathbb{N} \\ k+l \leq m}}$.
C'est donc bien un espace vectoriel ! La famille génératice trouvée est libre (puisqu'un polynôme n'est nul que si tous ses coefficients le sont). Elle forme une base de $\mathcal{P}_m$ et la dimension de l'espace est donc (pour chaque valeur de $k \in [0,m]$, on a $m-k+1$ choix possibles pour l)

$$\dim(\mathcal{P}_m) = \sum_{k=0}^{m} (m-k+1) = \sum_{j=1}^{m+1} j = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

IB.2 Posons $P_1\ :\ (x,y) \mapsto x+y$. On a alors immédiatement $\Delta(P_1) = 0$. Il est en fait clair que tout polynôme de degré 1 est harmonique.
Posons $P_2\ :\ (x,y) \mapsto x^2 - y^2$. On a alors $\partial_{1,1} P_2(x,y) = 2$ et $\partial_{2,2} P_2(x,y) = -2$ ce qui montre que P_2 est harmonique.

IB.3a $P \mapsto \Delta P$ est une application linéaire (linéarité de la dérivation partielle) et l'ensemble des polynômes harmonique est l'espace vectoriel (une intersection de sous-espaces est un sous-espace)

$$\ker(\Delta) \cap \mathcal{P}$$

IB.3b D'après le théorème du rang,

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} = \dim(\mathcal{P}_m) = \dim(\ker(\Delta_m)) + \dim(\mathrm{Im}(\Delta_m))$$

Or, de façon immédiate on a $\dim(\mathrm{Im}(\Delta_m)) \subset \mathcal{P}_{m-2}$ (quand on dérive partiellement deux fois, on perd au moins deux degrés). Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(\Delta_m)) \leq \frac{(m-1)m}{2}$ et donc

$$\dim(\ker(\Delta_m)) \geq \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(m-1)m}{2} = 2m+1$$

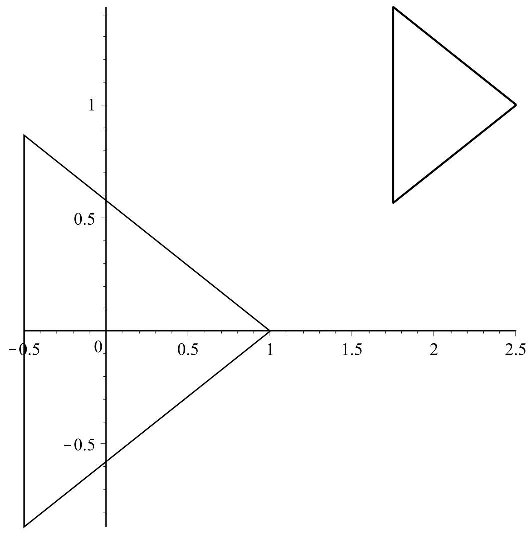
IB.3c Comme pour tout m on a $\ker(\Delta_m) \subset \ker(\Delta)$, on peut en déduire que l'espace vectoriel des polynômes harmoniques est de dimension infinie.

IC.1 Posons $H(x,y) = xy$. H est un polynôme harmonique qui est partout égal à $f\ : (x,y) \mapsto xy$.

IC.2 Une recherche au brouillon nous amène à poser $H(x,y) = x^4 - y^4 + (1 - x^2 - y^2)(x^2 - y^2)$. Il est évident que $H(x,y) = x^4 - y^4$ quand $(x,y) \in C(0,1)$. Le calcul montre facilement que H est harmonique.

2 Quelques exemples d'applications harmoniques

II.A $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est l'image de Ω par une homothétie de rapport λ composée avec une translation de vecteur (x_0, y_0). Dans le cas proposé, on obtient le dessin suivant



IIB.1 Comme $\partial i f$ est de classe C^2, on peut lui appliquer le théorème de Schwarz qui indique que l'on peut permuter les dérivées partielles. On a ainsi

$$\Delta(\partial_i f) = \partial_i(\Delta f)$$

Quand f est harmonique, $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ le sont donc aussi.

IIB.2 Comme il a été indiqué plus haut,

$$\Omega_{x_0,y_0,\lambda} = T_{(x_0,y_0)} \circ H_\lambda(\Omega)$$

où T_u est la translation de vecteur u et $H_\lambda = \lambda Id$ est l'homothétie de rapport λ (de centre l'origine). On notera que nos deux applications sont des bijections (réciproques) en sorte que

$$\Omega = H_{\lambda^{-1}} \circ T_{-(x_0,y_0)}(\Omega_{x_0,y_0,\lambda})$$

Soit $(x,y) \in \Omega_{x_0,y_0,\lambda}$; posons $(x', y') = H_{\lambda^{-1}} \circ T_{-(x_0,y_0)}(x,y)$. C'est un élément de Ω et il existe donc $r > 0$ tel que $D((x', y'), r) \subset \Omega$. On a alors

$$D((x,y), |\lambda| r) = T_{(x_0,y_0)} \circ H_\lambda \left(D((x', y'), r)\right) \subset T_{(x_0,y_0)} \circ H_\lambda (\Omega) = \Omega_{x_0,y_0,\lambda}$$

Ceci montre que $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est un ouvert.

On peut aussi conclure en remarquant que $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est l'image réciproque de Ω par l'application continue $H_{\lambda^{-1}} \circ T_{-(x_0,y_0)}$.

IIB.3 Posons $h(x, y) = g(\lambda(x, y) + (x_0, y_0))$. On a alors (quand g est de classe C^2, h l'est aussi par théorèmes d'opérations)

$$\partial_{i,i}h(x, y) = \lambda^2 \partial_{i,i}g(\lambda(x, y) + (x_0, y_0))$$

et le caractère harmonique de g entraîne immédiatement celui de h.

IIC.1 h_1 et h_2 sont de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par théorèmes d'opérations. De plus

$$\partial_1 h_1(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2},\ \partial_{1,1}h_1(x, y) = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\partial_2 h_1(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2},\ \partial_{2,2}h_1(x, y) = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

et on a donc $\Delta(h_1) = 0$, c'est à dire h_1 harmonique. En remarquant que $h_2 = \frac{1}{2}\partial_1 h_1$, on en déduit avec les questions précédentes que h_2 est aussi harmonique.

IIC.2 Notons φ_t l'application proposée. On a

$$\varphi_t = -1 + \cos(t)\partial_1 h_1 + \sin(t)\partial_2 h_1$$

qui est harmonique comme combinaison linéaire de fonctions harmoniques.

IID.1 On remarque que (en utilisant les notations introduites en question précédente)

$$N_t(x, y) = \varphi_t(x - \cos(t), y - \sin(t))$$

On est dans le cas de la question **II.B.3** avec $\lambda = 1$, $(x_0, y_0) = (-\cos(t), -\sin(t))$ et $g = \varphi_t$. Cette question indique que N_t est harmonique sur l'image Ω de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par $(x, y) \mapsto (x + \cos(t), y + \sin(t))$ c'est à dire sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\cos(t), \sin(t))\}$. $D(0, 1)$ étant inclus dans Ω, N_t est harmonique sur $D(0, 1)$.

IID.2 Par théorèmes d'opérations, $t \mapsto N(x, y, t)$ est de classe C^∞ sur son domaine. Les seuls t qui peuvent poser problème sont ceux tels que $(x, y) = (\cos(t), \sin(t))$ et il n'y en a pas puisque $(x, y) \in D(0, 1)$. N_t est donc définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier elle est continue sur $[0, 2\pi]$.

IID.3 Après un calcul au brouillon (coefficients indéterminés), on devine que $\alpha = \beta = 1$ convient. On le vérifie.

$$\begin{aligned}
-1 + \frac{1}{1 - ze^{-it}} + \frac{1}{1 - \bar{z}e^{it}} &= \frac{-(1 - ze^{-it})(1 - \bar{z}e^{it}) + 1 - \bar{z}e^{it} + 1 - ze^{-it}}{(1 - ze^{-it})(1 - \bar{z}e^{it}})\\
&= \frac{1 - z\bar{z}}{(z - e^{it})(\bar{z} - e^{-it})}\\
&= \frac{1 - (x^2 + y^2)}{|z - e^{it}|^2}\\
&= \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(x - \cos(t))^2 + (y - \sin(t))^2}\\
&= N(x, y, t)
\end{aligned}$$

IID.4 En utilisant le DSE de $\frac{1}{1+u}$ (valable sur $] - 1, 1[$) et comme $|ze^{-it}| = |z| < 1$, on a

$$\forall t \in [0, 2\pi],\ \frac{1}{1 - ze^{-it}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-ikt}$$

Soit $f_k\ :\ t \mapsto z^k e^{-ikt}$. (f_k) est une suite de fonctions continues sur $[0, 2\pi]$ et $\|f_k\|_{\infty,[0,2\pi]} = |z|^k$ est le terme général d'une série convergente (géométrique de raison $|z| < 1$). $\sum(f_k)$ est donc normalement convergente sur le SEGMENT $[0,2\pi]$. On est dans un des cas d'interversion somme-intégrale et on peut écrire

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-ze^{-it}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_0^{2\pi} e^{-ikt}\,dt = 2\pi$$

toutes les intégrales étant nulles sauf celle pour $k=0$. En conjuguant, on a aussi

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-\bar{z}e^{it}} = 2\pi$$

Avec la question précédente, on a alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(x,y,t)\,dt = 1$$

3 Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$

IIIA.1a Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres. Ici, y est fixé et on pose $g(x,t) = N(x,y,t)f(\cos(t),\sin(t))$ pour $t \in [0,2\pi]$ et $x \in I_y = \{x/\ x^2+y^2<1\}$.

- Pour tout $x \in I_y$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur le segment $[0,2\pi]$ et donc intégrable sur ce segment.
- $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^2 sur I_y et ses dérivées sont $x \mapsto \partial_1 N_t(x,y)f(\cos(t),\sin(t))$ et $x \mapsto \partial_{1,1}N_t(x,y)f(\cos(t),\sin(t))$.
- Pour tout $x \in I_y$, $t \mapsto \partial_1 N_t(x,y)f(\cos(t),\sin(t))$ et $t \mapsto \partial_{1,1}N_t(x,y)f(\cos(t),\sin(t))$ sont continues sur $[0,2\pi]$.
- Soit $[a,b] \subset I_y$.
  Les applications $(x,t) \mapsto \partial_1 N_t(x,y)f(\cos(t),\sin(t))$ et $(x,t) \mapsto \partial_{1,1}N_t(x,y)f(\cos(t),\sin(t))$ sont continues sur le compact $[a,b]\times[0,2\pi]$. On peut donc les majorer sur ce compact par des constantes. Les majorants sont indépendants de x et intégrables que $[0,2\pi]$ (une fonction constante est intégrable sur un segment).

Le théorème s'applique et permet d'affirmer que N_f admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport à sa première variables. Ces dérivées s'obtiennent en dérivant partiellement sous l'intégrale. De façon plus générale,

$$\partial_{i,j}N_f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_{i,j}N_t(x,y)f(\cos(t),\sin(t))\,dt$$

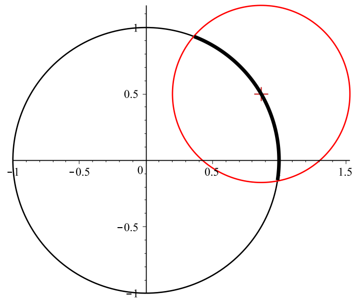
Ceci est vrai pour tout $(x,y) \in D(0,1)$ et pour tous $i,j \in \{1,2\}$, la même preuve permettant de conclure pour tout type de dérivation partielle à tout ordre. Un abus de notation (au vu des notations du préambule qui se contente de parler de fonctions de deux variables) donne $\partial_{i,j}N_t(x,y) = \partial_{i,j}N(x,y,t)$ et la formule de l'énoncé.

IIIA.1a En particulier, le caractère harmonique de N_t et la linéarité du passage à l'intégrale donnent le caractère harmonique de u qui est égale à N_f sur $D(0,1)$.

IIIA.2a Pour visualiser la situation, on considère le point $M(t_0) = (\cos(t_0),\sin(t_0))$ sur le cercle unité. On s'intéresse alors à la boule $\bar{D}(M(t_0),\delta)$. Elle permet d'isoler un arc de cercle de $C(0,1)$ (en gras ci-dessous) qui donne les valeurs convenable de l'angle t (on voit sur le dessin particulier qu'il y aura deux intervalles $[0,t_1]$ et $[t_2,2\pi]$).

De façon générale, $C(M(t_0),\delta)\cap C(0,1)$ étant une intersection de deux cercles peut contenir $0,1$ ou 2 points.

- Dans le premier ou le second cas, $\bar{D}(0,1) \subset \bar{D}(M(t_0),\delta)$ et $I_0^\delta = [0,2\pi]$.
- Dans le troisième cas, les points d'intersections sont $M(t_1)$ et $M(t_2)$ avec $t_0-\pi < t_1 < t_0 < t_2 < t_0+\pi$. Les t convenables sont ceux de $[0,2\pi]$ tels que $M(t)$ est sur l'arc $M(t_1)M(t_2)$. Si $[t_1,t_2] \subset [0,2\pi]$, on a $I_0^\delta = [t_1,t_2]$. Si $t_1<0$ alors $t_2 \in [0,2\pi]$ et $I_0^\delta = [0,t_2]\cup[2\pi-t_1,2\pi]$. Sinon, $t_2 > 2\pi$ et $I_0^\delta = [0,t_2-2\pi]\cup[t_1,2\pi]$.



IIIA.2b Notons $M_0 = (x_0, y_0) = (\cos(t_0), \sin(t_0))$. f étant continue en M_0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \bar{D}(M_0, \delta),\ |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

Pour tout $t \in I_0^\delta$, et en notant $M(t) = (\cos(t), \sin(t))$, on a alors (par définition de I_0^δ) $|f(M(t)) - f(M(t_0))| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}$ et donc (on majore par inégalité triangulaire)

$$\left| \int_{I_0^\delta} N(x,y,t)(f(M(t)) - f(M(t_0)))\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{I_0^\delta} |N(x,y,t)|\, dt$$

Comme N est positive et $I_0^\delta \subset [0, 2\pi]$, on en déduit (en utilisant **II.D4**) que

$$\left| \int_{I_0^\delta} N(x,y,t)(f(M(t)) - f(M(t_0)))\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{[0,2\pi]} N(x,y,t)\, dt = \frac{\varepsilon}{2}$$

IIIA.2c Posons $M = (x,y)$, $M(t) = (\cos(t), \sin(t))$ et $M_0 = M(t_0)$. On suppose donc que $\|M - M_0\| \leq \delta/2$ et que $\|M(t) - M_0\| > \delta$ (par définition de I_0^δ). Par inégalité triangulaire (seconde forme) on a

$$\|M - M(t)\| \geq \|M(t) - M_0\| - \|M_0 - M\| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} \geq 0$$

En élevant au carré (opération croissante sur $\mathbb{R}^+$) puis en passant à l'inverse (opération décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$) on en déduit que

$$\frac{1}{(x - \cos(t))^2 + (y - \sin(t))^2} \leq \frac{4}{\delta^2}$$

et ainsi

$$|N(x,y,t)| = N(x,y,t) \leq 4\frac{1 - (x^2 + y^2)}{\delta^2}$$

IIIA.2d f étant continue sur $C(0,1)$ qui est compact (fermé et borné), elle est bornée et on peut considérer $\|f\|_\infty = \sup_{C(0,1)} |f|$. Une majoration grossière donne

$$\left| \int_{t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x,y,t)(f(M(t)) - f(M_0))\, dt \right| \leq 2\|f\|_\infty \int_{t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x,y,t)\, dt$$

Si on impose $\|M - M_0\| \leq \delta/2$, on peut alors utiliser la question précédente pour affirmer (majoration grossière de $N(x,y,t)$ par une constante et multiplication par 2π qui majore la taille de l'intervalle d'intégration)

$$\left| \int_{t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x,y,t)(f(M(t)) - f(M_0))\, dt \right| \leq 16\pi \|f\|_\infty \frac{1 - (x^2 + y^2)}{\delta^2} = c(1 - (x^2 + y^2))$$

Si $M = (x, y)$ est proche de $M_0 = (\cos(t_0), \sin(t_0))$ alors $x^2 + y^2 = \|M\|^2$ est proche de $\|M_0\|^2 = 1$. Il existe donc η_1 tel que si $\|M - M_0\| \leq \eta_1$ alors $c(1 - (x^2 + y^2)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (c est une constante, elle ne dépend que de δ). En posant $\eta = \min(\eta_1, \delta/2)$, on peut alors tout combiner pour obtenir

$$\left| \int_{t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t)(f(M(t)) - f(M_0))\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

IIIA.3 Il s'agit de montrer que

$$\forall t_0 \in [0, 2\pi],\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 / \ \|(x, y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\| \leq \eta \Rightarrow |u(x, y) - u(\cos(t_0), \sin(t_0))| \leq \varepsilon$$

On se donne donc t_0 et ε. Notons que l'expression de $|u(x, y) - u(\cos(t_0), \sin(t_0))|$ peut prendre deux formes :

- si $(x, y) \in C(0, 1)$, elle s'écrit $|f(x, y) - f(\cos(t_0), \sin(t_0))|$ et par continuité de f, il existe un η_1 tel qu'elle soit $\leq \varepsilon$ pour $\|(x, y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\| \leq \eta_1$.
- sinon elle s'écrit

$$|u(x, y) - u(\cos(t_0), \sin(t_0))| = \left| \int_0^{2\pi} N(x, y, t)(f(M(t)) - f(M_0))\, dt \right|$$

  IIIA.2b donne une valeur de δ pour laquelle **IIIA.2d** donne une valeur η_2. On a alors, en découpant l'intégrale sur I_0^δ et son complémentaire,

$$|u(x, y) - u(\cos(t_0), \sin(t_0))| \leq \varepsilon$$

  quand $\|(x, y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\| \leq \eta_2$.

En prenant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on obtient une valeur convenable pour conclure.
On conclut alors que $u \in \mathcal{D}_f$, c'est à dire que u est solution sur le disque unité du problème de Dirichlet associé à f.

IIIB.1a u_n admet un maximum local en $(\tilde{x}, \tilde{y})$ qui est intérieur à $D(0, 1)$. Avec la question **IA.1a**, $x \mapsto u_n(x, \tilde{y})$ ne prend que des valeurs $\geq u_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ sur un intervalle ouvert contenant $\tilde{x}$.
Or, si une fonction $g \in \mathcal{C}^2(]a, b[)$ atteint un maximum en c, $g'(c) = 0$ (résultat du cours de première année) et alors (Taylor-Young) $g(c + h) - g(c) = \frac{h^2}{2} g''(c) + o(h^2)$ et donc $g''(c) \leq 0$ (sinon, $g(c + h) - g(c) \sim_{h \to 0} \frac{h^2}{2} g''(c)$ est localement strictement positive ce qui est en contradiction avec la maximalité locale en c).
On en déduit que $\partial_1 u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ et $\partial_{1,1} u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0$.

IIIB.1b Un calcul direct donne (sachant que u est harmonique)

$$\forall (x, y) \in D(0, 1),\ \Delta u_n(x, y) = \frac{4}{n} > 0$$

et la question précédente montre, par l'absurde, que u_n n'admet pas de maximum local sur $D(0, 1)$.

IIIB.2 Cependant, u_n étant continue sur le compact $\bar{D}(0, 1)$ admet un maximum sur ce compact et il est donc atteint en un point de $C(0, 1)$ où u_n prend la valeur $1/n$ (car u est nulle sur le cercle). On a ainsi

$$\forall (x, y) \in \bar{D}(0, 1),\ u_n(x, y) \leq \frac{1}{n}$$

IIIB.3 Ce qui précède est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On peut (à x, y fixé quelconque) passer à la limite $n \to +\infty$ pour en déduire que

$$\forall (x, y) \in \bar{D}(0, 1),\ u(x, y) \leq 0$$

Mais $-u$ est clairement solution du même problème que u et on a donc aussi la positivité de u. Finalement

$$\forall (x, y) \in \bar{D}(0, 1),\ u(x, y) = 0$$

III.C On a construit un élément u de $\mathcal{D}_f$ (existence d'une solution). Si v est un autre élément, alors $u - v$ est solution de $\mathcal{D}_0$ et est donc nulle d'après **III.B**. Il y a donc aussi uncité d'une solution.

4 Retour sur les polynômes harmoniques

IVA.1 La linéarité de ϕ_{m-2} est immédiate :

$$\phi_{m-2}(Q_1 + \lambda Q_2) = \phi_{m-2}(Q_1) + \lambda\phi_{m-2}(Q_2)$$

Si $Q \in \mathcal{P}_{m-2}$ alors $\tilde{Q} \in \mathcal{P}_m$ et donc $\Delta\tilde{Q} \in \mathcal{M}_{m-2}$ (une dérivation partielle faisant perdre aumoins un degré). On en déduit que

$$\mathrm{Im}(\phi_{m-2}) \subset \mathcal{P}_{m-2}$$

c'est à dire que ϕ_{m-2} est un endomorphisme de $\mathcal{P}_{m-2}$.
Soit $Q \in \ker(\phi_{m-2})$. On a alors $\Delta\tilde{Q} = 0$. $\tilde{Q}$ est ainsi solution de $\mathcal{D}_0$ (puisque $\tilde{Q}$ est nulle sur $C(0,1)$). D'après la question **III.B**, $\tilde{Q} = 0$. Or, $Q \mapsto (1 - x^2 - y^2)Q$ est injective (elle est linéaire ; si $(1 - x^2 - y^2)Q$ alors Q s'annule sur $D(0,1)$ et est nul d'après **IA.1**). On en déduit que $Q = 0$ et ϕ_{m-2} est donc injective.

IVA.2 ϕ_{m-2} est un isomorphisme de $\mathcal{P}_{m-2}$ (application linéaire injective d'un espace de dimension dans lui même, ce qui entraîne la bijectivité). Comme $\Delta(-P) \in \mathcal{P}_{m-2}$, il admet donc un antécédent T par ϕ_{m-2}. On a alors $\Delta\tilde{T} = \Delta(-P)$ c'est à dire que $P + \tilde{T}$ est harmonique. On a donc montré qu'il existe $T \in \mathcal{P}_{m-2}$ tel que $P + (1 - x^2 - y^2)T$ soit harmonique.

IVA.3 $u = P + (1 - x^2 - y^2)T$ est harmonique et est égale à P_C sur le cercle unité. C'est donc une solution de $\mathcal{D}_{P_C}$. Avec **III.C** on peut dire que c'est l'unique solution. Et comme $T \in \mathcal{P}_{m-2}$, cette solution est dans $\mathcal{P}_m$.

IVA.4 On sait (**IVA.2**) que l'on peut trouver des réels a, b, c tels que $x^3 + (1 - x^2 - y^2)T(x, y)$ soit harmonique. Une recherche par coefficients indéterminés au brouillon montre que $T(x, y) = \frac{3}{4}x$ convient. D'après la question précédente,

$$\mathcal{D}_{P_C} = \{(x, y) \mapsto x^3 + \frac{3x}{4}(1 - x^2 - y^2)\}$$

IVB.1 L'existence d'une décomposition est donnée par la question **IVA.2** (on peut toujours trouver un $m \geq 2$ tel que $P \in \mathcal{P}_m$). Supposons que l'on puisse trouver deux décompositions. On a alors H_1, H_2 harmoniques et Q_1, Q_2 polynômes tels que

$$H_1(x, y) + (1 - x^2 - y^2)Q_1(x, y) = H_2(x, y) + (1 - x^2 - y^2)Q_2(x, y)$$

Posons $Q = Q_1 - Q_2$; il existe $m \geq 2$ tel que $Q \in \mathcal{P}_{m-2}$. La relation précédente donne $\Delta\tilde{Q} = 0$ et donc $Q \in \ker(\phi_{m-2})$. Ceci donne (par injectivité) la nullité de Q et donc Q_1 et Q_2. $H_1 = H_2$ en découle. On a ainsi prouvé l'unicité de la décomposition.

IVB.2 Soit $m \geq 2$. Montrons que

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{H}_m \oplus (1 - x^2 - y^2)\mathcal{P}_{m-2}$$

- L'injectivité de ϕ_{m-2} donne le caractère direct de la somme (l'intersection des espaces est égale au noyau de ϕ_{m-2} et réduite au polynôme nul).
- Soit $P \in \mathcal{P}_m$. La question **IVA.2** donne $T \in \mathcal{P}_{m-2}$ tel que $H = P + (1 - x^2 - y^2)T$ soit harmonique. Comme c'est un élément de $\mathcal{P}_m$, $H \in \mathcal{H}_m$. Ainsi, $P = H - (1 - x^2 - y^2)T \in \mathcal{H}_m \oplus (1 - x^2 - y^2)\mathcal{P}_{m-2}$.

Comme $T \mapsto (1-x^2-y^2)T$ est injective (vu plus haut en **IVA.1**), $(1-x^2-y^2)\mathcal{P}_{m-2}$ et $\mathcal{P}_{m-2}$ ont même dimension et donc

$$\dim(\mathcal{H}_m) = \dim(\mathcal{P}_m) - \dim(\mathcal{P}_{m-2}) = 2m+1$$

Le résultat reste vrai pour $m \in \{0,1\}$ (dans ces deux cas $\mathcal{H}_m = \mathcal{P}_m$).

IVB.3 Pour trouve une base $\mathcal{H}_3$, il nous suffit d'exhiber 7 polynômes harmoniques de degré ≤ 3 et indépendants. Certains sont immédiats comme $1, x, y, xy$. Il est clair que x^2-y^2 convient aussi. En question **IVA.4** on a trouvé un polynôme convenable de degré 3. Par symétrie des rôles, on en trouve un autre. On obtient ainsi une famille de 7 éléments de $\mathcal{H}_3$ dont on vérifie aisément l'indépendance.

$$\mathcal{H}_3 = \text{Vect}\left(1, x, y, xy, x^2-y^2, x^3 + \frac{3x}{4}(1-x^2-y^2), y^3 + \frac{3y}{4}(1-x^2-y^2)\right)$$

IVC.1 On peut interpréter le problème de la manière suivante : on dispose m objets indiscernables en ligne (on obtient une ligne $O\ O\ O\ \cdots O$) et on veut les regrouper en n paquets de taille ≥ 0. Il s'agit alors de placer $n-1$ "symboles de séparation" (par exemple $i_1 = 0, i_2 = 2, i_3 = 1, i_4 = 0, i_5 = 0$ correspond à $|O\ O|O||$). Il s'agit donc de choisir $n-1$ emplacements parmi les $n+m-1$ symboles. Le nombre de possibilités est $\binom{n+m-1}{n-1} = \binom{n+m-1}{m}$.
On obtient ici le nombre des "monômes" de degré m. On peut alors compter les nombre d'éléments de la base "canonique" de $\mathcal{P}_m$:

$$\dim(\mathcal{P}_m) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{k}$$

IVC.2 On va cette fois obtenir

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{H}_m \oplus (1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2)\mathcal{P}_{m-2}$$

et encore

$$\dim(\mathcal{H}_m) = \dim(\mathcal{P}_m) - \dim(\mathcal{P}_{m-2})$$

La question précédente donne

$$\dim(\mathcal{H}_m) = \binom{n+m-1}{m} + \binom{n+m-2}{m-1}$$